R.T.

Inhoud Goniometrie. Nadruk verboden

HILVERSUM

R.T.

Goniometrie. Les 1

Hoofdstuk 1

1.1. Inleiding

Uit de meetkunde is bekend dat een driehoek is bepaald door drie onderling onafhankelijke gegevens. We kunnen met behulp van die drie gegevens de driehoek construeren, doch het is in de meeste gevallen niet mogelijk de niet gegeven zijden en hoeken uit te rekenen. In de goniometrie nu leren we hoe bij een driehoek uit de drie onderling onafhankelijke gegevens de andere elementen berekend kunnen worden. Hiervoor zullen we een aantal formules afleiden, die alle uit het hoofd geleerd moeten worden. We zullen alle formules, die men vlot uit het hoofd moet kennen, omblokken, zodat de cursist weet, welke de belangrijke formules zijn.

Door de grote hoeveelheid formules is het niet mogelijk deze steeds af te leiden, zodat iedereen min of meer gedwongen is de formules uit het hoofd te leren en steeds te repeteren.
De goniometrie is geen moeilijk vak, maar een cursist die zijn/haar formules niet kent, zal het nooit onder de knie krijgen. In les 6 en les 7 der vlakke meetkunde hebben we reeds kennis gemaakt met enkele begrippen der goniometrie. We zullen het daar geleerde weer hier herhalen.

1.2. Definities der goniometrische verhoudingen

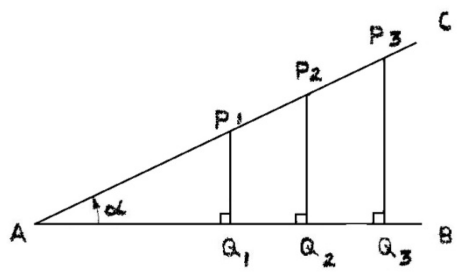


Fig. 1,1.

Op het been AC van de scherpe hoek ABC (zie fig. 1,1), aangegeven met de letter α (spreek uit alfa), nemen we een aantal punten P_1, P_2 en P_3 en projecteren deze punten op het been AB; dit geeft de punten Q_1, Q_2 en Q_3.
Nu zijn de driehoeken AP_1Q_1, AP_2Q_2 en AP_3Q_3 gelijkvormig, waaruit volgt, dat:

$$\frac{P_1Q_1}{AP_1} = \frac{P_2Q_2}{AP_2} = \frac{P_3Q_3}{AP_3}.$$

Hieruit volgt dat de verhouding van het projecterende lijnstuk $(P_1Q_1,\ P_2Q_2\ enz.)$ tot het geprojecteerde lijnstuk $AP_1,\ AP_2\ enz.)$ voor een bepaalde hoek constant is.

Dit geldt eveneens voor de andere verhoudingen die we uit deze gelijkvormige driehoeken kunnen opschrijven.

We beschouwen nu een rechthoekige driehoek ABC (zie fig. 1,2) en noemen de zijden a, b en c. We kunnen in deze driehoek 6 verhoudingen opschrijven van de drie zijden.
Ieder deze verhoudingen heeft een bepaalde naam gekregen. De 6 verhoudingen worden de goniometrische verhoudingen genoemd.
De goniometrische verhoudingen moeten altijd t.o.v. een of andere hoek beschouwd worden.

Ze zijn als volgt gedefinieerd (zie fig. 1,2):

R.T.

2 GO Nadruk verboden

Sinus α	$=$	$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$
Cosinus α	$=$	$\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$
Tangens α	$=$	$\frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$
Cotangens α	$=$	$\frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$
Secans α	$=$	$\frac{\text{schuine zijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijden}}$
Cosecans α	$=$	$\frac{\text{schuine zijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$

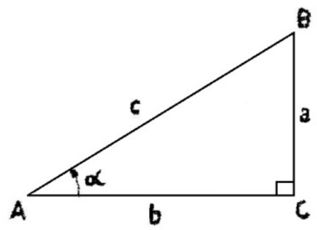


Fig. 1,2.

De goniometrische verhoudingen zijn verhoudingen van lijnstukken. Het zijn dus onbenoemde getallen. (Juist omdat het onbenoemde getallen zijn, is de toepassing van de goniometrie zo groot; het is nl. mogelijk een iedere formule met een goniometrische verhouding te vermenigvuldigen, daar de eenheid hierdoor niet verandert.)

Opmerking:

Aanliggende en overstaande rechthoekszijden hebben betrekking op de hoek ten opzichte waarvan de goniometrische verhouding bekeken wordt.

Gewoonlijk worden de goniometrische verhoudingen afgekort tot: *sin, cos, tan, cot, sec en csc* .

Beschouwen we nu nogmaals fig. 1,2 dan kunnen we dus zeggen:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a}$ $\csc\alpha = \frac{c}{a}$.

We wijzen er nogmaals op dat de begrippen *sin, cos* enz. alleen betekenis hebben indien ze betrekking hebben op een hoek , dus $\sin\alpha$ is een ondeelbaar begrip. Het is dus niet een vermenigvuldiging van sin$\times$ α of zoiets dergelijks. Het komt nogal eens voor dat een cursist hiermee fouten maakt, bv. $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ is niet te vereenvoudigen, vaak wordt nu de fout gemaakt dat door *sin* gedeeld wordt en een uitkomst $\frac{\alpha}{\beta}$ wordt verkregen (β spreek uit bèta).

Indien we de definities bekijken, dan volgt daaruit direct dat voor dezelfde hoek *cosecans* $\propto$ het omgekeerde is van *sinus* α; *secans* α het omgekeerde is van *cosinus* α en *cotangens* α het omgekeerde is van *tangens* α. Dus:

$\csc\alpha$	$=$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	of $\sin\alpha.\csc\alpha = 1$
$\sec\alpha$	$=$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	of $\cos\alpha.\sec\alpha = 1$
$\cot\alpha$	$=$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	of $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

Van de goniometrische verhoudingen zijn de meest belangrijke en de meest gebruikte de sinus, de cosinus en de tangens. Bij opgaven gaan we er dan ook praktisch altijd toe over de secans, de cosecans en de cotangens te vervangen door *cos, sin* en *tan*. Het is gebruikelijk om de hoek bij het hoekpunt A, α te noemen , die bij het hoekpunt B, β en bij het hoekpunt C, γ (spreek uit gamma), terwijl de zijde tegenover hoek A aangegeven wordt met a, tegenover B met b en tegenover C met c.

Het rekenen met goniometrische verhoudingen behoort tot de goniometrie of hoekmeting. De toepassing van de goniometrie bij het berekenen van betrekkingen in driehoeken heet de trigonometrie of driehoeksmeting.

Ter oefening maken de opgaven 1 t/m 5. Oplossingen inzenden van de opgaven 6 t/m 10.

2,1. De beide merkwaardige rechthoekige driehoeken

1e. De gelijkbenige rechthoekige driehoek (zie fig. 2,1).

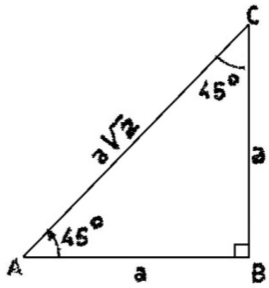


Fig. 2,1.

$AB = BC = a$, dus volgens de stelling van Pythagoras

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Hieruit volgt:

$\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$

2e. De rechthoekige driehoek met een hoek van 30° (zie fig. 2,2).

Uit de meetkunde is bekend dat bij deze driehoek de kleinste rechthoekszijde gelijk is aan de helft van de hypotenusa, dus:

$BC = \frac{1}{2}AC$. Voor $BC = a$ is $AC = 2a$.

Uit de stelling van Pythagoras volgt:

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Uit de driehoek ABC kunnen we nu aflezen:

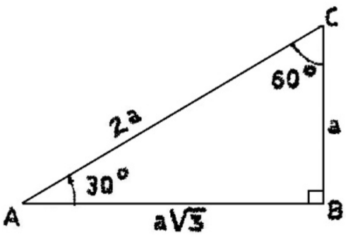


Fig. 2,2.

$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

De hier gevonden resultaten worden zo vaak gebruikt dat het raadzaam is deze waarden uit het hoofd te leren.

$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\tan 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\tan 30 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\tan 60 = \sqrt{3}$

2,2. Betrekkingen tussen de goniometrische verhoudingen van een scherpe hoek

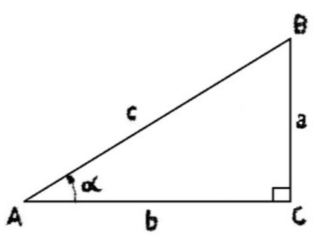


Fig. 2,3.

Uit fig. 2,3 volgt $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$.

Uit de definitie voor de tangens volgt nu: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Verder is: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot\alpha$. Dus geldt:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Opmerking: Men lette goed op de schrijfwijze $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ en niet zoals we eens gebeurt $\frac{sin}{cos}\ \alpha$, dit laatste heeft geen enkele betekenis, men deelt de waarde $\sin\alpha$ door de waarde $\cos\alpha$.

2,3. Betrekkingen tussen de goniometrische verhoudingen van hoeken, die elkaars complement zijn

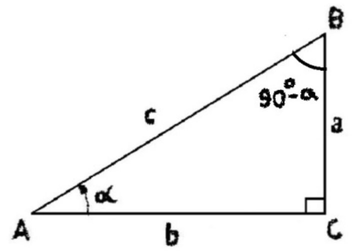


Fig. 2,4.

Daar $\Delta\, ABC$ rechthoekig is, volgt hieruit dat de hoeken A en B elkaars complement zijn, dus $\angle B = 90° - \alpha$. Voor fig. 2,4 geldt: $\sin\alpha = \frac{a}{b}$ en $\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$, dus is $\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$.

Uit fig.2,4 kunnen we op overeenkomstige wijze de volgende formules afleiden:

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$	$\cot(90-\alpha) = \tan\alpha$
$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$	$\sec(90-\alpha) = \csc\alpha$
$\tan(90-\alpha) = \cot\alpha$	$\csc(90-\alpha) = \sec\alpha$

Opmerking: $'co'$ is de afkorting van complement, dus cosinus betekent complementsinus enz. Hiermee is gemakkelijk te onthouden, welke goniometrische betrekkingen bij de complementshoeken bij elkaar horen.

2,3. De stelling van Pythagoras in de goniometrie

Als de stelling van Pythagoras in fig. 2,3 wordt toegepast is $a^2 + b^2 = c^2$. Delen we deze gelijkheid door c^2, dan vinden we : $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ of $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Nu is $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ en $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Vullen we dit in, dan is: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Voor de vorm $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$ enz. is een andere schrijfwijze ingevoerd en wel: $(\sin\alpha)^2 = sin^2\alpha$; $(\cos\alpha)^2 = cos^2\alpha$ enz. De exponent wordt dus niet bij de hoek, doch bij het woord geplaatst. De schrijfwijze $\sin\alpha^2$ wil zeggen dat de hoek in het kwadraat moet worden gezet. Zo is:
$sin^2 30° = \sin 30° \times \sin 30° = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Delen we in de uitdrukking $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ beide leden door $cos^2\alpha$, dan vinden we $\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2}$ of $tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$. Delen we in de uitdrukking $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ beide leden door $sin^2\alpha$, dan vinden we:
$\frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2\alpha}$ of $1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$. Samengevat:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$
$$1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$$

Voorbeeld: Van een scherpe hoek is gegeven dat $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Bereken de andere goniometrische verhoudingen van de scherpe hoek.
Oplossing: Daar $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ vinden we $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, dus: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.
Dan is $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ en $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{4}{3}$.
$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{5}{3}$; $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{4}$.

We hadden i.p.v. de formule $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ te gebruiken natuurlijk ook m.b.v. de stelling van Pythagoras de derde zijde uit kunnen rekenen en daarna uit een figuur de goniometrische verhoudingen kunnen opschrijven.

Ter oefening maken de opgaven 11 t/m 15.
Oplossingen inzenden van de opgaven 16 t/m 20.

3.1. Goniometrische identiteiten

Onder een goniometrische identiteit verstaan we een betrekking tussen een of meer goniometrische verhoudingen van een of meer hoeken.

De betrekking is dan geldig voor alle waarden van die hoeken.

We maken er de cursist op attent dat de formules, die afgeleid zijn in de lessen 1 en 2 algemeen geldig zijn, evenals alle goniometrische formules die nog afgeleid moeten worden. We willen hiermee zeggen dat de formules alle gegeven zijn met de hoek α, doch eveneens geldig zijn met iedere andere hoek, zo is bv. $sin^2 15 + cos^2 15 = 1$ enz.

Bij een goniometrische identiteit is een gelijkheid gegeven van goniometrische verhoudingen. We moeten dan bewijzen dat die gelijkheid juist is.

Om een identiteit te bewijzen , kunnen we verschillende wegen inslaan:

1e Het linkerlid herleiden tot het rechterlid eruit komt.
2e Het rechterlid herleiden tot het linkerlid eruit komt.
3e Beide leden afzonderlijk vereenvoudigen tot men bij beide leden op eenzelfde uitdrukking komt.

Bij een identiteit beginnen we altijd te werken met het moeilijkste lid en werken dit om tot het andere lid er uit komt. Dit is dus de eerste of tweede methode. Zijn beide leden nogal ingewikkeld, dan volgen we de derde methode. We zullen een en ander met een aantal voorbeelden trachten te verduidelijken.

Voorbeeld 1: Bewijs de volgende identiteit:

$$\cot\alpha . sin^4\alpha + \tan\alpha . cos^4\alpha = \tan\alpha . cos^2\alpha .$$

Oplossing: We beginnen met het linkerlid daar dit de moeilijkste kant is en schrijven dit lid geheel in sinussen en cosinussen als volgt:

$$\cot\alpha . sin^4\alpha + \tan\alpha . cos^4\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} . sin^4\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . cos^4\alpha = \cos\alpha . sin^3\alpha + \sin\alpha . cos^3\alpha =$$

$$= \sin\alpha . \cos\alpha (sin^2 + cos^2\alpha) = \sin\alpha . \cos\alpha .$$

We kunnen deze vorm niet verder vereenvoudigen, zodat we nu het tweede lid om gaan werken.

$$\tan\alpha . cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . cos^2\alpha = \sin\alpha . \cos\alpha .$$

Dus dezelfde uitkomst als die van het linkerlid, waarmee de identiteit bewezen is.

We hadden echter ook met de gevonden uitkomst van het eerste lid $\sin\alpha . \cos\alpha$ naar het tweede lid toe kunnen werken, door op te merken dat in het tweede lid $cos^2\alpha$ moest komen.

Vermenigvuldigen en delen door $\cos\alpha$ bij de vorm $\sin\alpha . \cos\alpha$ geeft:

$$\frac{\sin\alpha . cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha . cos^2\alpha .$$

Het is mogelijk een identiteit op vele manieren te bewijzen, doch het verdient aanbeveling om steeds te trachten te vereenvoudigen en niet vormen moeilijker te gaan maken zoals eigenlijk bij de tweede manier in het eerste voorbeeld is gedaan.

Voorbeeld 2: Bewijs, dat $\frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1} = \frac{csc^2\alpha + 2\cot\alpha}{csc^2\alpha - 2}$

Oplossing: We beginnen met het rechterlid en schrijven dit lid geheel in sinussen en cosinussen:

$$\frac{csc^2\alpha + 2\cot\alpha}{csc^2\alpha - 2} = \frac{\frac{1}{sin^2\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{sin^2\alpha} - 2} = \frac{\frac{1 + 2\sin\alpha . \cos\alpha}{sin^2\alpha}}{\frac{1 - 2sin^2\alpha}{sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{sin^2\alpha} \times \frac{sin^2\alpha}{1 - 2sin^2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{1 - 2sin^2\alpha}\,.$$

Schrijven we in de uitdrukking, die we nu gevonden hebben voor het cijfer 1 de waarde $sin^2\alpha + cos^2\alpha$. dan krijgen we:

$$\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha - 2sin^2\alpha} = \frac{sin^2\alpha + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha + cos^2\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\cos\alpha + \sin\alpha)\,(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}\,.$$

Nu delen we teller en noemer door $\sin\alpha$, dit geeft:

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{1 + \cot\alpha}{\cot\alpha - 1} = \frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}\,.$$

Nemen we nu nog eens de vorm, die we op een gegeven moment gevonden hebben nl.: $\frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{1 - 2sin^2\alpha}$ en redeneren we nu , dat we een verdere vereenvoudiging van deze vorm niet kunnen vinden, dan moeten we dus het andere lid gaan uitwerken:

$$\frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1} = \frac{\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

We vermenigvuldigen nu teller en noemer met $\cos\alpha + \sin\alpha$.

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \times \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\alpha + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha + sin^2\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha}\,.$$

Daar $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ is $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$, dit ingevuld in de noemer geeft:

$$\frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{1 - 2sin^2\alpha}\,.$$

Uit dit voorbeeld blijkt dat we soms erg moeten zoeken naar een voortzetting van de opgave en kunstgrepen moeten toepassen om de identiteit te bewijzen. Men doet bij de opgaven over identiteiten een enorm grote routine op.

Voorbeeld 3: Bewijs, dat $\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\tan^3\alpha + \tan\alpha} = \tan\alpha\,.\,cos^3\alpha$.

Oplossing:

$$\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\tan^3\alpha + \tan\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha}{\frac{sin^3\alpha}{cos^3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{1 - cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{sin^3\alpha + \sin\alpha\,.\,\cos\alpha}{cos^3\alpha}} = \frac{(1 - cos^2\alpha)\,cos^2\alpha}{sin^3\alpha + \sin\alpha\,.\,cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{sin^2\alpha\,.\,cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(sin^2\alpha + cos^2\alpha)} = \frac{sin^2\alpha\,.\,cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha\,.\,cos^2\alpha = \frac{\sin\alpha\,.\,cos^3\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \tan\alpha.\,cos^3\alpha\,.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven 21 t/m 25.

Hoofdstuk 2

4,1. Goniometrische verhoudingen van hoeken groter dan 90 °

In de vorige les hebben we gezien dat we voor enkele waarden van α, namelijk voor 30°, 60° en 45° de bijbehorende goniometrische verhoudingen konden berekenen.

De hoek α kan echter alle mogelijke waarden aannemen. De waarden van de goniometrische verhoudingen van de hoek α kunnen we vinden in een goniometrische tabel, die meestal in een logaritmetafel zijn opgenomen. Echter zijn deze waarden alleen berekend voor de hoeken gelegen tussen 0° en 90°. Hoeken, die groter zijn dan 90°, kunnen we daarin niet vinden, zodat de goniometrische verhoudingen van dergelijke hoeken eerst omgerekend moeten worden tot goniometrische verhoudingen van hoeken, gelegen tussen 0° en 90°. In dit hoofdstuk zullen we deze omwerkingen leren.

We beschouwen hiervoor een rechthoekig assenkruis en beschrijven met 0 als middelpunt een cirkel met een straal, die we de eenheid van lengte geven. Het is dus niet belangrijk hoe groot we deze straal nemen; we stellen hem altijd gelijk aan 1.
De cirkel met de straal 1 noemen we de eenheidscirkel. De cirkel wordt door het assenkruis verdeeld in 4 delen, de kwadranten genaamd en aangegeven als kwadrant I, kwadrant II, kwadrant III en kwadrant IV (zie fig. 4,1).

Zoals we in de algebra hebben geleerd zijn de lijnstukken OA en OB van het assenkruis positief en de lijnstukken OC en OD negatief. We veronderstellen nu dat we werken met een veranderlijke hoek α, die gevormd wordt door een vast been en een draaiend been. Het vaste been valt samen met het positieve deel van de x-as, dus met OA.
Het bewegende been van de hoek α is om O draaibaar gedacht in de richting aangegeven door de pijl, dus tegengesteld aan de richting van de wijzers van de klok. We beschouwen nu altijd de hoek gerekend vanaf de stand OA (dus van het vaste been) tot de stand van het draaiende been, waaruit dus volgt, dat de hoek α alle waarden kan aannemen tussen 0 en 360°.

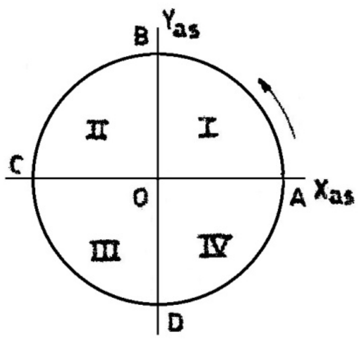


Fig. 4,1.

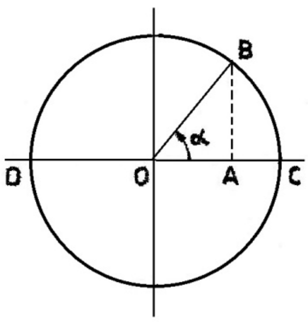


Fig. 4,2.

Als eerste gaan we nu het gedrag van de cosinus beschouwen als de hoek α daarvan resp. in kwadrant I, II, III en IV is gelegen.

Is $\angle\alpha$ gelegen in kwadrant I, dan is de hoek groter dan 0° en kleiner dan 90°. We geven dit aan als $0° < \alpha < 90°$.
Nu geldt (zie fig. 4,2) dat $\cos\alpha = \frac{OA}{OB}$.
Door de aanname van de eenheidscirkel geldt $OB = 1$, dus $\cos\alpha = OA$ m.a.w. de cosinus van de hoek α is gelijk aan de projectie van de straal (dus van het draaiende been) op de horizontale as. Dit geldt eveneens als de hoek α groter is dan 90°. We zullen dan ook voor de cosinus een nieuwe definitie invoeren.

Definitie: De cosinus van een hoek (waarbij de hoek alle mogelijke waarden kan krijgen) is gelijk aan de projectie van het draaiende been op de horizontale as, indien we de lengte van het draaiende been gelijk aan 1 nemen.

Daar we dus steeds de projectie van het draaiende been op de horizontale as zullen bekijken voor de cosinuswaarden, wordt de horizontale as wel de cosinusas of cosinuslijn genoemd.
De straal van de eenheidscirkel is steeds positief, de projectie van die straal op de cosinuslijn kan echter zowel positief als negatief zijn. Uit fig. 4,1 blijkt dat als de straal in kwadrant I of IV is gelegen, de projectie daarvan op het positieve deel van de x-as komt; ligt de straal in kwadrant II of III, dan komt de projectie van de straal op het negatieve deel van de x-as. Hieruit volgt de belangrijke conclusie: De cosinus van een hoek gelegen in kwadrant I of IV is positief, in kwadrant II of III negatief.

Is $\alpha = 0°$, dan valt het draaiende been OB (fig. 4,2) samen met het vaste been OC, dus is $\cos 0° = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OC} = 1$. Neemt nu α vanaf 0° toe, dan wordt de projectie OA steeds kleiner.
Is $\alpha = 90°$ geworden, dan ligt OB langs de verticale as, dus is de projectie van OB op de horizontale as een punt geworden.
Een punt heeft geen afmetingen, zodat $\cos 90° = \frac{0}{OB} = 0$. Wordt de hoek α groter dan 90°, dan komt de projectie van het draaiende been op het negatieve deel van de horizontale as. De waarde van de projectie wordt bij het toenemen van α van 0° tot 180° steeds groter, dus steeds meer negatief.
Is $\alpha = 180°$, dan valt het draaiende been samen met het negatieve deel van de horizontale as.
Dan geldt dus, dat $\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$. Wordt α groter dan 180°, dan wordt de projectie van het draaiende been weer kleiner, dus minder negatief.
Is $\alpha = 270°$, dan valt het draaiende been samen met het negatieve deel van de verticale as.
De projectie op de horizontale as is dan echter weer nul, zodat $\cos 270° = 0$. Wordt α groter dan 270°, dan komt de projectie weer op het positieve deel van de horizontale as en neemt bij toenemende hoek α weer toe totdat hij 360° is; dan is $\cos 360 = 1$. De genoemde grenswaarden van $0°, 90°. 180°, 270°$ en 360° heten de hoofdwaarden, deze zijn:

$\cos 0° = 1$	$\cos 90° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\cos 270° = 0$	$\cos 360° = 1$

Uit een en ander blijkt duidelijk de volgende belangrijke regel: de cosinus van een hoek kan nooit groter dan 1 worden.

Samenvatting:

Neemt α toe van 0° tot 90°, dan neemt $\cos\alpha$ af van $+1$ tot 0.
Neemt α toe van 90° tot 180°, dan neemt $\cos\alpha$ af van 0 tot -1.
Neemt α toe van 180° tot 270°, dan neemt $\cos\alpha$ toe van -1 tot 0.
Neemt α toe van 270° tot 360°, dan neemt $\cos\alpha$ toe van 0 tot $+1$.
Dus $\cos\alpha$ verandert van waarde als α van waarde verandert. Dit betekent dat de cosinus een functie is van de hoek α. We kunnen van deze cosinusfunctie een grafische voorstelling maken in het gebied van 0° tot 360° (zie fig. 4,3). De projecties op de horizontale as worden achtereenvolgens verticaal uitgezet. In de figuur zijn enige punten ter verduidelijking aangegeven nl, de punten E, F, G en H.

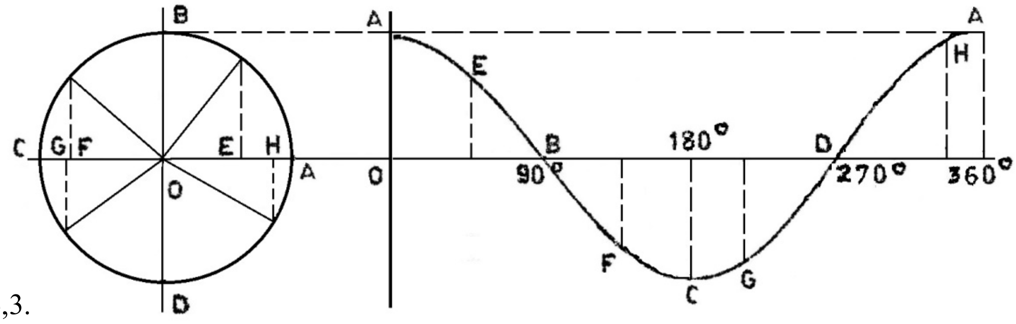


Fig. 4,3.

Oplossingen inzenden van de opgaven 26 t/m 30.

5.1. Goniometrische verhoudingen van hoeken groter dan 90° (vervolg)

Cosinus van hoeken, gelegen in kwadrant II

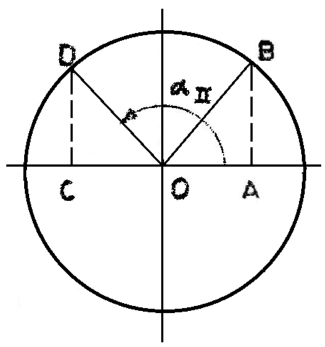


Fig. 5,1.

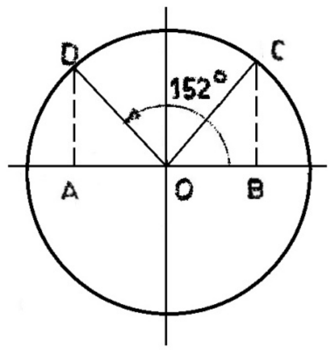


Fig. 5,2.

Indien een hoek gelegen is in het kwadrant II, dan is de hoek groter dan 90°, doch kleiner dan 180°. We zullen deze hoek aangeven als α_{II}, waarbij de index dus het kwadrant aangeeft. We kunnen dus schrijven $90° < \alpha_{II} < 180°$. We wijzen er nogmaals op dat steeds gebruik gemaakt wordt van de eenheidscirkel. Uit fig. 5,1 zien we dat $\cos\alpha_{II} = \frac{OC}{OD} = OC$. Het lijnstuk OC ligt dus op het negatieve deel van de x-as. We brengen het lijnstuk OC over naar kwadrant I, dus naar het positieve deel van de x-as. Dit wordt het lijnstuk OA. Daar OC een lijnstuk is op het negatieve deel en OA een lijnstuk op het positieve deel van de x-as, geldt $OC = -OA$.
Bij OA behoort een hoek AOB, waarvoor $\cos\angle AOB = OA$. We vinden dus, dat $\cos\alpha_{II} = OC$ en $\cos\angle AOB = OA$ en daar $OC = -OA$ volgt hieruit $\cos\alpha_{II} = -\cos\angle AOB$.
Nu is in fig. 5,1 $\Delta\, AOB \cong \Delta COD$, zodat $\angle AOB = \angle DOC$. Verder is $\angle\, DOC = 180° - \alpha_{II}$, dus is: $\angle\, AOB = 180° - \alpha_{II}$. Dit ingevuld geeft dan: $\cos\alpha_{II} = -\cos(180° - \alpha_{II})$.
Deze formule kan uit het hoofd geleerd worden daar hij voor de cosinus van alle hoeken in het tweede kwadrant geldig is. Wij zijn hiervan echter geen voorstander; het is beter de methode van omwerking te onthouden. We zullen nog een voorbeeld behandelen.
Voorbeeld: Herleid $\cos 152°$ tot de cosinus van een hoek in kwadrant I.
Oplossing: Teken de eenheidscirkel en zet de hoek van 152° uit.
Uit fig. 5,2 lezen we af, dat: $\cos 152° = OA$. Breng het lijnstuk OA over naar het eerste kwadrant, dit geeft OB. Bedenk dat $OA = OB$. Richt in Bde loodlijn op en verbind C met O.
Nu is $\angle\, BOC = \angle AOD = 180° - 152° = 28°$, zodat $\cos 152° = -28°$.

Cosinus van hoeken, gelegen in kwadrant III

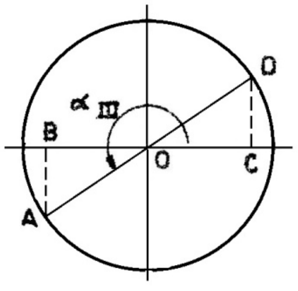


Fig. 5,3.

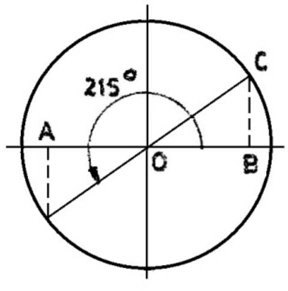


Fig. 5,4.

$180° < \alpha_{III} < 270°$ (zie fig. 5,3). Projecteer OA op de horizontale as, dan is $\cos\alpha_{III} = OB$. Breng OB over naar het eerste kwadrant, dit geeft OC. Richt in C de loodlijn op en verbind het gevonden punt D met O. Nu valt OD in het verlengde van OA (waarom?). Daar $OB = -OC$ vinden we $\cos\alpha_{III} = -\cos\angle\, DOC$.
Uit de figuur zien we dat $\angle\, BOA = \alpha_{III} - 180°$ (nl. α_{III} verminderd met de gestrekte hoek COB).
We vinden dus dat $\cos\alpha_{III} = -\cos(\alpha_{III} - 180°)$.
Voorbeeld: Herleid $\cos 215°$ (zie fig. 5,4).
Oplossing: Uit de figuur zien we dat $\cos 215° = OA$.
Verder is $OA = -OB$ en $\angle\, BOC = 215° - 180° = 35°$, zodat $\cos 215° = -\cos 35°$. (In dit voorbeeld hebben we dus op korte wijze aangegeven, hoe men een dergelijke opgave dient op te lossen.)

Cosinus van hoeken, gelegen in kwadrant IV

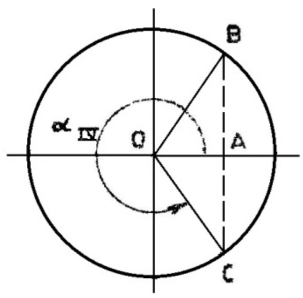


Fig. 5,5.

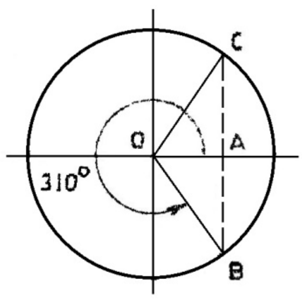


Fig. 5,6.

$270° < \alpha_{IV} < 360°$ (fig.5,5). Uit de figuur lezen we af, dat $\cos \alpha_{IV} = OA$. We behoeven nu het lijnstuk, dat $\cos \alpha_{IV}$ voorstelt, niet naar het positieve deel van de x-as te brengen, omdat het zich daar reeds bevindt.

Verder is:
$\angle BOA = \angle COA$, zodat $\cos \alpha_{IV} = \cos \angle BOA$. Maar $\angle COA = 360° - \alpha_{IV}$, zodat $\cos \alpha_{IV} = \cos(360° - \alpha_{IV})$.

Voorbeeld: Herleid $\cos 310°$.
Oplossing: $\cos 310° = OA$; $\angle AOC = \angle BOA = 360° - 310° = 50°$, dus: $\cos 310° = \cos 50°$.

De hier behandelde methoden eisen van de cursist veel routine. Na enige oefeningen zal men echter merken dat men de omwerkingen steeds korter zal maken en tenslotte moet men zo ver komen dat men een en ander uit het hoofd kan doen.

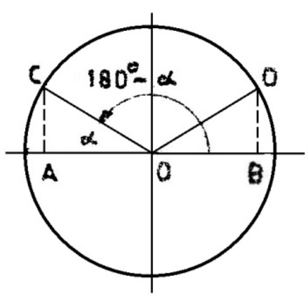


Fig. 5,7.

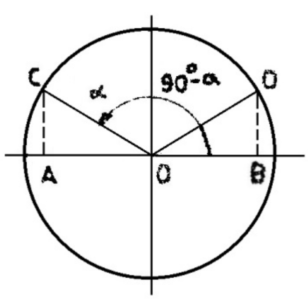


Fig. 5,8.

Voorbeeld 1: Herleid $\cos(180° - \alpha)$.
Opmerking: Indien er bij een hoek α niets naders staat aangegeven, dan veronderstellen we dat die hoek altijd scherp is.
Oplossing: Zie fig. 5,7.
$\cos(180° - \alpha) = OA$, verder is $OB = -OA$ en $\angle BOD = \angle AOC$, dus:
$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$.

Voorbeeld 2: Herleid $\cos(90° + \alpha)$ (zie fig. 5,8).

Oplossing: $\cos(90° + \alpha = OA)$; $OB = -OA$.
Nu is $\angle BOD = \angle AOC = 90° - \alpha$. Dus $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$.
In les 2 hebben we geleerd, dat $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$.
Dus $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha) = -\sin \alpha$.

We maken erop attent dat we een cosinus altijd zullen omwerken tot een cosinus, die we zo nodig op het laatst om kunnen zetten in een sinus. Dit geldt eveneens met de omwerkingen van de sinus en de tangens die we later zullen leren.

Men kan dus alleen bij de omwerkingen op een andere goniometrische verhouding terechtkomen bij complementaire hoeken.

Ter oefening maken de opgaven 31 t/m 35.
Oplossingen inleveren van de opgaven 36 t/m 40.

6,1. Goniometrische verhoudingen van hoeken, groter dan 360° en van negatieve hoeken

Hoeken groter dan 360°

Indien het draaiende been een volledige omwenteling heeft gemaakt heeft het een hoek van 360° beschreven. Draait het been nu nog verder, dan kunnen we zeggen dat het been een hoek heeft beschreven die groter is dan 360°. Als we zo'n hoek in de eenheidscirkel afzetten, zien we dat een van de genoemde gevallen weer terugkomt, immers het draaiende been komt altijd in een van de kwadranten te liggen. We komen nu tot de volgende belangrijke regel:

Is een hoek groter dan 360°, dan trekken we zoveel maal 360° af als mogelijk is en werken de dan gevonden goniometrische verhoudingen om tot een waarde in kwadrant I.

Voorbeeld: Herleid $\cos(360° + \alpha)$.

Oplossing: We trekken éénmaal 360° af, dan is $\cos(360° + \alpha) = \cos \alpha$.

We wijzen erop, dat de hoeken niet hetzelfde zijn, doch de cosinussen van verschillende hoeken wel, daar deze immers in de eenheidscirkel dezelfde lijnstukken zijn.

Negatieve hoeken

In de rekenkunde en algebra hebben we gezien dat een minteken een bepaalde betekenis heeft, nl. die van de aftrekking. Het minteken wordt echter ook meermalen voor andere doeleinden gebruikt, zo ook in de goniometrie. We hebben in les 4 gezien dat we een bepaalde draairichting hebben aangenomen voor het draaiende been (antiklok). Deze draairichting noemen we de positieve draairichting. Draaien we nu de tegengestelde kant uit, dan noemen we dit de negatieve draairichting. We geven dit aan door een minteken voor de hoek te plaatsen, dus niet voor de goniometrische verhouding. Zo betekent $\cos(-30°)$, dat we in tegengestelde richting hebben gedraaid over een hoek van 30°.

Indien we bij een opgave met een negatieve hoek, het draaiende been tegengesteld draaiend hebben afgezet, werken we de opgave verder uit zoals we dat in de vorige les hebben geleerd. We zullen hiervan enige voorbeelden behandelen.

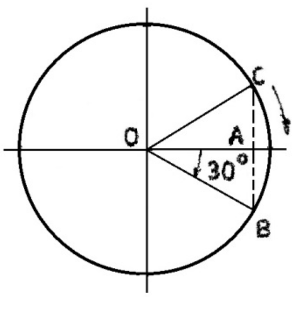


Fig. 6,1.

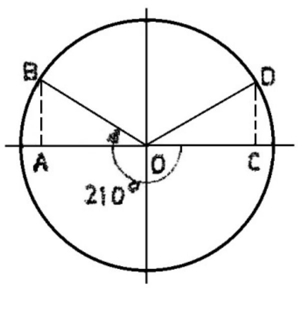


Fig. 6,2.

Voorbeeld 1: Herleid $\cos(-30°)$.

Oplossing: Draai terug over een hoek van 30°. Het draaiende been komt nu in de stand OB. Dan is $\cos(-30°) = OA$. Verder is $\cos \angle AOC = OA$ en $\angle AOC = \angle BOA = 30°$. Dus $\cos(-30°) = \cos 30°$.

We merken op, dat als we gebruik maken van de regel, dat we zoveel maal 360° bij een hoek mogen tellen of ervan af mogen trekken als we wensen, het vraagstuk ook anders uitgevoerd kan worden. We tellen er dan zoveel maal 360° bij op, dat de hoek positief wordt, dus in het voorbeeld éénmaal. We vinden dan, dat $\cos(-30°) =$
$= \cos 330°$. Werken we dit weer uit, dan vinden we eveneens dat $\cos(-30°) = \cos 330° = \cos 30°$.

Voorbeeld: Herleid $\cos -210°$, (zie fig. 6,2).

Oplossing: $\cos -210 = OA$; $OC = -OA$, dus: $\cos -210° = -\cos \angle\ COD$. Verder is: $\angle\ COD =$
$= \angle BOA = 30°$, dus $\cos -210° = -\cos 30° = -\ ½\sqrt{3}$. We hadden ook $1 \times 360°$ op kunnen tellen, dus: $\cos -210° = \cos(360° - 210°) = \cos 150° = -\cos 30° = -\ ½\sqrt{3}$.

6,2. Cosinussoïde

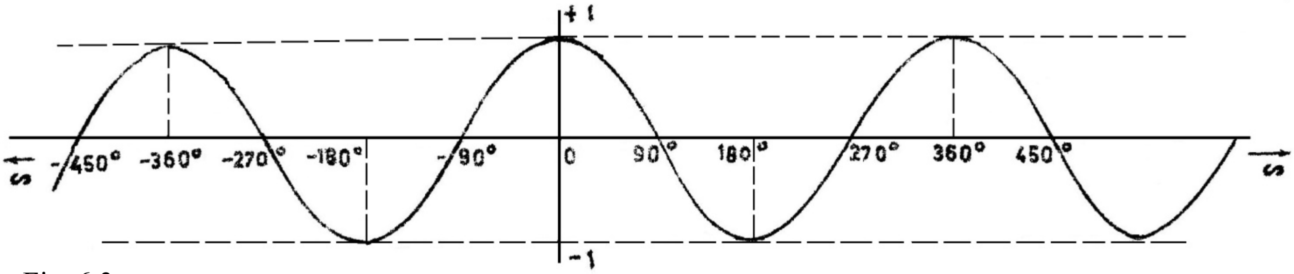
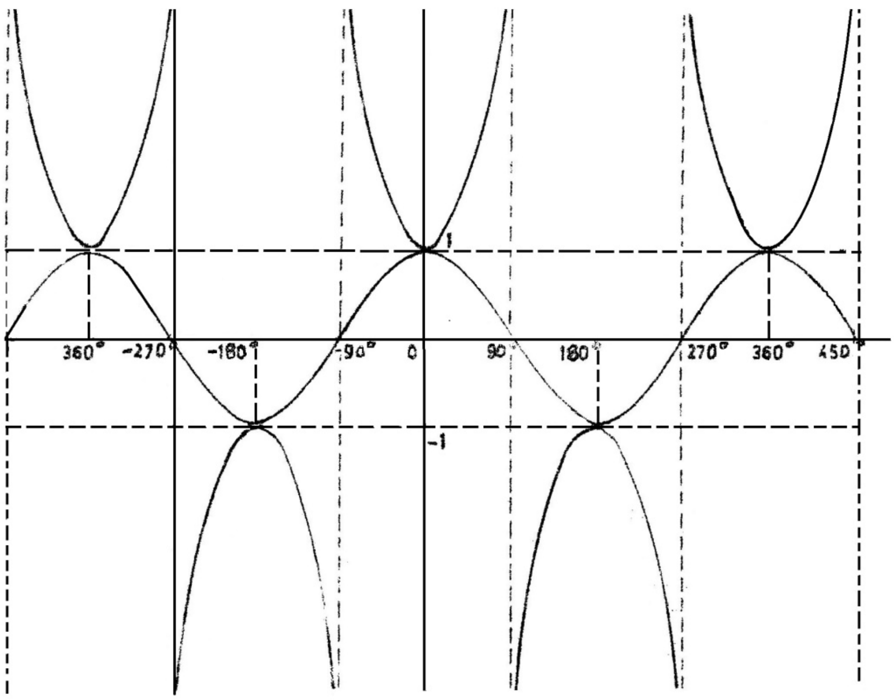


Fig. 6,3.

Uit het behandelde in deze les hebben we kunnen leren dat we de cosinus kunnen bepalen van alle hoeken gelegen tussen min-oneindig en plus-oneindig. In les 4 hebben we de cosinuslijn of cosinussoïde getekend van 0° tot 360°. Het blijkt nu dat dit een oneindig voortlopende kromme is zonder onderbreking. Zo'n functie heet een continu-functie. De volledige cosinusoïde ziet er dus uit als fig. 6,3. Uit deze figuur zien we dat de cosinus nooit groter dan 1 en nooit kleiner dan -1 kan worden.

6,3. De secans

In les 1 hebben we geleerd dat de omgekeerde waarde van de cosinus de secans is. Moeten we nu een secans herleiden, dan schrijven we daar altijd $\frac{1}{cos}$ voor en herleiden dan de cosinuswaarde. Bekijken we de hoofdwaarden van de secans dan vinden we: $\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$; $\sec 90° = \frac{1}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty$ $\sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = \frac{1}{-1} = -1$; $\sec 270° = \frac{1}{\cos 270°} = \frac{1}{0} = \infty$ (eig. $-\infty$) en $\sec 360° = \frac{1}{\cos 360°} = \frac{1}{1}$ =1



Daar de cosinus van een hoek steeds een waarde is kleiner of hoogstens gelijk aan 1, zal het omgekeerde, dus de secans van een hoek, altijd groter of hoogstens gelijk zijn aan 1.

We zullen deze les besluiten met de grafische voorstelling van de secans, waarbij we ter verduidelijking de cosinusoïde er nogmaals bij tekenen (zie fig. 6,4).

Fig. 6,4.

Ter oefening maken de opgaven 41 t/m 45.
Oplossingen inzenden van de opgaven 46 t/m 50.

7,1. Omwerking van de sinus van hoeken groter dan 90°

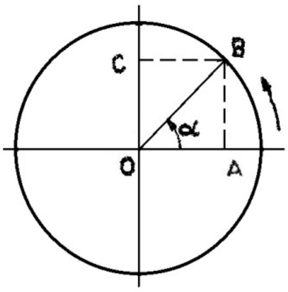


Fig. 7,1.

We gebruiken weer de eenheidscirkel. Uit fig. 7,1 volgt: $\sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} - AB$.
Nu is $\Delta\, OAB \cong \Delta\, OBC$, zodat $AB = OC$. We kunnen dus zeggen in overeenstemming met de cosinus , dat voor de sinus van een hoek geldt dat deze gelijk is aan de projectie van het draaiende been op de verticale as. We noemen de verticale as of y-as dan ook wel in de goniometrie de sinuslijn.

Uit een en ander volgt, dat de sinus identiek is met de cosinus als we het assenkruis over een hoek van 90° gedraaid denken.

We bekijken eerst weer de hoofdwaarden. Als het draaiende been op de horizontale as ligt, is $\alpha = 0°$. De projectie van het draaiende been op de verticale as is dan 0, immers het draaiende been staat loodrecht op de y-as. Bij het toenemen van de hoek α van 0 tot 90° neemt de sinus van de hoek eveneens toe. Bij 90° ligt het draaiende been op de verticale as. Dus het draaiende been valt dan samen met zijn projectie op de verticale as.
Hieruit volgt, dat $\sin 90° = 1$. Neemt de hoek verder toe van 90° tot 180°, dan neemt de sinus van die hoek weer af totdat bij 180° het draaiende been weer loodrecht op de verticale as staat, dus de projectie is weer nul. Hieruit volgt $\sin 180° = 0$.

Wordt de hoek groter dan 180°, dan komt de projectie van het draaiende been op het negatieve deel van de y-as. De sinus van een hoek groter dan 180°, maar kleiner dan 360° is dus negatief.
Is de hoek 270°, dan valt het draaiende been weer samen met zijn projectie, doch nu op het negatieve deel van de y-as, dus $\sin 270° = -1$. Bij het verder toenemen van de hoek tot 360° neemt de projectie weer af totdat bij 360° de projectie weer gelijk aan nul is, dus $\sin 360° = 0$.

Zoals we in de vorige les hebben gezien is het geoorloofd zoveel maal 360° af te trekken als mogelijk is. We zagen daar, dat $\cos 0° = 1$ en $\cos 360° = 1$ was, dus $\cos 360° = \cos 0°$.
Bij de sinus vinden we ook $\sin 360° = \sin 0° = 0$.

Samenvatting:

$\sin 0° = 0$ $\qquad \sin 90° = 1$ $\qquad \sin 180° = 0$ $\qquad \sin 270° = -1$ $\qquad \sin 360° = 0$

De sinus van een hoek α is positief als $0° < \alpha < 180°$ en de sinus van hoek α is negatief als $180° < \alpha < 360°$.

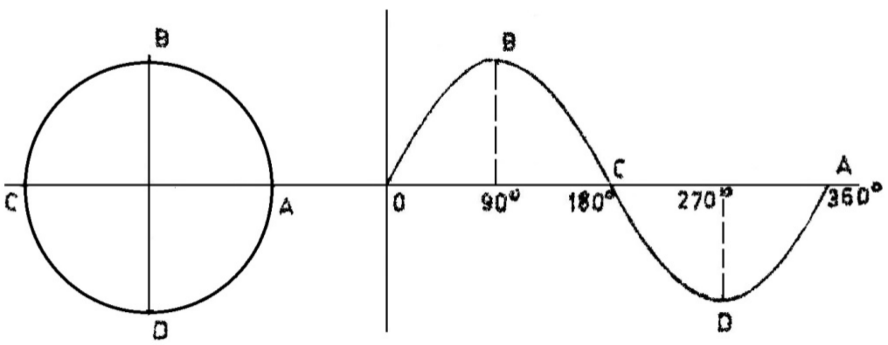


Fig. 7,2.

De sinus verandert dus van waarde als α van waarde verandert, d.w.z. de sinus is een functie van de hoek α. We kunnen van deze sinusfunctie weer een grafische voorstelling maken juist als bij de cosinus (zie fig. 7,2).

Vergelijken we deze sinuslijn met de cosinuslijn van fig. 4,3 les 4, dan zien we eigenlijk hetzelfde figuur, indien we de verticale as over een afstand van 90° verschuiven.

Herleiding van de sinus van een hoek in kwadrant II gelegen

We kunnen met de kennis van de omwerking der cosinussen de omwerkingen der sinussen korter behandelen, waarbij we zullen zien, dat de methoden praktisch hetzelfde zijn. We herleiden eerst de waarde $\sin \alpha_{II}$ $(90° < \alpha_{ii} < 180°)$ (zie fig. 7,3). De hoek α_{II} wordt vastgelegd door het draaiende been OB.
Nu is $\sin \alpha_{II} = OA$ en is ook $\sin \angle DOC = OA$.
Verder is $\angle DOC = 180° - \alpha_{II}$, zoals we eenvoudig uit de figuur kunnen aflezen, dus geldt:

$$\sin \alpha_{II} = \sin(180° - \alpha_{II}).$$

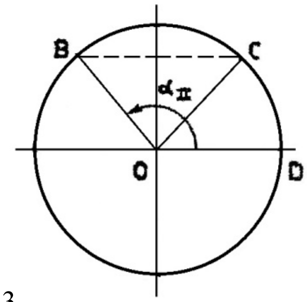


Fig. 7,3

Herleiding van de sinus van een hoek gelegen in kwadrant III

$180° < \alpha_{III} < 270°$; $\sin \alpha_{III} = OA$.
We brengen het lijnstuk OA over naar het positieve deel van de y-as, dus $OB = -OA$.
Nu is $\sin \angle DOC = OB$. Uit de figuur lezen we af, dat: $\angle DOC = \alpha_{III} - 180°$. Dus geldt:

$$\sin \alpha_{III} = -\sin(\alpha_{III} - 180°),$$

(zie fig. 7,4).

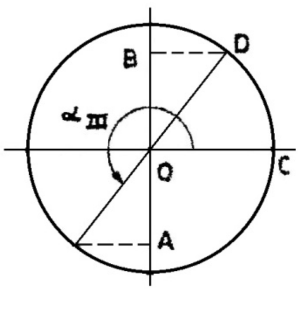


Fig. 7,4.

Herleiding van de sinus van een hoek gelegen in kwadrant IV

$270° < \alpha_{IV} < 360°$ (zie fig. 7,5).
$\sin \alpha_{IV} = OA$. Breng het lijnstuk OA over naar kwadrant I, dat geeft OB, dus $OB = -OA$.
Nu is $\sin \angle COD = OB$. Uit de figuur lezen we verder af: $\angle COD = \angle EOD = 360° - \alpha_{IV}$, dus geldt dat:

$$\sin \alpha_{IV} = -\sin(360° - \alpha_{IV}).$$

(zie fig.7,5).

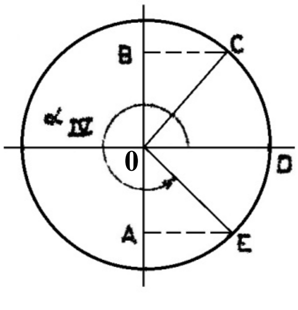


Fig.7,5.

Ter oefening maken de opgaven 51 t/m 55.
Oplossingen inzenden van de opgaven 56 t/m 60.

8,1. Omwerking van de sinus van hoeken groter dan 360°

Voor hoeken groter dan 360° geldt dezelfde eigenschap als we in les 6 voor de cosinus hebben, nl. is de hoek groter dan 360°, dan mogen we zoveel maal 360° aftrekken als mogelijk is.

Voorbeeld: Herleid $\sin 1270°$

Oplossing: Het is mogelijk $3 \times 360° = 1080°$ af te trekken, dus:

$\sin 1270° = \sin(1270° - 1080°) = \sin 190°$.

Uit fig. 8,1 zien we dat: $\sin 190° = OA$.

We maken nu $OB = OA$.

Nu is $\angle COD = 190° - 180° = 10°$, zodat we vinden dat: $\sin 190° = -\sin 10°$.

(Negatief, immers OA was negatief.)

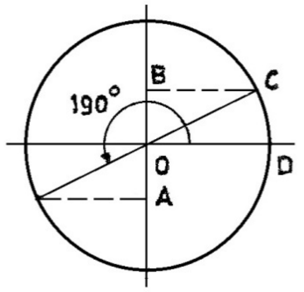


Fig. 8,1.

Omwerking van de sinus van negatieve hoeken

Ook hier geldt weer dezelfde afspraak als bij de cosinus is gemaakt in les 6. Dus het draaiende been draait in de tegengestelde richting.

Voorbeeld: Herleid $\sin -50°$ (zie fig. 8,2).

Oplossing: We draaien dus in tegengestelde richting tot de stand OB; $\angle BOC = 50°$, dan is:

$\sin -50° = OA$. We maken nu OD even lang als OA, dus $OD = -OA$. Verder is $\angle EOC = \angle COB = 50°$. Dus vinden we dat:

$$\sin -50° = -\sin 50°.$$

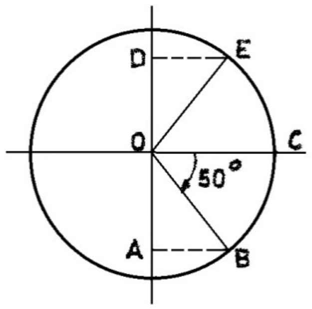


Fig. 8,2.

Voorbeeld: Herleid $\sin(\alpha - 270°)$ (α is scherp).

Oplossing: We schrijven de hoek eerst zodanig dat 270° vooraan komt te staan, aldus:

$\sin(\alpha - 270°) = \sin -(270° - \alpha)$. We moeten dus terugdraaien ober een hoek $270° - \alpha$. Nu is $\sin -(270° - \alpha) = OA$.

Uit fig. 8,3 volgt eveneens $\sin \angle BOC = OA$.

Nu is $\angle AOC = \angle AOD = \alpha$, dus $\angle BOC = 90° - \alpha$.

Hieruit volgt $\sin \angle BOC = \sin(90° - \alpha)$. Dus:

$\sin(270° - \alpha) = \sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$.

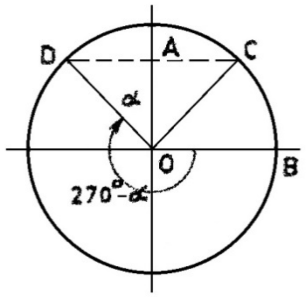


Fig. 8,3.

8,2. De cosecans

In les 1 hebben we geleerd dat $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Moeten we nu een cosecans van een hoek groter dan 90° herleiden, dan maken we gebruik van deze omkering. Bekijken we de hoofdwaarden van de cosecans, dan vinden we:

$\csc 0° = \frac{1}{\sin 0°} = \frac{1}{0} = \infty$; $\csc 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1} = 1$; $\csc 180° = \frac{1}{\sin 180°} = \frac{1}{0} = \infty$;

$\csc 270° = \frac{1}{\sin 270°} = \frac{1}{-1} = -1$; $\csc 360° = \frac{1}{\sin 360°} = \frac{1}{0} = \infty$.

Daar de sinus van een hoek steeds een waarde is die kleiner of hoogstens gelijk aan 1 is, volgt uit $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ direct dat de cosecans groter of hoogstens gelijk aan 1 kan zijn.

We zullen in de volgende figuur de grafische voorstelling geven van de cosecans en tevens van de sinusoïde.

Uit fig. 8,4 blijkt weer dat de sinusoïde een continu-functie is (d.w.z. zonder onderbreking). Bekijken we echter de cosecans-functie en ook de secans-functie van fig. 6,4 les 6, dan zien we dat deze krommen bestaan uit verschillende delen. De cosecans en de secans-functie zijn dus geen doorlopende krommen. Zo'n functie met onderbrekingen heet een discontinu-functie.

Indien we fig. 6,4 en fig. 8,4 naast elkaar leggen, dan zien we dat fig. 8,4 ontstaat uit 6,4 door de y-as in fig. 6,4 over een afstand van 90° naar links te verschuiven of omgekeerd fig. 6,4 uit fig. 8,4 door de y-as in fig. 8,4 over een afstand van 90° naar rechts te verschuiven.

De sinus en de cosinus, zowel als de secans en de cosecans zijn dus t.o.v. elkaar 90° verschoven. Vandaar de naam complementaire functies, zoals we in les 2 hebben geleerd.

Evenals de cosinus is de secans positief in het eerste en vierde kwadrant en negatief in het tweede en derde, de cosecans is evenals de sinus positief in het eerste en tweede kwadrant en negatief in het derde en vierde kwadrant.

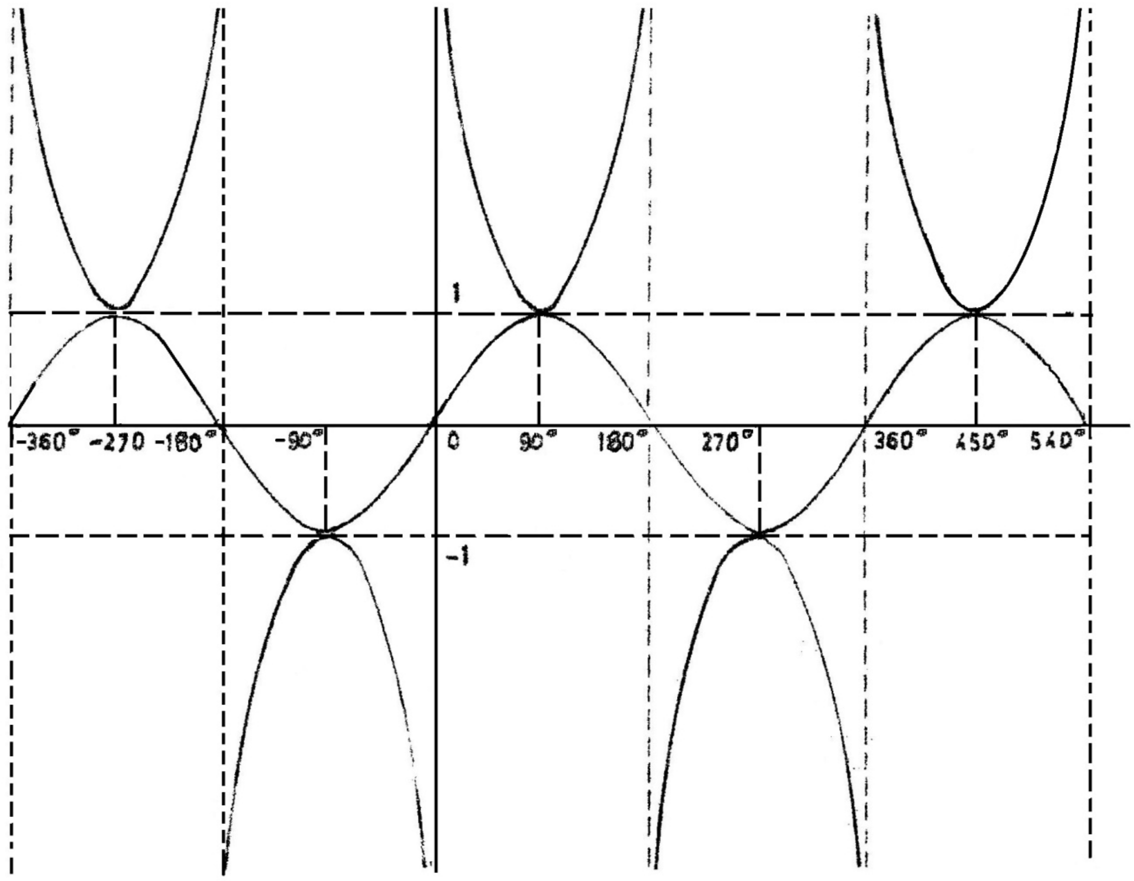


Fig. 8,4. De sinus-functie en de cosecans-functie.

Ter oefening maken de opgaven 61 t/m 65.
Oplossingen inzenden van de opgaven 66 t/m 70.

9,1. Omwerking van de tangens van hoeken groter dan 90°

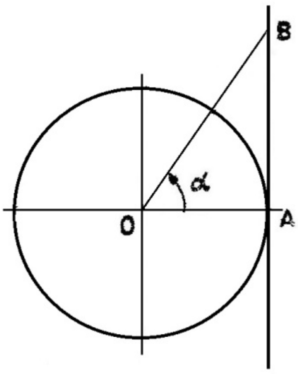


Fig. 9,1

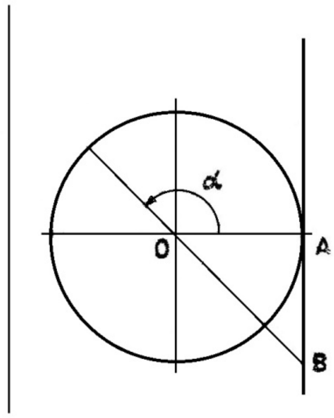


Fig. 9,2.

De gedachtengang bij de tangens wijkt iets af van die van de sinus en de cosinus, hoewel de omwerkingen weer op hetzelfde neerkomen.
Voor de cosinus bekeken we de projecties op de horizontale as en voor de sinus de projecties op de verticale as, waarbij steeds de noemer, uit de verhouding van de lijnstukken, gelijk aan 1 was.

Dit kunnen we bij de tangens ook bereiken als we de raaklijn trekken in het punt A (zie fig. 9,1).
Dan is $\tan\alpha = \frac{BA}{OA}$ en OA is de straal van de cirkel, dus $OA = 1$, waaruit volgt, dat $\tan\alpha = AB$.

We bekijken hier dus niet een projectie op een of andere as, ook heeft nu het draaiende been niet de eenheid van lengte. Het vaste been heeft bij de tangens de eenheid van lengte.
Het draaiende been wordt zo ver verlengd tot het de verticale raaklijn snijdt. Voor de tangens beschouwen we dus het stuk dat het draaiende been afsnijdt van deze raaklijn, gerekend vanaf het punt A tot aan het snijpunt B.

De verticale raaklijn noemen we dan de tangenslijn. Het punt A is het nulpunt; naar boven worden de positieve waarden afgezet, naar beneden de negatieve.
Bekijken we weer de hoofdwaarden, dan zien we, dat als $\alpha = 0°$ is, er geen stuk van de raaklijn wordt afgesneden, dus $\tan 0° = 0$. Neemt α toe, dan neemt het lijnstuk, dat van de raaklijn wordt afgesneden, eveneens toe. Is $\alpha = 90°$, dan loopt het draaiende been evenwijdig met de raaklijn.
Deze beide evenwijdige lijnen snijden elkaar in het oneindige, zodat $\tan 90° = \infty$. Wordt α groter dan 90°, dan moeten we het draaiende been naar de andere kant verleggen (zie fig. 9,2).
De tangens is dan negatief. Is $\alpha = 180°$, dan snijdt het draaiende been weer niets af van de raaklijn, zodat $\tan 180° = 0$. Wordt α groter dan 180°, dan vinden we weer een snijpunt in het positieve deel.
Voor $\alpha = 270°$ geldt weer dat de lijnen evenwijdig lopen, dus $\tan 270° = \infty$. Bij 360° vinden we dat $\tan 360° = \tan 0° = 0$.

Indien hoek α van 0° af tot 90° nadert, dan gaat de tangens van die hoek naar $+\infty$. Wanneer echter de hoek α maar iets groter is dan 90°, dan snijdt het verlengde van het draaiende been de raaklijn in het negatieve deel. Dus als de hoek iets groter is dan 90°, dan is de tangens van die hoek bijna $-\infty$.
Het is dus niet te definiëren of $\tan 90°$ en $\tan 270°$ positief of negatief oneindig is. We geven dit aan door $\tan 90° = \pm\infty$ en $\tan 270° = \pm\infty$.
De hoofdwaarden worden dus:

$\tan 0° = 0$ $\quad$ $\tan 90° = \pm\infty$ $\quad$ $\tan 180° = 0$ $\quad$ $\tan 270° = \pm\infty$ $\quad$ $\tan 360° = 0$

De tangens van een hoek is positief in kwadrant I en III, hij is negatief in kwadrant II en IV.
Vergelijken we de kwadranten voor de sinus, cosinus en tangens, waarbij we bedenken dat $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, dan zien we uit fig. 9,3 de juistheid in.

Tangens van hoeken in kwadrant II

$90° < \alpha_{II} < 180°$ (zie fig. 9,4). OB geeft de stand aan van het draaiende been, bepaald door de hoek α_{II}. Nu is $\tan \alpha_{II} = AC$.

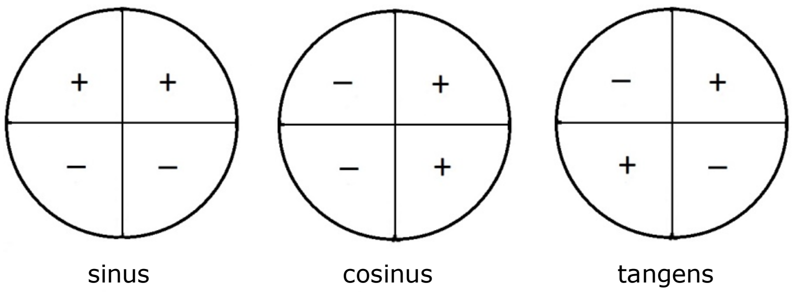


Fig. 9,3.

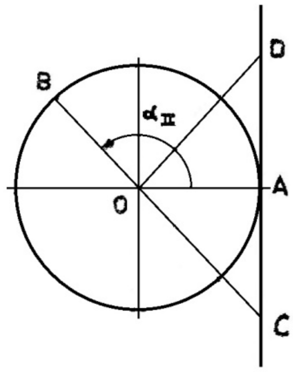


Fig. 9,4.

We passen nu op het positieve deel van de raaklijn het lijnstuk AD af, dat even groot is als AC, dus $AD = -AC$. Nu is $\tan \angle DOA = AD$, zodat $\tan \alpha_{II} = -\tan \angle DOA$. Uit de figuur zien we, dat: $\angle AOD = 180° - \alpha_{II}$ (evenals bij de sinus en de cosinus), zodat $\tan \alpha_{II} = -\tan(180° - \alpha_{II})$.
Voorbeeld: Herleid $\tan 135°$ (zie fig. 9,5).
Oplossing: $\tan 135° = AB$. $AC = -AB$. Verder is:
$\tan \angle COA = AC$ en $\angle COA = 180° - 135° = 45°$. Dus vinden we: $\tan 135° = -\tan 45° = -1$.

Tangens van hoeken in kwadrant III

$180° < \alpha_{III} < 270°$ (zie fig. 9,6). We zetten de hoek α_{III} uit en verlengen de aldus gevonden stand van het draaibare been OB tot hij de tangenslijn in C snijdt. Dus is $\tan \alpha_{III} = AC$. Echter: $\tan \angle COA = AC$, dus $\tan \alpha_{III} = \tan \angle COA$. Uit de figuur zien we dat $\angle COA = \alpha_{III} - 180°$, dus: $\tan \alpha_{III} = \tan(\alpha_{III} - 180°)$.

Tangens van hoeken in kwadrant IV

$270° < \alpha_{IV} < 360°$ (zie fig. 9,7). We zetten de hoek α_{IV} uit en verlengen het draaiende been tot hij de tangenslijn in B snijdt. Nu is $\tan \alpha_{IV} = AB$. We maken $AC = AB$, waaruit dus volgt dat: $\tan \alpha_{IV} = -\tan \angle COA$. Uit de figuur volgt dat $\angle COA = 360° - \alpha_{IV}$, waaruit we dus vinden: $\tan \alpha_{IV} = -\tan(360° - \alpha_{IV})$.

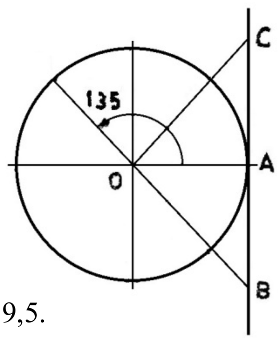


Fig. 9,5.

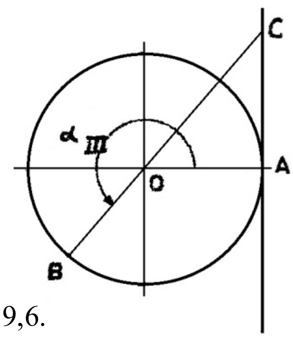


Fig. 9,6.

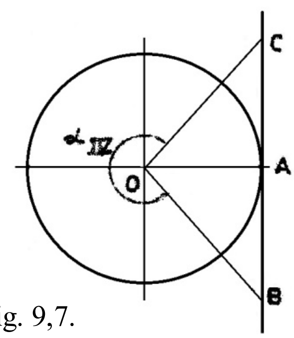


Fig. 9,7.

Ter oefening maken de opgaven 71 t/m 75.
Oplossingen inzenden van de opgaven 76 t/m 80.

10,1. Tangens van hoeken groter dan 360° en negatieve hoeken

Ook hier gelden weer dezelfde afspraken als bij de cosinus en de sinus, dus:
Bij hoeken groter dan 360° zoveel maal 360° aftrekken als mogelijk is en daarna de tangens omwerken naar het eerste kwadrant.

Bij negatieve hoeken de tegengestelde draairichting nemen en daarna weer omwerken naar het eerste kwadrant.

10,2. Grafische voorstelling van de tangens en de cotangens

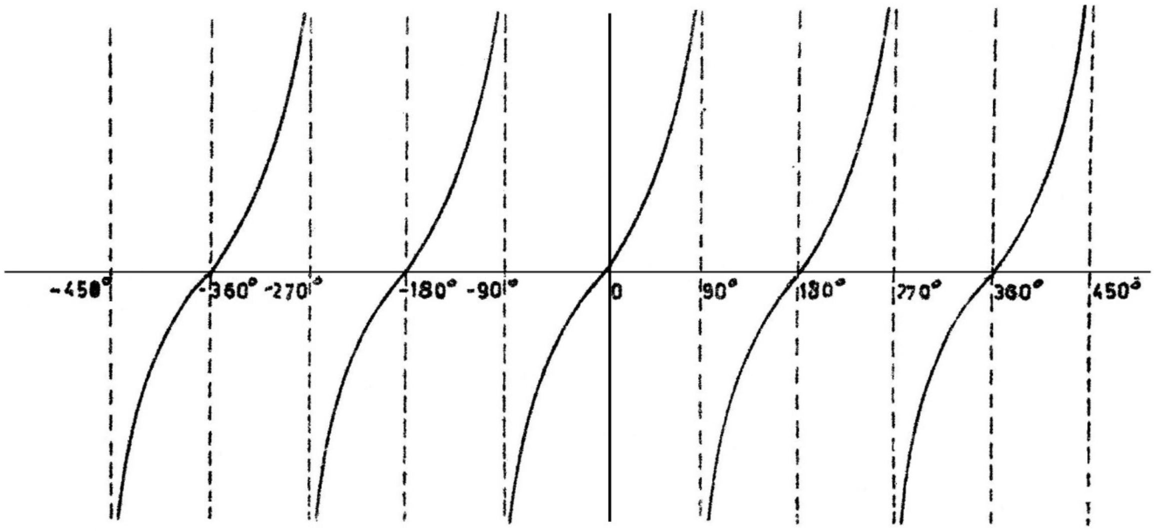


Fig. 10,1.

Uit de hoofdwaarden hebben we gezien dat $\tan 90°$ en $\tan 270°$ oneindig zijn.
De tangens-functie is dan, evenals de secans en cosecans-functie, een discontinu-functie. In fig. 10,1 zien we de grafische voorstelling van de tangens getekend.

We hebben gezien dat de sinus en de cosinus nooit groter dan 1 en nooit kleiner dan -1 kunnen worden. Uit bovenstaande grafiek zien we dat de tangens alle waarden kan aannemen van min-oneindig tot plus-oneindig.

De omwerkingen van de cotangens worden weer gedaan door deze als omgekeerde van de tangens te beschouwen. Bekijken we de hoofdwaarden van de cotangens, dan vinden we:

$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0} = \infty$ $\cot 90° = \frac{1}{\tan 90°} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\cot 180° = \frac{1}{\tan 180°} = \frac{1}{0} = \infty$ $\cot 270° = \frac{1}{\tan 270°} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\cot 360° = \frac{1}{\tan 360°} = \frac{1}{0} = \infty$

Met behulp hiervan vinden we nu de grafiek van de cotangens, zie fig. 10,2.

Ook de cotangens-functie is weer een discontinu-functie. We hebben geleerd dat de secans en de cosecans alle waarden kunnen aannemen, uitgezonderd de waarden tussen $+1$ en -1.
Deze goniometrische verhoudingen kunnen nooit een waarde tussen $+1$ en -1 aannemen.

De cotangens echter doorloopt evenals de tangens alle waarden van plus-oneindig tot min-oneindig.

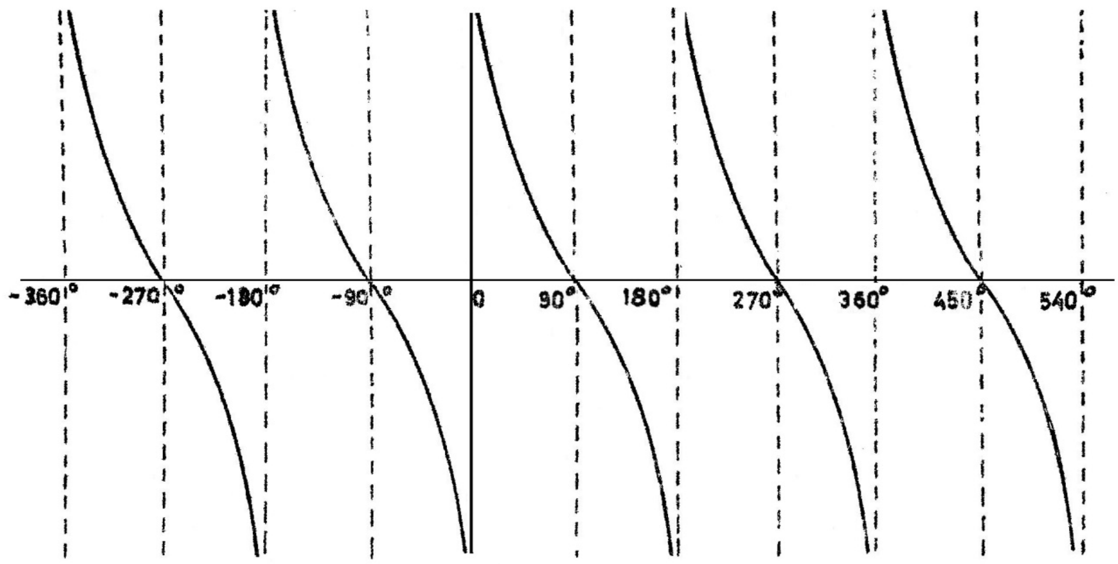


Fig. 10,2.

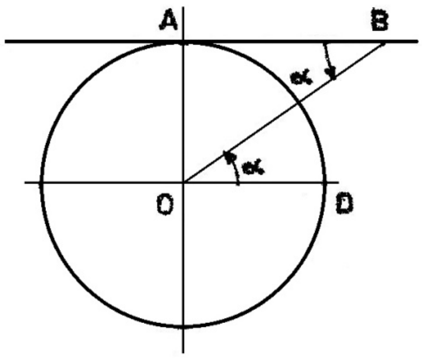


Fig. 10,3.

De cotangens kunnen we evenals de tangens ook herleiden rechtstreeks uit een figuur (zie fig. 10,3).

De cotangenslijn is de horizontale raaklijn in het punt A. Rechts van A reken-en de lijn positief, links van A negatief. De omwerkingen gaan hetzelfde als bij de tangens.

Uit fig. 10,3 zien we dat $\angle ABO = \alpha$ (verwisselende binnenhoeken bij twee evenwijdige lijnen, gesneden door een derde). Dan is $\cot\alpha = \frac{AB}{OA}$.
OA is weer de straal van de eenheidscirkel, dus $OA = 1$, waaruit volgt $\cot\alpha = AB$. Hiermee hebben we dus weer het identieke geval als bij de tangens.

We werken echter meestal met de cotangens, door deze om te werken tot tangens, doch de methode met de cotangenslijn is ook goed bruikbaar.

Men kan dus de methode nemen die men het eenvoudigst vindt.

Ter oefening maken de opgaven 81 t/m 85.
Oplossingen inzenden van de opgaven 86 t/m 90.

11,1. Formules voor de goniometrische verhoudingen van de som van twee hoeken

De goniometrische verhoudingen van de som van twee hoeken kunnen we uitdrukken in de goniometrische verhoudingen van elk der hoeken.

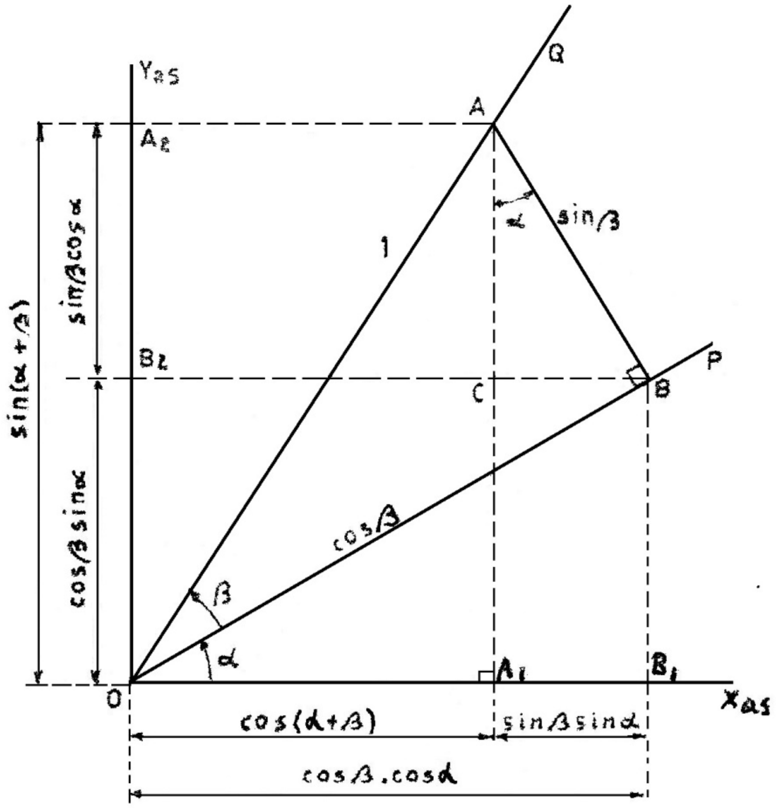


Fig. 11,1.

In fig. 11,1 hebben we de hoek α en de hoek β achter elkaar uitgezet, zo, dat: $\alpha = \angle POX; \beta = \angle POQ,$ waaruit volgt dat: $\alpha + \beta = \angle QOX$. We nemen op de lijn OQ een lijnstuk OA aan, dat we de lengte van de eenheid geven, dus $OA = 1$. We projecteren OA op de horizontale as en op de verticale as, resp.: OA_1 *en* OA_2.
In $\Delta\, OA_1A$ is:
$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AA_1}{OA} = \frac{OA_1}{1}$ en
$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AA_1}{OA} = \frac{AA_1}{1} =$
$= AA_1$, verder is $AA_1 = OA_2$, zodat $\sin(\alpha+\beta) = OA_2$.
Omgekeerd kunnen we zeggen dat het lijnstuk:
$OA_1 = \cos(\alpha+\beta)$ en
$OA_2 = \sin(\alpha+\beta)$.

(Deze waarden zijn er in de figuur bijgezet.)

Projecteren we nu het lijnstuk OA op de lijn OP, dan vinden we als projectie het lijnstuk OB. $\Delta\, OBA$ is rechthoekig in B. In deze rechthoekige driehoek is de schuine zijde $OA = 1$. Dan geldt: $\cos\beta = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1}$, of $OB = \cos\beta$. Verder is $\sin\beta = \frac{AB}{OA} = AB$ of $AB = \sin\beta$. Het lijnstuk OB projecteren we op de x-as. De projectie is het lijnstuk OB_1. $\Delta\, OB_1B$ is rechthoekig in B_1.

In $\Delta\, OB_1B$ geldt: $\cos\alpha = \frac{OB_1}{OB}$, maar $OB = \cos\beta$, zodat: $\cos\alpha = \frac{OB_1}{\cos\beta}$ of: $OB_1 = \cos\alpha\ \cos\beta$.
Verder is: $\sin\alpha = \frac{BB_1}{OB}$ *of* $BB_1 = OB\ \sin\alpha$, zodat: $BB_1 = \sin\alpha\ \cos\beta$.

Daar $BB_1 = OB_2$ kunnen we voor OB_2 eveneens schrijven $OB_2 = \sin\alpha\ \cos\beta$.
Zoals we in fig. 11,1 kunnen zien, zijn op de horizontale as de lijnstukken OA_1 en OB_2 bekend. Indien we nu nog een waarde kunnen vinden voor A_1B_1, dan was het mogelijk hier een formule op te stellen.

Op de verticale as zijn de lijnstukken OA_2 en OB_2 bekend. Hier zouden we dus nog graag de uitdrukking vinden voor het lijnstuk A_2B_2.

De lijnstukken A_1B_1 en A_2B_2 kunnen we terugvinden in $\Delta\, ABC$, nl. $A_1B_1 = BC$ en $A_2B_2 = AC$.

Nu is volgens een stelling in de meetkunde $\angle BAC = \angle BOB_1$, dus gelijk aan α.
Deze stelling luidt: als de benen van een hoek loodrecht staan op de benen van een andere hoek, zijn die hoeken aan elkaar gelijk.

Uit de figuur blijkt dat $AA_1 \perp OX$ en $AB \perp OP$, zodat $\angle BAC = \angle BOB_1 = \alpha$.
In de rechthoekige driehoek BAC was verder nog bekend, dat $BA = \sin\beta$, zodat we voor deze driehoek kunnen zeggen:
$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{\sin\beta}$, dus: $AC = \cos\alpha.\sin\beta$ en daar $AC = A_2B_2$ is: $A_2B_2 = \cos\alpha\ \sin\beta$.

In $\Delta\, BAC$ is verder $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sin\beta}$, zodat $BC = \sin\alpha\ \sin\beta$ en daar $BC = A_1B_1$ is: $A_1B_1 = \sin\alpha\ \sin\beta$.

In fig. 11,1 lezen we nu af op de horizontale as dat: $OA_1 = OB_1 - A_1B_1$ of:

$$\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

en op de verticale as dat: $OA_2 = OB_2 + A_2B_2$ of:

$$\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}$$

Voor de tangens van de som van twee hoeken behoeven we geen afleiding te geven door middel van een figuur, doch we kunnen deze formule afleiden door de beide gevonden formules op elkaar te delen:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}.$$

Deling van alle termen door $\cos\alpha\ \cos\beta$ levert op:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} + \frac{\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} - \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta}.$$

De drie afgeleide formules, die uit het hoofd geleerd moeten worden zijn dus:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

<u>Opmerking:</u> voor de cotg, sec en cosec van de som van 2 hoeken leiden we geen afzonderlijke formules af; deze herleiden we tot resp. tan, cos en sin.

<u>Voorbeelden:</u>
1. Herleid: $\sin(90° + \alpha)$.
<u>Oplossing:</u> $\sin(90° + \alpha) = \sin 90° \cos\alpha + \cos 90° \sin\alpha = 1\cos\alpha + 0\sin\alpha = \cos\alpha$.
(Opmerking: Vergelijk deze omwerking ook met die d.m.v. de omwerking met de cirkel.)

2. $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

3. $\frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\ \tan x} = \tan(2x + x) = \tan 3x.$

Ter oefening maken de opgaven 91 t/m 95.
Oplossingen inzenden van de opgaven 96 t/m 100.

12,1. Formules voor de goniometrische verhoudingen van het verschil van twee hoeken

De goniometrische verhoudingen van het verschil van twee hoeken kunnen we eveneens uitdrukken in de goniometrische verhoudingen van ieder der hoeken.

In fig. 12.1 is:
$\alpha = \angle POX$ en $\beta = \angle POQ$, zodat $\angle QOX = \alpha - \beta$.
Op de lijn OQ nemen we weer een lijnstuk met de eenheid als lengte, dus: $OA = 1$.

Projecteren we het lijnstuk OA op de horizontale as, dan vinden we het lijnstuk OA_1.
$\Delta\, OA_1A$ is rechthoekig in A_1. Voor $\Delta\, OAA_1$ geldt dan:

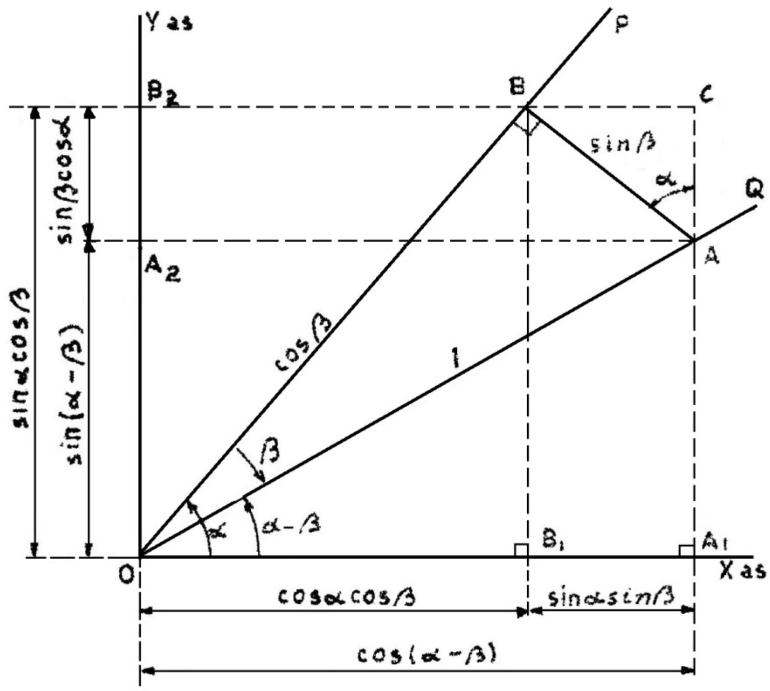


Fig. 12,1.

$\cos(\alpha-\beta) = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OA_1}{1} = OA_1$ en $\sin(\alpha-\beta) = \frac{AA_1}{OA} = \frac{AA_1}{1} = AA_1$,
daar $AA_1 = OA_2$ is $OA_2 = \sin(\alpha-\beta)$.

We projecteren OA op de lijn OP en vinden het lijnstuk OB.
$\Delta\, OAB$ is rechthoekig in B. Voor deze driehoek geldt:

$$\cos\beta = \frac{OB}{OA} = OB \qquad \text{en} \qquad \sin\beta = \frac{AB}{OA} = AB.$$

Projecteren we OB op de horizontale as, dan is de projectie van OB het lijnstuk OB_1. In $\Delta\, OB_1B$ geldt dan: $\cos\alpha = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OB_1}{\cos\beta}$ zodat $OB_1 = \cos\alpha\ \cos\beta$ en $\sin\alpha = \frac{BB_1}{OB} = \frac{BB_1}{\cos\beta}$ zodat: $BB_1 = \sin\alpha\ \cos\beta$. Verder is $BB_1 = OB_2$ zodat $OB_2 = \sin\alpha\ \cos\beta$. We willen nu nog een uitdrukking vinden voor de lijnstukken A_1B_1 en A_2B_2. De grootte van deze lijnstukken kunnen we eveneens vinden in de rechthoekige driehoek ABC. Daar het been AC van $\angle BCA$ loodrecht staat op het been OA_1 van hoek α en het been AB loodrecht op het been OP is $\angle CAB = \alpha$.

In $\Delta\, ABC$ is verder $AB = \sin\beta$ zodat in deze driehoek geldt:
$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{\sin\beta}$ dus $AC = \cos\alpha\ \sin\beta$, daar $AC = A_2B_2$ is $A_2B_2 = \cos\alpha\ \sin\beta$.
Verder is $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{\sin\beta}$ zodat $BC = \sin\alpha\ \sin\beta$ en daar $BC = B_1A_1$ is $B_1A_1 = \sin\alpha\ \sin\beta$.

Uit fig. 12,1 lezen we af op de horizontale as:

$OA_1 = OB_1 + B_1A_1$ of:
$\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta}$

En op de verticale as:

$$OA_2 = OB_2 - A_2B_2 \qquad \text{of:}$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}.$$

De tangens van het verschil van twee hoeken leiden we weer af uit de deling der gevonden formule:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta}.$$

We delen alle termen weer door $\cos\alpha\ \cos\beta$, waaruit we vinden:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} - \frac{\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} + \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\ \tan\beta},$$

zodat:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\ \tan\beta}.$$

We zullen de in deze les en in de vorige les afgeleide formules bij elkaar opschrijven. De cursist moet deze uit het hoofd leren. Vele van de nog af te leiden formules zijn uit deze 6 formules afgeleid.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Uitgewerkte voorbeelden:

1. Herleid: $\sin\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$.

<u>Oplossing:</u>
$$\sin\{(\alpha+\beta)+\gamma\} = \sin(\alpha+\beta)\ \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

2. Bewijs dat: $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$.

<u>Bewijs:</u>
$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} =$$
$$= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta) + (\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta) - (\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta)} =$$
$$= \frac{\cos\beta(\sin\alpha+\cos\alpha) + \sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\beta(\sin\alpha+\cos\alpha) - \sin\beta(\cos\alpha+\sin\alpha)} =$$
$$= \frac{(\cos\beta+\sin\beta)\ (\sin\alpha+\cos\alpha)}{(\cos\beta-\sin\beta)\ (\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$$

Ter oefening maken de opgaven 101 t/m 105.
Oplossingen inzenden van de opgaven 106 t/m 110.

13,1. Invoeren van een hulphoek

De methode genaamd “invoering van de hulphoek”, vindt vooral in de wisselstroomtheorie een groot toepassingsgebied. Zij wordt toegepast om een som of verschil van twee goniometrische verhoudingen, waarvoor coëfficiënten voorkomen, te herleiden tot één goniometrische verhouding. Om een vorm logaritmisch op te lossen (dit wordt later behandeld) maken we eveneens vaak gebruik van de hulphoek.

Beschouwen we de vorm $\cos\alpha + a\sin\alpha$, dan zijn deze goniometrische verhoudingen niet samen te voegen. We stellen nu $a = \tan\varphi$, waarin φ de zogenaamde hulphoek is. We hebben geleerd dat de tangens van een hoek alle waarden kan doorlopen van min-oneindig tot plus-oneindig.
Deze manier van invoeren van $\tan\varphi$ is dus voor iedere getalwaarde mogelijk. We kunnen eveneens $a = \cot\varphi$ stellen daar ook $\cot\varphi$ alle waarden van min-oneindig tot plus-oneindig doorloopt.
We zullen laten zien dat beide methoden bruikbaar zijn.

Vullen we de waarde voor $a = \tan\varphi$ is, dan vinden we:

$$\cos\alpha + a\sin\alpha = \cos\alpha + \tan\varphi\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha\,\cos\varphi + \sin\alpha\,\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

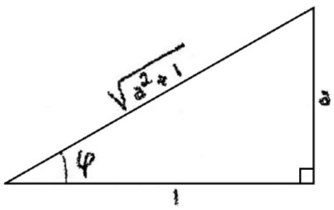


Fig. 13,1.

Daar $\tan\varphi = a$ kunnen we $\cos\varphi$ uitrekenen. We doen dit m.b.v. een rechthoekige driehoek (zie fig. 13,1).

Uit de figuur lezen we af, dat:
$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. Vullen we dit in, dan wordt de vorm:
$\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha-\varphi}{\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = \sqrt{a^2+1}\,\cos(\alpha-\varphi).$
In plaats van $a = \tan\varphi$ te stellen, hadden we ook $\cot\varphi$ kunnen nemen.

De bewerking gaat hetzelfde:

$$\cos\alpha + a\sin\alpha = \cos\alpha + \cot\varphi\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha\,\sin\varphi + \cos\varphi\,\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Hierin is dan $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ dus is:

$$\cos\alpha + a\sin\alpha = \sqrt{1+a^2}\,\sin(\alpha+\varphi).$$

Het is dus mogelijk om uit één opgave schijnbaar twee verschillende antwoorden te krijgen als gevolg van het stellen op twee manieren. Uiteraard zijn de antwoorden natuurlijk identiek.

We hebben eerst gesteld $\tan\varphi = a$ en bij het tweede geval $\cot\varphi = a$.
Hoewel de beide hoeken φ genoemd zijn, zijn de hoeken uiteraard niet hetzelfde. Noemen we ze φ_1 en φ_2, dan is $\tan\varphi_1 = a$ en $\cot\varphi_2 = a$, zodat $\tan\varphi_1 = \cot\varphi_2 = \tan(90° - \varphi_2)$, dus:

$$\varphi_1 = 90° - \varphi_2.$$

We hadden gevonden als antwoord:

$$\sqrt{1+a^2}\cos(\alpha-\varphi_1) \text{ en } \sqrt{1+a^2}\sin(\alpha+\varphi_2).$$

Vullen we nu φ_1 in het eerste antwoord in, dan vinden we:

$$\sqrt{1+a^2}\cos(\alpha-\varphi_1) = \sqrt{1+a^2}\cos(\alpha - 90° + \varphi_2) =$$

$$\sqrt{1+a^2}\cos\{90° - (\alpha+\varphi_2)\} = \sqrt{1+a^2}\sin(\alpha+\varphi_2).$$

Dit is dus het tweede antwoord, waaruit volgt dat beide antwoorden inderdaad gelijk zijn.

De methode van de hulphoek is alleen te gebruiken, indien de hoeken van de goniometrische verhoudingen hetzelfde zijn, dus de methode is niet toe te passen, bijvoorbeeld bij een vorm als $\cos\alpha + \sin\beta$. Verder is het alleen toe te passen als we een som of een verschil van een sinus- en een cosinus-functie hebben, al of niet met een coëfficiënt voor één ervan of voor beide.

Voorbeeld: Herleid $a\cos\alpha + b\sin\alpha$.
Oplossing: $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\left(\cos\alpha + \frac{b}{a}\sin\alpha\right)$. stel:

$\frac{b}{a} = \tan\varphi$ (of $\cot\varphi$), dan vinden we:

$$a(\cos\alpha + \tan\varphi) = a\left(\cos\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\alpha\right) =$$
$$= a\,\frac{(\cos\alpha\ \cos\varphi + \sin\varphi\ \sin\alpha)}{\cos\varphi} =$$
$$= \frac{a}{\cos\varphi}\cos(\alpha - \varphi).$$

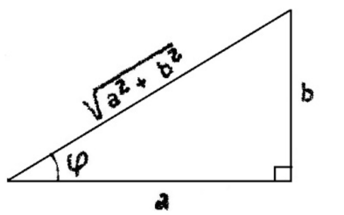


Fig. 13,2.

Uit fig. 13,2 volgt, dat:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{, zodat:}$$

$$\frac{a}{\cos\varphi}\cos(\alpha - \varphi) = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos(\alpha - \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\alpha - \varphi).$$

Voorbeeld: Herleid $\sin\alpha + \cos\alpha$.
Oplossing: $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \tan\varphi\cos\alpha$, dus: $\tan\varphi = 1$ en $\varphi = 45°$,
Dus: $\sin\alpha + \tan\varphi\cos\alpha = \sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) =$
$= \frac{1}{\cos\varphi}\sin(\alpha + \varphi)$. Daar $\varphi = 45°$ *is* $\cos\varphi = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
zodat we vinden: $\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\sin(\alpha + 45°) = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$.

Voorbeeld: Herleid de vorm: $R\sin\omega t + \omega L\cos\omega t$.
Oplossing: Stel: $\frac{\omega L}{R} = \tan\varphi$, dan vinden we:

$$R(\sin\omega t + \tan\varphi\cos\omega t) = \frac{R}{\cos\varphi}(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi) =$$
$$\frac{R}{\cos\varphi}\sin(\omega t + \varphi).$$

Uit $\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$ volgt dat:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\ \text{dus:}$$

$$\frac{R}{\cos\varphi}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{R}{\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}\sin(\omega t + \varphi) =$$
$$= \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}\sin(\omega t + \varphi).$$

Ter oefening maken de opgaven 111 t/m 115.
Oplossingen inzenden van de opgaven 116 t/m 120.

14.1. De goniometrische verhouding van de dubbele hoek

In les 11 hebben we afgeleid de formule:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Stellen we in deze formule $\beta=\alpha$, dan vinden we:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha \quad \text{of:}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Deze formule is algemeen geldend, dus niet alleen voor een hoek 2α, doch voor iedere hoek. Zo is:

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$\begin{aligned}\sin 8\alpha &= 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = 2(2\sin 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 4\alpha = \\ &= 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 4(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \\ &= 8\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.\end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cancel{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}}{\cancel{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}}=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Verder vonden we in les 11 de formule:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Stellen we in deze formule eveneens $\beta=\alpha$, dan vinden we:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \quad \text{of:}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Daar $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ is $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Vullen we dit in, dan vinden we:

$$\cos 2\alpha = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \text{of:}$$

$$\cos 2\,\alpha = 1-2\sin^2\alpha.$$

Uit $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ volgt ook dat: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. Vullen we dit in, in: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, dan vinden we: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$ of:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1.$$

We vinden dus voor de cosinus van de dubbele hoek 3 formules die eveneens weer algemeen geldend zijn. Beschouwen we nu nog de formule $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ en stellen we weer $\beta=\alpha$, dan vinden we: $\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$ of:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}.$$

We wijzen er uitdrukkelijk op, dat hoewel de omblokte formules afgeleid zijn voor een hoek α en het dubbele daarvan, de formules algemeen geldend zijn, dus gelden voor iedere waarde van α.

Voorbeeld: Te bewijzen: $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{1}{2}\alpha.$

Bewijs:

$$\begin{aligned}&\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}\times\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}= \\ &=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\alpha}{1+\left(2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-1\right)}= \\ &=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\,\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}=\tan\tfrac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

We hebben in dit voorbeeld de vorm $1+\cos 2\alpha$ omgewerkt door gebruik te maken van de formule $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$. We hadden uit deze formule de waarde -1 ook naar het andere lid van de vergelijking kunnen brengen, zodat $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$.

Deze formule en eveneens de formule $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ komen in de techniek zeer veel voor om goniometrische waarden, die in het kwadraat staan, tot de eerste graad terug te brengen. We zullen ze daarom ook omblokt aangeven, zodat de cursist deze weer uit het hoofd dient te leren.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\,\alpha$$

In de techniek vindt men deze formules terug met ωt in plaats van met α, dus: $\sin^2\omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$ en $\cos^2\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$, dus een gelijkstroom- of een gelijkspanningscomponent plus of min een wisselstroom- of wisselspanningscomponent.

<u>Voorbeeld:</u> Herleid $\cos 3\alpha$.
<u>Oplossing:</u> $\cos 3\alpha$

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

In het laatste voorbeeld vonden we dus dat:

$$\cos 3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Hieruit kunnen we afleiden dat:

$$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha = 3\cos\alpha \quad \text{of:} \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}.$$

Later zullen we in de goniometrie andere formules leren, waarmee we $cos^3\alpha$ rechtstreeks kunnen herleiden tot enkelvoudige functies, hetgeen vooral voor de techniek zeer belangrijk is.

<u>Voorbeeld:</u> Druk $\tan 3\alpha$ uit in $\tan\alpha$.
<u>Oplossing:</u> $\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} =$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}\,.\,\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - tan^2\alpha - 2\,tan^2\alpha}}{\frac{1 - tan^2\alpha - 2\,tan^2\alpha}{1 - tan^2\alpha}} =$$

$$= \frac{3\tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - tan^2\alpha} \times \frac{1 - tan^2\alpha}{1 - 3\,tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - tan^3\alpha}{1 - 3\,tan^2\alpha}.$$

<u>Voorbeeld:</u> Bereken $\tan 2\alpha$ als $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
<u>Oplossing:</u> $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$.

Omdat $\sin\alpha$ positief is, moet hoek α in het eerste of tweede kwadrant liggen.

Met behulp van een rechthoekige driehoek vinden we $\tan\alpha = \pm\frac{3}{4}$.

Voor $\tan\alpha = +\frac{3}{4}$ wordt $\tan 2\alpha = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$.

Voor $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ wordt $\tan 2\alpha = \frac{2 \times -\frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{24}{7} = -3\frac{3}{7}$.

Ter oefening maken de opgaven 121 t/m 125.
Oplossingen inzenden van de opgaven 126 t/m 130.

15,1. De goniometrische verhoudingen van de halve hoek

In les 14 hebben we geleerd dat:

$$\cos 2\alpha = 2cos^2\alpha - 1.$$

Hieruit volgt: $2cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ dus:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Verder was $\cos 2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$, waaruit volgt:

$2sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, dus:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

Delen we deze beide uitdrukkingen op elkaar, dan vinden we:

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

Met behulp van de drie gevonden formules kunnen we dus overgaan naar het dubbele van de gegeven hoek, terwijl we in de vorige les juist het omgekeerde hebben geleerd.

Zo geldt eveneens:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

De laatste formule is nog te herleiden tot een mooiere vorm, doch bovenstaande formule is eenvoudiger te onthouden in verband met de eerste twee formules. Deze herleiding gaat als volgt:

$$\text{Tan}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\times\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

We hadden teller en noemer onder de wortelvorm ook kunnen vermenigvuldigen met $1 + \cos\alpha$; we hadden dan gevonden:

$$\text{Tan}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\times\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

We zullen in deze les verder een voorbeeld uitwerken, waarbij we gebruik maken van alle tot nu toe geleerde formules.

<u>Voorbeeld</u>: Bereken $\tan\alpha + \beta$ als gegeven is dat:

$\tan\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\frac{2}{3}$ en $\sin(270° + 2\beta) = -\frac{7}{25}$.

Verder is gegeven dat $\alpha + \beta$ ligt tussen 0° en 180°.

<u>Oplossing:</u> $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta}$.

We zullen dus trachten $\tan\alpha$ en $\tan\beta$ te berekenen, die we dan in de formule kunnen invullen. Nu is $\tan\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\frac{2}{3}$.

We werken $\tan\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)$ om met behulp van de eenheidscirkel.

We vinden dan: $\tan\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right) = -\tan\left(90° - \frac{1}{2}\alpha\right) = -\cot\frac{1}{2}\alpha$.

Dus is:

$-\cot\frac{1}{2}\alpha = -\frac{2}{3}$ of $\cot\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{3}$ zodat $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}$. Nu is:

$$\tan\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{3}{2}.$$

Kwadrateren geeft:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{9}{4} \text{ dus: } 4 - 4\cos\alpha = 9 + 9\cos\alpha, \text{ dus:}$$

$12\cos\alpha = -5$ of $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$.

Uit het minteken blijkt, dat α in het tweede of derde kwadrant kan liggen, doch de voorwaarde $0 < \alpha + \beta < 180$ sluit het derde kwadrant uit.
α ligt dus in het tweede kwadrant.

Met behulp van een rechthoekige driehoek kunnen we $\tan\alpha$ berekenen.

We vinden dan $\tan\alpha = \frac{12}{5}$. Daar α in het tweede kwadrant moest liggen is de tangens van α echter negatief, zodat: $\tan\alpha = -\frac{12}{5}$.
We hadden dit resultaat ook op een andere manier kunnen vinden als volgt:

Daar $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}$ en $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ vinden we:

$$\tan\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{1-\frac{9}{4}} = \frac{3}{\frac{4-9}{4}} = -\frac{12}{5}.$$

Deze methode is veel korter, doch we hebben de eerste methode behandeld om het vele leerzame dat er in zit. Verder was: $\sin(270 + 2\beta) = -\frac{7}{25}$.

We kunnen $\sin(270 + 2\beta)$ omwerken, m.b.v. de cirkel, doch ook met de formule $\sin(\alpha + \beta)$. We zullen dit laatste toepassen.

$\sin(270° + \beta) = \sin 270° \ \cos 2\beta + \cos 270° \sin 2\beta$. Nu is $\sin 270° = -1$ en $\cos 270° = 0$, dus is $\sin(270 + 2\beta) = -\cos 2\beta = -\frac{7}{25}$ of: $\cos 2\beta = \frac{7}{25}$.
$\cos 2\beta = 2cos^2\beta - 1 = \frac{7}{25}$.

Hieruit volgt: $2\cos^2\beta = \frac{32}{25}$ of: $\cos^2\beta = \frac{16}{25}$, zodat $\cos\beta = \pm\frac{4}{5}$. We vinden dus 2 waarden voor $\cos\beta$, nl. $\cos\beta = +\frac{4}{5}$ en $\cos\beta = -\frac{4}{5}$.

Deze laatste vorm wil zeggen dat β in het tweede of vierde kwadrant moet liggen.
Daar gegeven was $0 < \alpha + \beta < 180°$ en we reeds gevonden hebben dat α in het tweede kwadrant moet liggen, volgt hieruit dat β scherp moet zijn. We houden dus over: $\cos\beta = \frac{4}{5}$.
Met behulp van een rechthoekige driehoek vinden we dat $\tan\beta = \frac{3}{4}$.

Vullen we de gevonden waarden voor $\tan\alpha$ en $\tan\beta$ in de formule voor $\tan(\alpha + \beta)$ in, dan vinden we:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-\frac{12}{5} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{-48+15}{20}}{\frac{20+36}{20}} = \frac{-33}{56}.$$

Ter oefening maken de opgaven 131 t/m 134.
Oplossingen inzenden van de opgaven 135 t/m 140.

16,1. Herleiding van het product van twee goniometrische verhoudingen tot een som of een verschil van twee goniometrische verhoudingen

Als we de formules $\sin(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha-\beta)$ optellen, vinden we:

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&\underline{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}\,+\\&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Trekken we de formules voor $\sin(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha-\beta)$ van elkaar af, dan komt er:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

Evenzo vinden we door optelling uit:

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&\underline{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\,+\\&\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\sin\quad 2\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Trekken we de formules voor $\cos(\alpha+\beta)\ en\ \cos(\alpha-\beta)$ van elkaar af, dan vinden we:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta\,.$$

In de techniek is het nu zeer belangrijk om een product van twee goniometrische verhoudingen te kunnen omzetten in een som of een verschil van twee goniometrische verhoudingen.

Samenvattend vinden we dus:

$$\begin{aligned}2\sin\alpha\cos\beta&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\2\cos\alpha\sin\beta&=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\2\cos\alpha\cos\beta&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\-2\sin\alpha\sin\beta&=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

We wijzen er nog op, dat deze in de techniek veel toegepaste formules daar, zonder de factor 2 in het linkerlid voorkomen. Uiteraard wordt dan het rechterlid door 2 gedeeld

De waarden $\alpha\ en\ \beta$ zijn dan resp. ωt en pt. De laatste van de vier formules wordt door -1 gedeeld, zodat we samenvattende de volgende formules veel tegen zullen komen.

$$\begin{aligned}\sin\omega t\cos pt&=\tfrac{1}{2}\sin(\omega+p)t+\tfrac{1}{2}\sin(\omega-p)t\\\cos\omega\, t\sin pt&=\tfrac{1}{2}\sin(\omega+p)t-\tfrac{1}{2}\sin(\omega-p)t\\\cos\omega t\cos pt&=\tfrac{1}{2}\cos(\omega+p)t+\tfrac{1}{2}\cos(\omega-p)t\\\sin\omega t\sin pt&=-\tfrac{1}{2}\cos(\omega+p)t+\tfrac{1}{2}\cos(\omega-p)t.\end{aligned}$$

Deze formules herleiden dus een product tot een som, waarbij we er nog op willen wijzen dat deze som altijd bestaat uit een som of verschil van 2 sinussen of 2 cosinussen, dus nooit één sinus en één cosinus.

Voorbeeld 1: Bewijs dat:

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha+\sin 9\alpha=\frac{sin^2 5\alpha}{\sin\alpha}.$$

Bewijs: We vermenigvuldigen beide leden van de vergelijking met $-2\sin\alpha$ en vinden dan:

$$-2sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin 3\alpha-2\sin\alpha\sin 5\alpha-2\sin\alpha\sin 7\alpha-2\sin\alpha\sin 9\alpha=-2sin^2 5\alpha.$$

Passen we nu de formule $-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$ toe, dan vinden we:

$-2sin^2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + \cos 6\alpha - \cos 4\alpha + \cos 8\alpha - \cos 6\alpha + \cos 10\alpha - \cos 8\alpha =$
$= -2\sin^2\alpha - \cos 2\alpha + \cos 10\alpha$, daar:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ vinden we:

$-2sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) + \cos 10\alpha = -1 + \cos 10\alpha = -(1 - \cos 10\alpha)$.

Toepassen van de formule:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

geeft:

$-(1 - \cos 10\alpha) = -2sin^2 5\alpha$, hetgeen we moesten bewijzen.

Voorbeeld 2:

Te bewijzen: $\tan(30° + \alpha)\tan(30° - \alpha) = \frac{2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1}$.

Oplossing: $\tan(30° + \alpha)\tan(30° - \alpha) = \frac{\sin(30° + \alpha)\sin(30° - \alpha)}{\cos(30° + \alpha)\cos(30° - \alpha)} =$

$$= \frac{2\sin(30° + \alpha)\cos(30° - \alpha)}{2\cos(30° + \alpha)\cos(30° - \alpha)} =$$

$$= \frac{\{\cos(30° + \alpha + 30° - \alpha) - \cos(30° + \alpha - 30 + \alpha)\}}{\cos(30° + \alpha + 30° - \alpha) + \cos(30° + \alpha - 30° + \alpha)} =$$

$$= \frac{-\cos 60° + \cos 2\alpha}{\cos 60° + \cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1}{2} + \cos 2\alpha}{\frac{1}{2} + \cos 2\alpha} = \frac{-1 + 2\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha + 1}.$$

Voorbeeld 3:

Te bewijzen: $\frac{2\sin 1\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha + 2\sin\alpha$.

Oplossing: $\frac{2\sin 1\frac{1}{2}\alpha\ \cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\left(1\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\right) + \sin\left(1\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} + \tan\alpha = 2\sin\alpha + \tan\alpha.$$

Ter oefening maken de opgaven 141 t/m 145.
Oplossingen inzenden van de opgaven 146 t/m 150.

17,1. Herleiding van de som of het verschil van twee gelijknamige goniometrische verhoudingen tot een product

In les 16 hebben we uit de optelling en aftrekking van de formules voor $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ en $\cos(\alpha-\beta)$ gevonden de formules:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)&=-2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Stellen we nu $\alpha+\beta=p$ en $\alpha-\beta=q$, dan vinden we:

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta=p & \alpha+\beta=p \\ \underline{\alpha-\beta=q}\ + & \underline{\alpha-\beta=q}\ - \\ 2\alpha=p+q & 2\beta=p-q \\ \\ \alpha=\frac{1}{2}(p+q) & \beta=\frac{1}{2}(p-q). \end{array}$$

Vullen we de waarden voor $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta,\ \alpha$ en β uitgedrukt in p en q, in dan vinden we:

$$\begin{aligned}\sin p+\sin q&=2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\\ \sin p-\sin q&=2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\\ \cos p+\cos q&=2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\\ \cos p-\cos q&=-2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\end{aligned}$$

Deze formules die in de goniometrie bekend staan onder de naam $p.q$-formules of somformules, dienen ter herleiding van de som of het verschil van twee sinussen of twee cosinussen tot een product.

Wij wijzen erop, dat deze formules steeds bestaan uit de som of het verschil van twee dezelfde goniometrische verhoudingen, dus steeds twee sinussen of twee cosinussen. Indien we de som of het verschil van een sinus en een cosinus hebben, dienen we eerst één goniometrische verhouding hiervan te herleiden, bv. de cosinus tot een sinus of de sinus tot de cosinus, bv:

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\sin\beta&=\cos\alpha+\cos(90°-\beta)=\\ &=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+90°-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-90°+\beta)=\\ &=2\cos\left\{45°+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}\cos\left\{45°-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\}.\end{aligned}$$

Indien we $\cos\alpha$ herleiden, dan vinden we:

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\sin\beta&=\sin(90°-\alpha)+\sin\beta=\\ &=2\sin\tfrac{1}{2}(90°-\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(90°-\alpha-\beta)=\\ &=2\sin\left\{45°-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}\cos\left\{45°-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right\}.\end{aligned}$$

We zien dat de gevonden antwoorden verschillend zijn. Indien we echter de vorm: $\cos\left\{45°+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}$ omwerken, dan vinden we:

$$\begin{aligned}\cos\left\{45°+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}&=\sin\left\{90°-45°+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}=\\ &\sin\left\{45°-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}.\end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat de beide gevonden antwoorden identiek zijn.

Voorbeeld 1: Bereken: $\cos 55° \cos 65° + \cos 65° \cos 175° + \cos 175° \cos 55°$.

Oplossing: $\cos 55° \cos 65° = \frac{1}{2}\cos(55° + 65°) + \frac{1}{2}\cos(55° - 65°) =$
$= \frac{1}{2}\cos 120° + \frac{1}{2}\cos(-10°) = -\frac{1}{2}\cos 60° + \frac{1}{2}\cos 10° =$
$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 10°$.

$\cos 65° \cos 175° = \frac{1}{2}\cos(65° + 175°) + \frac{1}{2}\cos(65° - 175°) =$
$= \frac{1}{2}\cos 240° + \frac{1}{2}\cos -110° = -\frac{1}{2}\cos 60° + \frac{1}{2}\cos 110° =$
$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 70°$.

$\cos 175° \cos 55° = \frac{1}{2}\cos(175° + 55°) + \frac{1}{2}\cos(175° - 55°) =$
$= \frac{1}{2}\cos 230° + \frac{1}{2}\cos 120° = -\frac{1}{2}\cos 50° - \frac{1}{2}\cos 60° =$
$= -\frac{1}{2}\cos 50° - \frac{1}{4}$.

Samengevat vinden we dus, dat: $\cos 55° \cos 65° + \cos 65° \cos 175° + \cos 175° \cos 55° =$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 10° - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 70° - \frac{1}{2}\cos 50° - \frac{1}{4} =$$
$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10° - \frac{1}{2}(\cos 70° + \cos 50°) =$$
$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10° - \frac{1}{2}\left\{2\cos\tfrac{1}{2}(70° + 50°)\cos\tfrac{1}{2}(70° - 50°)\right\} =$$
$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10° - \cos 60° \cos 10° =$$
$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10° - \frac{1}{2}\cos 10° = -\frac{3}{4}.$$

Voorbeeld 2: Te bewijzen: $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \tan 4\alpha$

Oplossing: Toepassing van de p, q-formules geeft:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha + 3\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha - 3\alpha) + 2\sin\frac{1}{2}(5\alpha + 7\alpha)\cos\frac{1}{2}(5\alpha - 7\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha + 3\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha - 3\alpha) + 2\cos\frac{1}{2}(5\alpha + 7\alpha)\cos\frac{1}{2}(5\alpha - 7\alpha)} =$$

$= \frac{\sin 2\alpha \cos -\alpha + \sin 6\alpha \cos -\alpha}{\cos 2\alpha \cos -\alpha + \cos 6\alpha \cos -\alpha}$. Delen door $-\alpha$ geeft:

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(2\alpha + 6\alpha)\cos\frac{1}{2}(2\alpha - 6\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(2\alpha + 6\alpha)\cos\frac{1}{2}(2\alpha - 6\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha \cos -2\alpha}{\cos 4\alpha \cos -2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \tan 4\alpha.$$

Voorbeeld 3: Te bewijzen: $\tan(\alpha + 45°) + \tan(\alpha - 45°) = 2\tan 2\alpha$.

Bewijs: $\tan(\alpha + 45°) + \tan(\alpha - 45°) = \frac{\tan\alpha + \tan 45°}{1 - \tan\alpha\tan 45°} + \frac{\tan\alpha - \tan 45°}{1 + \tan\alpha\tan 45°}$,
en daar $\tan 45° = 1$ volgt hieruit:

$$\frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} + \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{1 + 2\tan\alpha + tan^2\alpha - 1 + 2\tan\alpha - tan^2\alpha}{1 - tan^2\alpha} =$$
$$= \frac{4\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha} = 2\frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha} = 2\tan 2\alpha$$

Ter oefening maken de opgaven 151 t/m 155.
Oplossingen inzenden van de opgaven 156 t/m 160.

18.1. Goniometrische identiteiten met voorwaardevergelijking

De voorwaarde die bij een bepaalde identiteit gesteld kan worden geeft meestal een bepaalde betrekking tussen de hoeken die in de identiteit voorkomen. Meestal zal die voorwaarde luiden, dat de hoeken van de identiteit de hoeken van een driehoek voorstellen, zodat dan geldt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Er zijn natuurlijk andere voorwaarden mogelijk, doch meestal heeft de opgave betrekking op de hoeken van een driehoek.

Voorbeeld 1:

Te bewijzen: $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$, indien α, β en γ de hoeken van een driehoek zijn.

Bewijs: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dus $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Hieruit volgt: $\sin\gamma = \sin\{180 - (\alpha + \beta)\} = \sin(\alpha + \beta)$.

Verder is: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, zodat:

$$\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta).$$

We zien nu dat in de opgave voorkomt:

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\ en\ \sin(\alpha + \beta),$$

dus het dubbele van de eerste hoek. Werk dus niet $\sin(\alpha + \beta)$ uit als $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, doch pas de halve hoekformule toe, zodat:

$$\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Ingevuld geeft dit:

$$2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left\{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\}.$$

De vorm tussen accolades kunnen we uitwerken met de p, q-formules.

Aldus:

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\}\cos\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta.$$

We hadden ook de vorm als volgt uit kunnen werken:

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$$

$$= \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta - \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta.$$

De cursist kan zelf uitkiezen welke methode men prefereert.

We hebben dus nu gevonden:

$$2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left\{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} =$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left\{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\right\} =$$

$$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta.$$

Daar $\alpha + \beta = 180° - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, zodat:

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = \sin\frac{1}{2}\gamma.$$

Ingevuld geeft:

$$4\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{3}\beta =$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma.$$

We zien dat we bij deze opgaven praktisch alle goniometrische formules, die we uit het hoofd moeten leren, nodig hebben.

We zien dat we een som van goniometrische verhoudingen omgezet hebben tot een product. Bij de logaritmen die we later zullen behandelen, is het meestal noodzakelijk met producten te werken.

<u>Voorbeeld 2:</u> Herleid de vorm $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ als \ \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

<u>Oplossing:</u> $\cos\gamma = \cos\{180° - (\alpha + \beta)\} = -\cos(\alpha + \beta)$.

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, zodat:

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

Met behulp van de formule $cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ vinden we:

$$\cos(\alpha + \beta) = 2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1.$$

Ingevuld geeft dit:

$$2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \left\{2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1\right\} =$$
$$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - 2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left\{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right\} + 1 =$$
$$=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left\{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\right\} + 1$$
$$= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left\{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\right\} + 1 =$$
$$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + 1.$$

Nu is: $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos\frac{1}{2}(180° - \gamma) = \cos\left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = \sin\frac{1}{2}\gamma$, zodat:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + 1.$$

<u>Voorbeeld 3:</u> Te bewijzen: $\tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha\tan\gamma + \tan\beta\tan\gamma = 1$ als: $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

<u>Bewijs:</u> $\tan\gamma = \tan\{90° - (\alpha + \beta)\} = \cot(\alpha + \beta)$.

Ingevuld geeft dit: $\tan\alpha\tan\beta + (\tan\alpha + \tan\beta)\tan\gamma =$

$$= \tan\alpha\tan\beta + (\tan\alpha + \tan\beta).\cot(\alpha + \beta) =$$
$$= \tan\alpha\tan\beta + \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha + \beta)} = \tan\alpha\tan\beta + \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}} =$$
$$= \tan\alpha\tan\beta + 1 - \tan\alpha\tan\beta = 1.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven 161 t/m 167.

19,1. De trigoniometrie

Tot nu toe hebben we steeds gesproken over rechthoekige driehoeken.
Om nu uit de gegeven elementen van een scheefhoekige driehoek de overige elementen van die driehoek te berekenen, zullen we een aantal belangrijke stellingen afleiden.

(Deze afleidingen kunnen zowel op het schriftelijke gedeelte als op het mondelinge gedeelte van het examen gevraagd worden.)

Als eerste leiden we af:

De sinusregel. Deze luidt:

In een driehoek zijn de zijden evenredig met de sinussen van de overstaande hoeken.

In formulevorm:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Afleiding (zie figuur 19,1.):

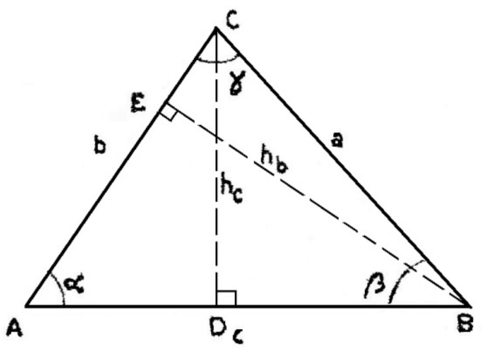


Fig. 19,1.

In $\Delta\,ABC$ is CD de hoogtelijn op AB en BE de hoogtelijn op AC. In de rechthoekige driehoek $\Delta\,ACD$ geldt: $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ of: $h_c = b\sin\alpha$. In de rechthoekige driehoek $\Delta\,BCD$ geldt: $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ of: $h_c = a\sin\beta$, zodat: $b\sin\alpha = a\sin\beta$.

Delen we beide leden van deze vergelijking door $\sin\alpha\sin\beta$, dan vinden we: $\frac{b\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$ of: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. uit de rechthoekige driehoeken $\Delta\,ABE\ en\ \Delta\,CBE$ volgt: $\sin\alpha = \frac{h_c}{c}$ dus: $h_b = c\sin\alpha$ en $\sin\gamma = \frac{h_b}{a}$ dus: $h_b = a\sin\gamma$, zodat: $c\sin\alpha = a\sin\gamma$.

Delen door $\sin\alpha\sin\gamma$ geeft: $\frac{c\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$, zodat: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

We hadden al bewezen dat: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, zodat we samenvattende vinden:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

We zien dus uit de sinusregel dat de verhouding van een zijde tot de sinus van de overstaande hoek een constante waarde is. We zullen deze constante waarde bepalen (zie fig. 19,2).

Voor $\Delta\,ABC$ geldt dus:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

De straal van de omschreven cirkel van $\Delta\,ABC$ nemen we R. We trekken nu vanuit een van de hoekpunten van $\Delta\,ABC$ een lijn door het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

In fig. 19,2 is vanuit A de middellijn getrokken. Deze snijdt de cirkel in het punt D.
We verbinden nu D met een der beide andere hoekpunten van $\Delta\,ABC$, in fig. 19,2 met het hoekpunt C.

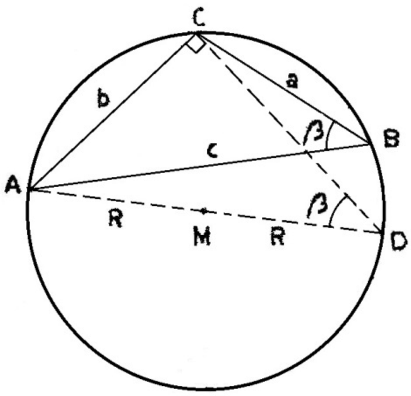


Fig. 19,2.

Nu is $\Delta\, ADC$ rechthoekig in C. Immers in de meetkunde hebben we de volgende stelling geleerd:

Een omtrekshoek is gelijk aan de halve boog waarop hij staat.

$\angle\, ACD$ staat op een boog van 180° is dus gelijk aan 90°. Verder volgt uit deze zelfde stelling, dat $\angle\, CBA = \angle\, CDA$ (beide hoeken staan op dezelfde boog AC).

Dus $\angle\, CDA = \angle\, \beta$.

In de rechthoekige driehoek ACD is dan:

$\sin\beta = \frac{AC}{AD} = \frac{b}{2R}$ of: $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$.

Zodat geldt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$ De sinusregel.

Met behulp van deze formule bestaat nu de mogelijkheid om een zijde van een driehoek uit te drukken in een goniometrische verhouding van een hoek, vermenigvuldigd met 2 × de straal van de omgeschreven cirkel.

We kunnen dus schrijven:

$$a = 2R\sin\alpha$$
$$b = 2R\sin\beta$$
$$c = 2R\sin\gamma$$

Indien we bij een opgave die zowel zijden als goniometrische verhoudingen bevat, deze opgave moeten oplossen of uitrekenen, kunnen we met bovenstaande formules de zijden vervangen door goniometrische verhoudingen.

We dienen er echter op te letten dat dan de waarde R in de opgave komt. Voordat we dan ook de bovenstaande formules toepassen, overtuigen we ons er eerst van of de waarde R uit de opgave verdwijnt. Ook is het mogelijk dat R gegeven is. indien een dezer beide gevallen niet voorkomt, zullen we deze formules niet toepassen.

Voorbeeld:

Bewijs dat een driehoek gelijkbenig is als $a\cos\beta = b\cos\alpha$.

Bewijs:

$a = 2R\sin\alpha$; $b = 2R\sin\beta$.

Ingevuld geeft dit:

$$2R\sin\alpha\cos\beta = 2R\sin\beta\cos\alpha.$$

Delen door $2R$ geeft:

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin\beta\cos\alpha \quad \text{of:} \quad \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = 0,$$

waaruit volgt:

$$\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Als $\sin(\alpha-\beta) = 0$, dan is $\alpha - \beta = 0$ of 180° of een veelvoud van 180°.
Dit laatste is niet mogelijk, daar α dan groter dan 180° is en dit is in een driehoek niet mogelijk.

Uit $\alpha - \beta = 0$ volgt: $\alpha = \beta$. Dus de driehoek is gelijkbenig.

Ter oefening maken de opgaven 168 t/m 172.
Oplossingen inzenden van de opgaven 173 t/m 178.

20,1. De cosinusregel

De cosinusregel luidt:

In een driehoek is het kwadraat van een zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden, verminderd met het dubbele product van deze zijden maal de cosinus van de hoek ingesloten door die zijden.

In formule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

We bewijzen deze formules eerst voor een scherphoekige driehoek (zie fig. 20,1).

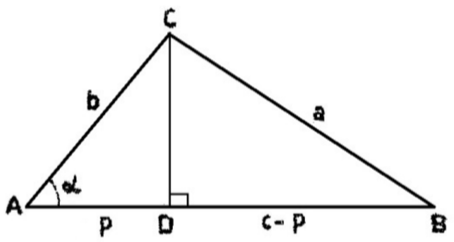


Fig. 20,1.

CD is de hoogtelijn in $\Delta\, ABC$. We stellen het lijnstuk $AD = p$, dan is BD gelijk aan $c - p$. We passen de stelling van Pythagoras toe in de rechthoekige driehoek ACD en BCD en vinden dan: ${h_c}^2 = b^2 - p^2$ en ${h_c}^2 = a^2 - (c-p)^2$. Hieruit volgt: $b^2 - p^2 = a^2 - (c-p)^2$.
Uitwerken geeft:
$b^2 - p^2 = a^2 - c^2 + 2pc - p^2$ of:
$b^2 = a^2 - c^2 + 2pc$.

Uit $\Delta\, ACD$ volgt verder:
$\cos\alpha = \frac{p}{b}$ $\quad of \quad$ $p = b\cos\alpha$.
De waarde van p ingevuld geeft:

$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha$ of: $\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

De formules voor b^2 en c^2 leiden we op dezelfde manier af door met de andere hoogtelijnen te werken.

Opmerking: Indien $\Delta\, ABC$ bv. rechthoekig is in A, dus 90°, dan vinden we:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90°$.
Daar $90° = 0$ is dan $a^2 = b^2 + c^2$. Hiermee gaat de cosinusregel over in de stelling van Pythagoras.

20,2. De cosinusregel voor het geval dat een der hoeken stomp is

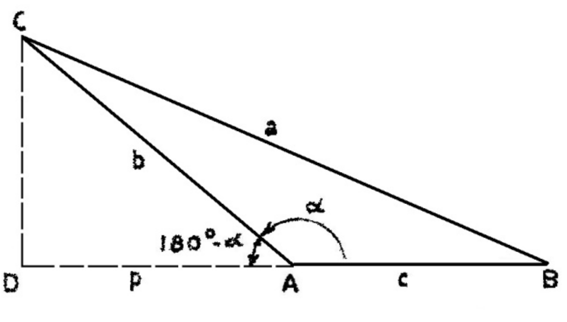


Fig. 20,2.

Stel, dat de hoek α stomp is (zie fig. 20,2).
Verder is CD de hoogtelijn op AB.
Passen we nu in de driehoeken BCD en ADC de stelling van Pythagoras toe, dan vinden we resp.: $CD^2 = a^2 - (c+p)^2$ en $CD^2 = b^2 - p^2$, zodat:
$a^2 - (c+p)^2 = b^2 - p^2$ of:
$a^2 - c^2 - 2pc - p^2 = b^2 - p^2$,
dus: $a^2 - c^2 - 2pc = b^2$.

In $\Delta\, ACD$ is: $\cos(180° - \alpha) = \frac{AD}{AC} = \frac{p}{b}$,
dus: $p = b\cos(180° - \alpha)$.

Ingevuld geeft dit:

$$a^2 - c^2 - 2bc\,(\cos 180° - \alpha) = b^2 \quad \text{of:}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,(\cos 180° - \alpha).$$

We weten nu dat: $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, zodat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$$

Dit is dus dezelfde formule als we in 20,1 afgeleid hebben. We moeten er nu echter rekening mee houden dat de hoek α groter is dan 90°. Bij berekeningen verkrijgen we dus de cosinus van een hoek gelegen in het 2e kwadrant, waarvan de cosinus weer omgerekend moet worden.

We hebben dus gevonden:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \end{aligned}$$

De cosinusregel

Voorbeeld 1:

Bewijs, dat voor iedere driehoek geldt:

$$(a^2 + b^2 - c^2)\tan\gamma = 4.O,$$

waarin O het oppervlak van de driehoek is.

Bewijs:

We weten uit de cosinusregel dat:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

en vullen deze waarde voor c^2 in:

$$(a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab\ \cos\gamma)\tan\gamma = 2ab\cos\gamma\tan\gamma =$$
$$= 2ab\ \cos\gamma\,\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = 2ab\ \sin\gamma.$$

We weten dat voor het oppervlak van een driehoek geldt: het oppervlak van een driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden maal de sinus van de ingesloten hoek.

Dus:

$$O = \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma.$$

Hieruit volgt:

$4.O = 2ab\ \sin\gamma$, en dit is juist de uitdrukking die we voor het linkerlid hebben gevonden.

Voorbeeld 2:

Bewijs, dat een driehoek gelijkbenig is als:

$$a^2 = 2bc(1 - \cos\alpha).$$

Bewijs:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha.$$

Dus:

$$b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha = 2bc(1 - \cos\alpha).$$
$$b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha = 2bc - 2bc\ \cos\alpha.$$
$$b^2 + c^2 = 2bc \quad \text{of:} \quad b^2 - 2bc + c^2 = 0,$$

dus:

$$(b - c)^2 = 0$$

Hieruit volgt $b = c$, dus de driehoek is gelijkbenig.

Ter oefening maken de opgaven 179 t/m 183.
Oplossingen inzenden van de opgaven 184 t/m 189.

21,1. De tangensregel

De tangensregel luidt:

In een driehoek staat de som van twee zijden tot het verschil van die zijden, als de tangens van de halve som der overstaande hoeken tot de tangens van het halve verschil van die hoeken.

In formule:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

In les 19 hebben we geleerd dat $a = 2R\sin\alpha$ en $b = 2R\sin\beta$,
zodat:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta}{2R\sin\alpha - 2R\sin\beta} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}.$$

Nu is: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

en $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

zodat: $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta),} =$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

dus: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Indien de zijde b groter is dan de zijden a, dan wordt de noemer van het linkerlid negatief. Dan is echter ook $\angle\beta > \angle\alpha$, zodat ook het rechterlid negatief wordt. We kunnen dan schrijven:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{tan\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{tan\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}.$$

Voor de andere zijden geldt dus:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} \quad \text{en} \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}.$$

21,2. Cyclische verwisseling

Bij de cosinusregel en bij de tangensregel hebben we gezien dat we bij beide 3 formules moeten onthouden.

We kunnen echter volstaan met het uit het hoofd leren van 1 formule en de andere 2 uit deze formule af te leiden met behulp van de zogenaamde cyclische verwisseling.

Onder cyclische verwisseling verstaan we:

een verwisseling, waarbij a overgaat in b, b in c en c in a, terwijl tegelijkertijd α overgaat in β, β in γ en γ in α. zo volgt uit de formule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

door cyclische verwisseling:

R.T.

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta$$

en hieruit weer:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma.$$

Doen we het met de laatste formule nogmaals, dan vinden we:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

dus de oorspronkelijke formule.

Zo vinden we uit: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$

Door cyclische verwisseling:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} \text{ en hieruit:}$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}.$$

We zullen deze les met enige uitgewerkte voorbeelden besluiten:

<u>Voorbeeld1:</u>

Bewijs: $\dfrac{sin^2\frac{1}{2}\alpha}{sin^2\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{a\tan\frac{1}{2}\alpha}{b\tan\frac{1}{2}\beta}.$

<u>Bewijs:</u> Voeren we voor $a\ en\ b$ resp. in de waarden $2R\ \sin\alpha\ en\ 2R\ \sin\beta$, dan vinden we ui het rechterlid:

$$\frac{a\tan\frac{1}{2}\alpha}{b\tan\frac{1}{2}\beta} = \frac{2R\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\alpha}{2R\sin\beta\tan\frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\alpha}{\sin\beta\tan\frac{1}{2}\beta} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha\ .\ \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}}{2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta\ .\ \frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}} = \frac{sin^2\frac{1}{2}\alpha}{sin^2\frac{1}{2}\beta}\ .$$

<u>Voorbeeld 3:</u> Bewijs dat voor iedere driehoek geldt: $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$.

<u>Bewijs:</u> Toepassing van de sinusregel op het linkerlid geeft:

$$\frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta}{2R\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Nu is $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, zodat: $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$.

$\alpha, \beta\ en\ \gamma$ zijn de hoeken van een driehoek, dus is $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ en $\alpha+\beta = 180° - \gamma$.
Dan is: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Hieruit volgt dat:

$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = \cos\frac{1}{2}\gamma$. Vullen we dit in , dan vinden we:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Wat we moesten bewijzen.

Ter oefening maken de opgaven 190 t/m 194.
Oplossingen inzenden van de opgaven 195 t/m 199.

HILVERSUM

22.1. Overzicht van de goniometrische en trigoniometrische formules

In de voorgaande lessen zijn alle formules, die men van de goniometrie en de trigoniometrie moet kennen, behandeld. In deze les geven we een samenvatting van alle formules met hun afleidingen, zoals dit vereist is voor het examen radiotechnicus.

1.

$$\text{sinus } \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{cosinus } \alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{tangens } \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

2.

$$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cot\alpha(90-\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha \qquad \sec\alpha(90-\alpha) = \csc\alpha$$
$$\tan\alpha(90-\alpha) = \cot\alpha \qquad \csc\alpha(90-\alpha) = \sec\alpha$$

(Af te leiden uit een rechthoekige driehoek).

3. $\sin^2 + \cos^2\alpha = 1$ (af te leiden uit de stelling van Pythagoras).
Delen door $\sin^2\alpha$ geeft: $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$.
Delen door $\cos^2\alpha$ geeft: $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$.

4.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta \quad (a)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta \quad (\text{b})$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta \quad (\text{c})$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta \quad (\text{d})$$

(Deze formules alle uit het hoofd te leren).

Deling van de formule (4a) door (4c) geeft:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}.$$

Teller en noemer delen door $\cos\alpha\cos\beta$ geeft:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\,.$$

Indien we formule (4b) delen door (4d) vinden we op soortgelijke wijze:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\ \tan\beta}\,.$$

5. a. Vervang in formule (4a) β door α, dan is:

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \text{ of:}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

b. Vervang in formule (4c) β door α, dan is:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \text{ of:}$$
$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha.$$

Met behulp van $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$ vinden we nog: $\cos 2\,\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ (5a)
en met $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ vinden we:

Uit (5a) volgt: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Uit (5b) volgt: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

Delen we deze formules op elkaar, dan is:

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

Vervang in $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ β door α, dan is:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

6. Formule (4a) + formule (4b) geeft: $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.
   Formule (4a) – formule (4b) geeft: $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$.
   Uit de formules (4c) en (4d) volgt idem:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta).$$

   (Opmerking: dit zijn belangrijke formules voor de techniek.)

7. Stellen we in de formules onder 4 genoemd voor $(\alpha+\beta) = p$ en voor $(\alpha-\beta) = q$ en lossen we α *en* β hieruit op als volgt:

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta = p & \alpha+\beta = p \\ \underline{\alpha-\beta = q}\ + & \underline{\alpha-\beta = q}\ - \\ 2\alpha = p+q & 2\beta = p-q \\ \alpha = \frac{1}{2}(p+q) & \beta = \frac{1}{2}(p-q). \end{array}$$

dan vinden we:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$

8. <u>Sinusregel:</u> $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

   Te bewijzen met behulp van een figuur. Hieruit volgt:

$$a = 2R\sin\alpha$$
$$b = 2R\sin\beta$$
$$c = 2R\sin\gamma$$

9. <u>Cosinusregel:</u> Te bewijzen met een figuur (2 × stelling van Pythagoras).

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \end{array}\right\}$$ (met cyclische verwisseling).

10. <u>Tangensregel:</u> Te bewijzen met behulp van de sinusregel en de formule onder 7 genoemd.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}. \\ \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}. \\ \dfrac{c+a}{c-a} = \dfrac{tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}{tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}. \end{array}\right\}$$ (met cyclische verwisseling).

Oplossingen inzenden van de opgaven 200 t/m 209.