R.T.

Inhoud Algebra. Nadruk verboden

HILVERSUM

R.T.

Inhoud Algebra. Nadruk verboden

HILVERSUM

R.T.

Inhoud Algebra. Nadruk verboden

HILVERSUM

R.T.

1,1. Inleiding

In de rekenkunde worden de getallen voorgesteld door cijfers, in de algebra echter meestal door letters. Deze letters kunnen dan iedere willekeurige waarde aannemen, maar een letter behoudt in een opgave de eenmaal hiervoor aangenomen of gegeven waarde. Stellen de letters a en b twee getallen voor, dan stelt men hun som voor door $a + b$ en hun verschil door $a - b$. Vormen die bestaan uit delen verbonden door $+$ en $-$ tekens algebraïsche vormen, de delen heten de termen van de algebraïsche vorm. Bestaat een vorm uit twee termen dan noemen we de vorm een tweeterm, bestaat hij uit drie termen, een drieterm. Bevat een algebraïsche vorm meer dan drie termen, dan spreken we gewoonlijk over een veelterm. Zo is $a + b$ een tweeterm, $a + b - c$ een drieterm, $a - b + c - d + e$ een vijfterm of liever een veelterm.

Het product wordt voorgesteld door tussen de letters een maalteken ($\times$), een maalpunt of geheel niets te plaatsen, dus $a \times b$ of $a\,.\,b$ of ab. De getallen die we moeten vermenigvuldigen heten de factoren van het product. Wil men bijvoorbeeld het oppervlak van een rechthoek algebraïsch voorstellen, dus algebraïsch opschrijven dat het oppervlak gelijk is aan het product van lengte en breedte, dan voert men hiervoor letters in, bijvoorbeeld:
l is de lengte van de rechthoek,
b is de breedte van de rechthoek,
O is het oppervlak van de rechthoek,
dan geldt dat $o = l \times b$.
Deze uitdrukking heet een vergelijking. Het feit, dat het oppervlak van iedere rechthoek gevonden kan worden door de lengte met de breedte te vermenigvuldigen wordt in de algebra dus aangegeven door twee letters te gebruiken. Welke letters men gebruikt, is onbelangrijk. Evengoed had men de lengte aan kunnen geven met de letter a en de breedte met de letter b, zodat geldt $O = ab$. Bij algebraïsche vraagstukken mogen we gebruik maken van alle letters van het alfabet. Het is echter gewoonte om de letters x, y en z te gebruiken voor onbekende elementen, de letters a, b en c enz. voor bekende elementen. De letters kunnen zowel positieve als negatieve getallen voorstellen, hetgeen dan echter afzonderlijk gegeven moet worden.

Bestaat een product uit een aantal dezelfde factoren dan is het mogelijk dit korter op te schrijven met behulp van de machten. Zo kan voor $a.a.a.a$ geschreven worden a^4 (spreek uit a tot de vierde).
a^4 heet dan een macht, a is het grondtal en 4 de exponent.
Een macht is de vereenvoudigde schrijfwijze voor een product van een aantal gelijke factoren.
Het getal dat het aantal gelijke factoren aanwijst, heet de exponent van de macht. Schrijven we het getal a, dan bedoelen we a^1, deze 1 wordt echter nooit opgeschreven. Verder is:
$a.a = a^2$ (spreek uit a kwadraat);
$a.a.a = a^3$ (spreek uit a tot de derde);
$a.a.a.a.a = a^5$ (spreek uit a tot de vijfde) enz.
Machten met dezelfde exponent doch met verschillend grondtal heten gelijknamige machten bv. a^7, b^7, c^7, p^7.

Verder komen nog producten voor van een cijferfactor met letterfactoren, bv. $3a, 7pq, 8x$ enz.
Het cijfer dat in een product voorkomt, heet de coëfficiënt of cofactor.
Een coëfficiënt of cofactor is een cijferfactor waarmee een letterfactor of een product van letterfactoren vermenigvuldigd wordt.
Verschillen enkele producten alleen in de coëfficiënt dan heten deze producten gelijksoortig. bv: $3ab, 2ab, 7ab$.

Wanneer twee getallen op elkaar gedeeld worden, heet de uitkomst van de deling het quotiënt.
Het quotiënt van twee getallen a en b wordt aangeduid door een deelteken ÷ of een breukstreep.

$a \div b$ of $\frac{a}{b}$ (spreek uit a gedeeld door b).

De vorm $\frac{a}{b}$ noemen we een breuk; het getal boven de deelstreep, dus hier het getal a heet de teller, het getal onder de deelstreep, hier het getal b, heet de noemer van de breuk.
We dienen er goed op te letten, dat indien een algebraïsche vorm niet bestaat uit door + of − tekens gescheiden, deze vormen altijd eentermen zijn. De vormen $\frac{ab}{pq}$, $\frac{c^2d^3}{e^4f^5}$ zijn dus eentermen; plaatsen we er een plus-teken of min-teken tussen bv.

$\frac{ab}{pq} + \frac{c^2d^3}{e^4f^5}$ dan is het een tweeterm.

Als in een eenterm geen quotiënt voorkomt, of een quotiënt waarvan de noemer geen letterfactor bevat dan heet de eenterm geheel. Is dit wel het geval dan spreken we over een gebroken eenterm.

Zo zijn $\frac{5}{7}abc$; $3pq$ gehele eentermen en $\frac{3ab}{c}$; $\frac{2a^3b^2}{p^2q}$ gebroken eentermen.

Willen we een veelterm als een eenterm beschouwen, dan plaatsen we de veelterm tussen haakjes, zo is $a - b + c - d$ een vierterm, doch $(a - b + c - d)$ een eenterm. Het aantal letterfactoren dat in een gehele eenterm voorkomt, heet dan de graad van de eenterm. Zo is $5abc$ van de derde graad; $2a^2b^5c$ van de achtste graad.
Zijn van een veelterm alle termen van dezelfde graad, dan heet de veelterm homogeen.
De veelterm is dan van dezelfde graad als ieder der eentermen afzonderlijk.
Zo is $a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + 5b^3$, homogeen van de derde graad.
Zijn niet alle eentermen waaruit een veelterm bestaat van dezelfde graad, dan heet de veelterm heterogeen; de graad van de veelterm wordt dan bepaald door de eenterm die de hoogste graad heeft.
Zo is $a^4 - 3a^2 + 7a - 9a^2b^5$ heterogeen van de zevende graad.

Ter oefening maken de opgaven 1 t/m 5.
Oplossingen inzenden van de opgaven 6 t/m 10.

2,1. Volgorde van bewerkingen.

Van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen, gaat het machtsverheffen voor alle andere, dan komt het vermenigvuldigen, daarna het delen en tenslotte het optellen en aftrekken. De laatste twee bewerkingen mogen ook andersom uitgevoerd worden, dus eerst aftrekken en daarna optellen.
Wil men in deze voorgeschreven volgorde een wijziging aanbrengen, dan maken we gebruik van haken (..), accoladen {..} en teksthaken [..].
Zo betekent $a + b \div c - d\ .\ e$ dat het getal a vermeerderd moet worden met het quotiënt van b en c, en dat deze som verminderd moet worden met het product van d en e. Voeren we echter haakjes in bv. $(a + b) \div c - d\ .e$ dan wil dit zeggen dat de som van $a\ en\ b$ gedeeld moet worden door c en van de uitkomst die we dan vinden moet het product $d\ .\ e$ afgetrokken worden.
De volgorde van bewerking is het eenvoudigste te onthouden met behulp van een eenvoudig regeltje, waarvan de hoofdletters de bewerkingen aangeven:
Mijnheer Van Dam Wacht Op Antwoord*.[1]
M = machtsverheffen
V = vermenigvuldigen
D = delen
W = worteltrekken
O = optellen
A = aftrekken

2,2. Positieve en negatieve getallen.

Het voorstellen van getallen door letters is niet het enige kenmerk van de algebra. In de rekenkunde geven de getallen enkel het aantal eenheden aan waaruit ze bestaan. We moeten dan voor dit getal een plus- of een minteken plaatsen om aan te geven of we het getal positief of negatief willen zien.
In de algebra echter kan de letter zowel een positieve als een negatieve grootheid voorstellen.
We rekenen echter met de letter alsof het getal positief is, alleen bij het invullen van een getal vóór de letter hebben we rekening te houden met het positieve of negatieve karakter van de letter.

2,3. Optelling en aftrekking.

De optelling van twee of meer algebraïsche getallen is een bewerking die ons de eenheden, waaruit die getallen bestaan, leert verenigen tot één getal dat de som heet.
Om aan te geven dat men enige algebraïsche getallen bij elkaar op moet tellen, schrijft men ze tussen haakjes met het plusteken tussen de op elkaar volgende getallen:
$(+4) + (-7) + (+5) + (-3) + (+8)$.
We stellen dit eenvoudiger voor door de getallen naast elkaar te schrijven, ieder met zijn eigen teken dus: $+4 - 7 + 5 - 3 + 8$.
We tellen nu eerst alle positieve grootheden bij elkaar en alle negatieve getallen, dus:
$(+4 + 5 + 8) - (7 + 3) = 7$.

[1] *De moderne volgorde, die in de Nederlandse wiskundeschoolboeken beschreven en geoefend wordt, is:
1. haakjes
2. machtsverheffen en worteltrekken
3. vermenigvuldigen en delen
4. optellen en aftrekken

De veranderde gelijkwaardigheid van vermenigvuldigen en delen maakte niet uit voor het ezelsbruggetje omdat dit van oudsher geen aanwijzingen voor gelijkwaardigheid bevatte, ook niet voor de oude gelijkwaardigheid van optellen en aftrekken. (FV)
(bron: Wikipedia)

R.T.

4 Aa Nadruk verboden

De aftrekking is een bewerking die ons een getal (het verschil) leert vinden, dat bij het ene getal (de aftrekker) van twee getallen opgeteld moet worden, om het andere getal (het aftrektal) te vinden.
Dus: aftrektal = aftrekker + verschil
of: aftrektal − aftrekker = verschil.

$18a - 10a = 8a;$ $\quad 25b - 19b = 6b$ $\quad 5ac - 2ac = 3ac.$

Om aan te geven dat men twee getallen moet aftrekken schrijft men het aftrektal en de aftrekker tussen haakjes met het minteken tussen beide.

$$(+a) - (+b).$$

Nu is het verschil van twee getallen gelijk aan het aftrektal $(+a)$ vermeerderd met het tegengestelde van de aftrekker $(+b)$ dus $(+a) - (+b) = +a - b$, want voegen we $+a - b$ bij de aftrekker $+b$ dan krijgen we: $+b + (+a - b) = +b + a - b = +a$, dus het aftrektal. We kunnen een en ander als volgt onthouden: Aftrekken is optellen met tegengesteld teken.
We kunnen de aftrekker onder het aftrektal plaatsen en dan de aftrekking verrichten, dus:

$$\begin{array}{llll} +6\text{a} & +8a & -16b & -15c \\ \underline{+5a}\ \_ & \underline{-5a}\ \_ & \underline{-\ 8b}\ \_ & \underline{-\ 8b}\ \_ \\ \quad a & +13a & -\ 8b & -\ 20c \end{array}$$

Bekijk deze voorbeelden goed aan de hand van bovengenoemde regel.
We kunnen dit ook uitbreiden tot de veeltermen.

$$\begin{array}{ll} 3a - 2b + 5c\ - 3d & \quad 15p - 3q + 7c\ - 8d \\ \underline{2a + 3b - 4c +\ 8d\ -} & \underline{-12p + 4q - 8c\ - 9d\ -} \\ \ a\ - 5b\ + 9c - 11d & \quad 27p - 7q + 15c +\ d \end{array}$$

Deze bewerkingen kunnen ook als volgt uitgevoerd worden:
$(3a - 2b + 5c\ - 3d) - (2a + 3b - 4c +\ 8d)$.
We willen nu de haakjes weglaten waarbij we goed op het volgende moeten letten:

<u>Staat er voor het haakje een + -teken dan mogen de haakjes zonder meer weggelaten worden. Staat er echter een − -teken voor, dan moeten alle tekens tussen de haakjes tegengesteld genomen worden.</u>

Dus: $3a - 2b + 5c - 3d - 2a - 3b + 4c - 8d.$
We nemen nu de gelijksoortige termen bij elkaar:
$3a - 2a - 2b - 3b + 5c + 4c - 3d - 8d =$
$= a - 5b + 9c - 11d.$

Het tweede voorbeeld:
$(15p - 3q + 7c - 8d) - (-12p + 4q - 8c - 9d) =$
$15p - 3q + 7c - 8d + 12p - 4q + 8c + 9d =$
$= 27p - 7q + 15c + d.$

<u>Opmerking</u>: Indien voor een letter geen teken staat vermeld, dan behoort hier een plusteken voor gedacht te worden.

Ter oefening maken de opgaven 11 t/m 15.
Oplossingen inzenden van de opgaven 16 t/m 22.

3,1. Vermenigvuldigen.

Een product verandert niet van waarde als men de factoren verwisselt, dus is $a \times b = b \times a$.
Indien een product uit meer dan twee factoren bestaat, noemen we zo'n product een gedurig product.
Een som wordt met een getal vermenigvuldigd door elke term van de som met dat getal te vermenigvuldigen.

$7(a + b - c) = 7a + 7b - 7c.$

$p(a - b + c - d) = pa - pb + pc - pd.$

Indien we nu positieve en negatieve getallen met elkaar moeten vermenigvuldigen, dienen we op het volgende staatje te letten.

$$\begin{aligned} + \times + &= + \\ - \times - &= + \\ + \times - &= - \\ - \times + &= - \end{aligned}$$

Zo is dus:

$+3 \times +5 = +15; \quad -3 \times -5 = +15; \quad -3 \times +5 = -15; \quad +3 \times -5 = -15.$

We kunnen bovenstaande ook als volgt onthouden.
Een product is positief als beide factoren gelijke tekens hebben en negatief, als ze verschillende tekens hebben.
In de algebra kunnen we twee eentermen met elkaar vermenigvuldigen door bovengenoemde eigenschappen toe te passen.

$-2ab \times +3abc = -6a^2b^2c.$

$-3P^2q \times -4pq^3 = +12P^3q^4.$

Uit deze voorbeelden komt direct een eigenschap van het vermenigvuldigen van twee machten naar voren. Beschouwen we nl. eens $a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$, dan zien we dat het antwoord direct hadden kunnen vinden door de exponenten op te tellen.

Algemeen: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Indien we een gedurig product hebben, waarvan de factoren zowel positief als negatief zijn, gaan we van de uitkomst eerst het teken bepalen.
Daar een product van twee negatieve grootheden een positieve grootheid oplevert, kunnen we eenvoudig het aantal mintekens tellen, is dit aantal even, dan is de uitkomst positief, is dit aantal oneven, dan is de uitkomst negatief.

$-a^2 \times -a^3 \times b^3 \times -c^5 \times -b^4 \times -c^2 \times d^4 = -a^5b^7c^7d^4.$

Vermenigvuldigen we nu een negatieve eenterm met een veelterm dan gaan we wat de tekens betreft hetzelfde te werk.
Nog enige voorbeelden:

$-3a(-2a + 7b - 5c) = +6a^2 - 21ab + 15ac.$

$-(3a - 5c + 8p) = -3a + 5c - 8p.$

$-4(x + y)^5 \times -7(x + y)^8 = +28(x + y)^{13}.$

$-3x^2y(x - y)^4 \,.\, 7xy^3(x - y)^2 \,.\, -2xy(x - y) = +42x^4y^5(x - y)^7.$

3,2. Vermenigvuldigen van twee veeltermen.

Om twee veeltermen met elkaar te vermenigvuldigen splitsen we de vermenigvuldiger in de delen gevormd door de termen en vermenigvuldigen deze termen met het vermenigvuldigtal en tellen de producten op,

bv: $(5a^2 - 7a + 4) \times (3a^2 - 4a + 2).$

$$\begin{array}{rrrrrr} 3a^2 \times (5a^2 - 7a + 4) = & +15a^4 & -21a^3 & +12a^2 & & \\ -4a \times (5a^2 - 7a + 4) = & & -20a^3 & +28a^2 & -16a & \\ +2 \times (5a^2 - 7a + 4) = & & & +10a^2 & -14a & +8 \\ \hline & +15a^4 & -41a^3 & +50a^2 & -30a & +8 \end{array}$$

Gemakshalve schrijven we de vermenigvuldiger onder het vermenigvuldigtal:

$$\begin{array}{l} 5a^2-7a+4 \\ \underline{3a^2-4a+2} \\ 15a^4-21a^3+12a^2 \\ \quad -20a^3+28a^2-16a \\ \underline{\qquad\qquad +10a^2-14a+8} \\ 15a^4-41a^3+50a^2-30a+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2+xy+y^2 \\ \underline{\quad x-y \quad} \\ x^3+x^2y+xy^2 \\ \underline{\quad -x^2y-xy^2-y^3} \\ x^3 \qquad\qquad y^3 \end{array}$$

Indien twee veeltermen met elkaar vermenigvuldigd moeten worden en de termen volgen niet als een afdalende of opklimmende reeks achter elkaar, dan verdient het aanbeveling om fouten te voorkomen, ruimten open te laten voor de termen, die daar behoorden te staan.
We zullen dit met een voorbeeld trachten te verduidelijken.

$$\begin{array}{l} x^4 \qquad -2x^2+x-5 \\ \underline{x^3-3x^2 \qquad +3} \\ x^7 \qquad -2x^5 \; +x^4-5x^3 \\ \quad -3x^6 \qquad +6x^4-3x^3+15x^2 \\ \underline{\qquad\qquad +3x^4 \qquad -6x^2+3x-15} \\ x^7-3x^6-2x^5+10x^4-8x^3+9x^2+3x-15. \end{array}$$

Nog een voorbeeld:

$$\begin{array}{l} x^5 \quad +x^3 \quad -1 \\ \underline{x^4 \quad +x^2-x} \\ x^9 \;\; +x^7 \qquad\qquad -x^4 \\ \quad +x^7 \qquad +x^5 \qquad -x^2 \\ \underline{\qquad -x^6 \qquad -x^4 \qquad +x} \; + \\ x^9+2x^7-x^6+x^5-2x^4-x^2+x \end{array}$$

Uit de voorbeelden blijkt dat de rangschikking zeer belangrijk is. Bij het vermenigvuldigen van twee veeltermen gaan we deze altijd eerst rangschikken naar afdalende of opklimmende machten van een van de letters die hierin voorkomen en daarna pas de vermenigvuldiging uitvoeren.

$(3x^3y^3+2xy^2-5x^4y)(6x^2y-2x^5y-3x^3y^3+2x^4)$

Onder elkaar schrijven en rangschikken naar x:

$$\begin{array}{l} -2x^5y+2x^4-3x^3y^3+6x^2y \\ \underline{-5x^4y+3x^3y^3+2xy^2 \qquad} \\ +10x^9y^2-10x^8y+15x^7y^4-30x^6y^2 \end{array}$$

Nu moeten we gaan vermenigvuldigen met $3x^3y^3$ maar zien dat er geen uitkomst tevoorschijn komt die onder een van de opgeschreven waarden past, alles komt dus achter elkaar te staan. Dit kunnen we dan beter rechtstreeks doen, dus:

$+10x^9y^2-10x^8y+15x^7y^4-30x^6y^2-6x^8y^4+6x^7y^3-9x^6y^6+18x^5y^4-4x^6y^3+$
$+4x^5y^2-6x^4y^5+12x^3y^3.$

Hierna kunnen we gaan onderzoeken of er nog enige termen bij elkaar gevoegd kunnen worden.
Met enige routine zullen we deze laatste methode praktisch altijd toepassen.

Ter oefening maken de opgaven 23 t/m 26.
Oplossingen inzenden van de opgaven 27 t/m 32.

4,1. Machten.

Wanneer een positief getal tot een macht verheven wordt dan is de uitkomst positief ongeacht of de exponent even of oneven is. Wordt echter een negatief getal tot een macht verheven, dan is de uitkomst positief als de exponent een even getal is; de uitkomst is negatief als de exponent een oneven getal is.

$(+a)^4 = a^4 \qquad (+a)^3 = a^3 \qquad (-a)^4 = a^4 \qquad (-a)^3 = -a^3.$

Dit stemt overeen met de afspraak die gemaakt is indien we enige getallen met elkaar moeten vermenigvuldigen. Is nl. bij een vermenigvuldiging het aantal mintekens even, dan is de uitkomst positief, is het aantal mintekens oneven dan is de uitkomst negatief.

Nu is $(-a)^4 = (-a)(-a)(-a)(-a) = +a^4$. (4 mintekens) ; $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$ (3 mintekens).

Wanneer een product tot een macht verheven wordt, moet iedere factor van dat product tot die macht verheven worden. Men dient er goed op te letten, dat een veelterm tot een macht verheven in zijn geheel uitgerekend moet worden, men mag dus niet de enkele termen tot die macht verheffen.
Dus $(a+b)^2$ is niet gelijk aan a^2+b^2.
Wel is echter $(ab)^2 = a^2b^2$.

Staat er tussen haakjes van een vorm die tot een bepaalde macht verheven moet worden een minteken, dan mag dit minteken zonder meer weggelaten worden als de exponent een even getal is.
Is de exponent echter een oneven getal, dan moet er voor de haakjes een minteken geplaatst worden.
Enkele voorbeelden zullen dit verduidelijken:

$(-pqr^2)^6 = (pqr^2)^6 = p^6q^6r^{12}$.
$(-pqr^2)^5 = -(pqr^2)^5 = -p^5q^5r^{10}$.

Uit deze twee voorbeelden komt dadelijk een belangrijke eigenschap naar voren. Deze luidt:
Bij het machtsverheffen vinden we de uitkomst door de exponenten van de factoren mat de exponent van de macht te vermenigvuldigen.

$(a^5)^3 = a^{15} \qquad (a^2)^{10} = a^{20} \qquad (a^4)^5 = a^{20}.$

Algemeen $(a^m)^n = a^{m.n}$

Zoals hiervoor reeds vermeld is, kunnen we een veelterm tot een macht gebracht niet zonder meer uitwerken, deze moet geheel vermenigvuldigd worden. Wat is bv. $(a-b)^3$ en wat $(2p-3q)^2$?

$$\begin{array}{rrrrl}
a & -b & & & \\
\underline{a} & \underline{-b} & & & \times \\
a^2 & -ab & & & \\
 & \underline{-ab} & \underline{+b^2} & & + \\
a^2 & -2ab & +b^2 & & \\
 & \underline{a} & \underline{-b} & & \times \\
a^3 & -2a^2b & +ab^2 & & \\
 & \underline{-a^2b} & \underline{+2ab^2} & \underline{-b^3} & + \\
a^3 & -3a^2b & +3ab^2 & -b^3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl}
2p & -3q & & \\
\underline{2p} & \underline{-3q} & & \\
4p^2 & -6pq & & \\
 & \underline{-6pq} & \underline{+9q^2} & + \\
4p^2 & -12pq & +9q^2 &
\end{array}$$

We zien dat dit zeer veel werk geeft, vooral als de macht hoog is.
We zullen nog een voorbeeld uitwerken nl. $(2p-3q+z)^3$ om dit aan te tonen.

$$\begin{array}{l}
2p - 3q + z \\
\underline{2p - 3q + z} \quad \times \\
4p^2 - 6pq \quad + 2pz \\
\quad - 6pq \qquad\qquad + 9q^2 - 3qz \\
\underline{\qquad\qquad + 2pz \qquad\quad - 3qz + z^2} \; + \\
4p^2 - 12pq + 4pz + 9q^2 - 6qz + z^2 \\
\underline{2p - 3q + z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
8p^3 - 24p^2q + 8p^2z \;\; + 18pq^2 \;\; - 12pqz + 2pz^2 \\
\quad - 12p^2q \qquad\qquad - 36pq^2 \;\; - 12pqz \qquad\quad - 27q^3 \;\; + 18q^2z \; - 3qz^2 \\
\underline{\qquad\qquad + 4p^2z \qquad\qquad\qquad - 12pqz + 4pz^2 \qquad\quad + \;\; 9q^2z - 6qz^2 + z^3} \; + \\
8p^3 - 36p^2q + 12p^2z - 18pq^2 - 36pqz + 6pz^2 - 27q^3 + 27q^2z - 9qz^2 + z^3
\end{array}$$

Wordt een veelterm tot een macht gebracht, dan mogen we alle tekens van de veelterm zonder meer tegengesteld nemen, als de exponent van de macht even is. We moeten een minteken voor de vorm plaatsen indien de exponent van de macht oneven is:

$(a-b)^4 = (-a+b)^4 = (b-a)^4 \qquad (a-b)^3 = -(-a+b)^3 = -(b-a)^3$.
$(a-b)^2(b-a)^6 = (a-b)^2(a-b)^6 = (a-b)^8$.
$(a-b)^2(b-a)^5 = (a-b)^2\{-(a-b)^5\} = -(a-b)^2(a-b)^5 = -(a-b)^7$ of
$(a-b)^2(b-a)^5 = (b-a)^2(b-a)^5 = (b-a)^7$,

Dus moet $(b-a)^7 = -(a-b)^7$, hetgeen ook juist is. Van deze eigenschap wordt vaak gebruik gemaakt om twee veeltermen die slechts in teken verschillen bij elkaar te kunnen voegen.

4,2. Deling.

De deling van twee getallen is een bewerking die ons een getal leert vinden (het quotiënt) dat met het ene getal (de deler) vermenigvuldigd, het andere getal oplevert.
Hieruit volgt dat deler × quotiënt = deeltal. Welke getallen voor deler en deeltal genomen worden, het quotiënt is altijd te bepalen, behalve wanneer de deler gelijk aan nul is. $5 \div 0$ heeft geen zin, omdat er geen getal is te bepalen dat met de deler 0 vermenigvuldigd 5 oplevert.

Is het deeltal gelijk aan nul, dan is het quotiënt eveneens gelijk aan nul.
Zijn zowel teller als noemer aan nul, dan kan het quotiënt elke waarde hebben, daar een getal maal nul altijd nul oplevert. We zeggen dan dat $\frac{0}{0}$ onbepaald is. worden twee eentermen, die zowel positief als negatief zijn op elkaar gedeeld, dan gelden de volgende tekenafspraken:

$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -.$

In woorden: het quotiënt is positief, als deler en deeltal hetzelfde teken- en negatief als ze verschillend teken hebben.
We kunnen echter ook weer de regel nemen die we bij het vermenigvuldigen hebben toegepast en wel:

$\frac{+8}{-2} = -4 \qquad \frac{-14}{-7} = +2 \qquad \frac{-20}{+4} = -5 \qquad \frac{+16}{+} = +4$.

Ter oefening maken de opgaven 33 t/m 35.
Oplossingen inzenden van de opgaven 36 t/m 40.

5,1. Het quotiënt van twee machten van eenzelfde grondtal.

Het quotiënt van twee machten van eenzelfde grondtal is weer een macht van dat grondtal, die tot exponent heeft het verschil van de exponenten.
Een eenvoudig voorbeeld zal dit aantonen.

$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2$ of $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$.

$\frac{(a+b)^{12}}{(a+b)^7} = (a+b)^{12-7} = (a+b)^5$.

Algemeen: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Om het quotiënt van twee algebraïsche eentermen te vinden bepalen we eerst het teken van het quotiënt:

$\frac{-27a^5b^3}{9a^2b} = -3a^3b^2$ $\frac{24a^7b^5}{-6a^3b^2} = -4a^4b^3$.

Wanneer een veelterm door een eenterm gedeeld moet worden, moeten we ieder teken waaruit de veelterm bestaat, delen door die eenterm, daarbij lettend op de tekens die tussen de termen van de veelterm staan, gedeeld door het teken van de eenterm:

$\frac{12p-15q-21r}{-3} = -4p + 5q + 7r$.

$\frac{14a^2b-10ab^3+6a^4b^2-2ab}{-2ab} = -7a + 5b^2 - 3a^3b + 1$.

5,2. Deling van twee veeltermen op elkaar.

Om het quotiënt te bepalen van twee veeltermen dienen we eerst er voor te zorgen, de veeltermen te rangschikken naar afdalende machten. We zullen dit met enige voorbeelden aangeven.

$2a^2 - 7a + 5 /\ 8a^4 - 22a^3 - 11a^2 + 50a - 25 \ \backslash$

We zoeken nu naar een getal dat met $2a^2$ vermenigvuldigd het getal $8a^4$ oplevert, dit is dus $4a^2$.
De gehele deler moet dan met dit getal vermenigvuldigd worden, dus:

$$\begin{array}{l}
2a^2 - 7a + 5 /\ 8a^4 - 22a^3 - 11a^2 + 50a - 25 \ \backslash\ 4a^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{8a^4 - 28a^3 + 20a^2}\ - \\
\qquad\qquad\qquad + 6a^3 - 31a^2 + 50a
\end{array}$$

De met $4a^2$ vermenigvuldigde deler trekken we van het deeltal af. Bij de rest die we dan vinden, halen we de eerstvolgende term van het deeltal erbij. Nu zoeken we naar een getal dat met $2a^2$ vermenigvuldigd $+ 6a^3$ oplevert, dit is het getal $3a$.

$$\begin{array}{l}
2a^2 - 7a + 5 /\ 8a^4 - 22a^3 - 11a^2 + 50a - 25 \ \backslash\ 4a^2 + 3a - 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{8a^4 - 28a^3 + 20a^2} \\
\qquad\qquad\qquad + 6a^3 - 31a^2 + 50a \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ 6a^3 - 21a^2 + 15a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 10a^2 + 35a - 25 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{- 10a^2 + 35a - 25} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

De deling is verder op dezelfde manier doorgezet, dus naar een getal zoeken, dat met $2a^2$ vermenigvuldigd $-10a^2$ oplevert, dit is het getal -5.
De deling komt dan op nul uit, dit noemen we een opgaande deling.
Het quotiënt dat we zochten is nu $4a^2 + 3a - 5$.

Voorbeeld:

$$2x - 3y + 4a / 3x^2 - 8\tfrac{5}{6}xy + 6xz + 6\tfrac{1}{2}y^2 - 8\tfrac{2}{3}yz \backslash \tfrac{3}{2}x - \tfrac{13}{6}y$$

$$\begin{array}{l}
3x^2 - 4\tfrac{1}{2}xy + 6xz \\
\hline
-4\tfrac{1}{3}xy \\
-4\tfrac{1}{3}xy + 6\tfrac{1}{2}y^2 - 8\tfrac{2}{3}yz \\
\hline
0
\end{array}$$

Ook is het mogelijk dat een deling niet opgaat, we houden dan een rest over.

$$a^2 - ab + 3b^3 / 3a^4 - 3a^3b + 18a^2b^2 - 13ab^3 + 24b^4 \backslash 3a^2 + 9b^2$$

$$\begin{array}{l}
\underline{3a^4 - 3a^3b + 9a^2b^2} \\
9a^2b^2 \\
\underline{9a^2b^2 - 9ab^3 + 27b^4} \\
- 4ab^3 - 3b^4
\end{array}$$

Nu is $-4ab^3 - 3b^4$ de rest. We kunnen nu het quotiënt als volgt schrijven:

$$\frac{3a^4 - 3a^3b + 18a^2b^2 - 13ab^3 + 24b^4}{a^2 - ab + 3b^3} = 3a^2 + 9b^2 + \frac{-4ab^3 - 3b^4}{a^2 - ab + 3b^3}$$

of: $3a^2 + 9b^2 - \frac{+4ab^3 - 3b^4}{a^2 - ab + 3b^3}$.

Indien er in de deler of in het deeltal bij de rangschikking naar afdalende machten enkele machten van de rangletter ontbreken, dan laten we voor die ontbrekende termen in het gerangschikte deeltal of deler enige plaatsen over:

$$x^2 + xy + y^2 / x^4 \quad - x^3z \quad - xy^3 \quad + y^3z \backslash x^2 - xy - xz + yx$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4 + x^3y \quad + x^2y^2} \\
- x^3y - x^3z \ - x^2y^2 - xy^3 \\
\underline{- x^3y \quad - x^2y^2 \ - xy^3} \\
- x^3z \\
\underline{- x^3z \quad - x^2yz \quad - xy^2z} \\
- x^2yz \quad - xy^2z \ + y^3z \\
\underline{- x^2yz \quad - xy^2z \ + y^3z} \\
0
\end{array}$$

We zien dat het deeltal gelijkslachtig is of homogeen is van de vierde graad en de letters x, y en z bevat. Indien deze veelterm volledig zou zijn, zouden er nog in moeten voorkomen de termen:

$x^4,\ x^3y,\ x^3z,\ x^2y^2,\ x^2yz,\ x^2z^2,\ xy^3,\ xy^2z,\ xyz^2,\ xz^3,\ y^4,\ y^3z,\ y^2z^2,\ yz^3$ en z^4.

Hieruit kunnen we opmaken welke plaatsen er in het deeltal opengelaten moeten worden.
Daarna voeren we de deling uit zoals hierboven gedaan is.

Ter oefening maken de opgaven 41 t/m 45.
Oplossingen inzenden van de opgaven 46 t/m 50.

R.T.

Algebra, Les 6 Nadruk verboden 11

HILVERSUM

6,1. Merkwaardige producten.

De som van twee getallen vermenigvuldigd met hun verschil, is gelijk aan het kwadraat van de eerste verminderd met het kwadraat van het tweede.

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad -ab-b^2} \\ a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

Dus: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Deze formule die zowel in de wiskunde als in de techniek herhaaldelijk wordt gebruikt, dient goed uit het hoofd geleerd te worden, evenals alle formules die omblokt voor zullen komen.
Voorbeelden:

$(7+5)(7-5)=49-25=24$.
$(7a+5b)(7a-5b)=49a^2-25b^2$.
$(5x^2-3yz)(5x^2+3yz)=25x^4-9y^2z^2$.
$(2p+3q)(-2p+3q)=-(2p^2-9q^2)=-2p^2+9q^2$.
$(-4x^2-3y^2)(4x^2-3y^2)=-(4x^2+3y^2)(4x^2-3y^2)=-(16x^4-9y^4)=-16x^4+9y^4$.

Het kwadraat van een tweeterm is een drieterm, bestaande uit het kwadraat van de eerste term, het dubbele product van beide termen en het kwadraat van de tweede term.

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{\quad -ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Dus: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Voorbeelden:
$(3x+4y)^2=9x^2+24xy+16y^2$.
$(3x-4y)^2=9x^2-24xy+16y^2$.
$(5x-2z)^2=25x^2-20xz+4z^2$.
$(6a+4b)^2=36a^2+48ab+16b^2$.
$(x^4-3y^2)^2=x^8-6x^4y^2+9y^4$.

Passen we deze laatste merkwaardige producten nu eens toe op veeltermen:

$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$.
$(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2=$
$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$.
$(a-b+c)^2=\{a-(b-c)\}^2=a^2-2a(b-c)+(b-c)^2=a^2-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2$.

In woorden:
Het kwadraat van een veelterm is gelijk aan de som van de kwadraten van ieder der termen van de veelterm plus de dubbele producten van de eerste term, met ieder de volgende termen, vermeerderd met de dubbele producten van de tweede term met de daarop volgende enz.

$(a+b+c+d+e)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2ae+2bc+2bd+2be+$
$+2cd+2ce+2de$.
$(2a-3b+c-4d)^2 = 4a^2+9b^2+c^2+16d^2-12ab+4ac-16ad-6bc+24bd-8cd$.

Het product van twee tweetermen, die een term gelijk hebben en waarvan de andere term verschilt, dus bijvoorbeeld $(a+b)(a+c)$ is gelijk aan het kwadraat van de gelijke term, plus de som van de ongelijke termen maal de gelijke, plus het product van de ongelijke termen.

$$(a+b)(a+c) = a^2+(b+c)a+b$$

Voorbeelden:
$(a+5)(a+2) = a^2+7a+10.$
$(a-4)(a-3) = a^2-7a+12.$
$(b-8)(b-6) = b^2-14b+48.$
$(3a+6b)(3a+4b) = 9a^2+30ab+24b^2.$
$(p-7)(p+3) = p^2-4p-21.$

6,2. Toepassingen van de merkwaardige producten.

De vier omblokte merkwaardige producten komen vaak verenigd voor, namelijk indien twee veeltermen met elkaar vermenigvuldigd moeten worden, waarvan één of meer termen gelijk zijn, terwijl de andere termen alleen in teken of coëfficiënt verschillen.

Voorbeeld 1:
$(a+b-c+d-e)(a-b-c-d+e)$.
Om dit product te bepalen zonder beide vormen onder elkaar te plaatsen en uit te vermenigvuldigen, zoeken we eerst de gelijke termen uit beide factoren, die we tot één term verenigen. Daarna nemen we de termen met tegengesteld teken als volgt,

$\{(a-c)+(b+d-e)\}\,\{(a-c)-(b+d-e)\}$ ....(1).
Stellen we in deze vorm $(a-c) = P$ en $(b+d-e) = q$ dan staat er dus $(p+q)(p-q)$ en dit is gelijk aan p^2-q^2 volgens het eerste merkwaardige product van deze les.

Dus is, indien we de waarden van p en q weer invullen in de vorm van (1) gelijk aan:
$(a-c)^2-(b+d-e)^2$. Deze beide kwadraten kunnen we uitrekenen en we vinden als uitkomst:
$a^2-2ac+c^2-(b^2+d^2+e^2+2bd-2be-2de) =$
$= a^2-2ac+c^2-b^2-d^2-c^2-2bd+2be+2de.$

Voorbeeld 2:
$(5a-3b+2c)(5a+3b+2c) = \{(5a+2c)-3b\}\{(5a+2c)+3b\} =$
$= (5a+2c)^2-(3b)^2 = 25a^2+20ac+4c^2-9b^2.$

Voorbeeld 3:
$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(-x-y+z).$
We beschouwen van deze vorm de veeltermen twee aan twee nl:
$\{(y+z)+x\}\{(y+z)-x\}\{(z-y)+x\}\{(z-y)-x\} =$
$= \{(y+z)^2-x^2\}\{(z-y)^2-x^2\} = (y^2+2xy+z^2-x^2)(z^2-2yz+y^2-x^2).$

We zien dus dat het product van vier veeltermen teruggebracht is tot het product van twee veeltermen. Hiervan zoeken we weer de gelijke termen en de tegengestelde termen bij elkaar dus:
$\{(y^2+z^2-x^2)+2yz\}\{(y^2+z^2-x^2)-2yz\} =$
$= (y^2+z^2-x^2)^2-(2yz)^2 =$
$= y^4+z^4+x^4-4y^2z^2+2y^2z^2-2x^2y^2-2x^2z^2 =$
$= y^4+z^4+x^4-2y^2z^2-2x^2y^2-2x^2z^2.$

Ter oefening maken de opgaven 51 t/m 55.
Oplossingen inzenden van de opgaven 56 t/m 60.

7,1. Vervolg van de merkwaardige producten.

$$\begin{array}{l}
a^2 - ab + b^2 \\
\underline{a + b \qquad\qquad} \\
a^3 - a^2b + ab^2 \\
\underline{\quad + a^2b - ab^2 + b^3} \\
a^3 \qquad\qquad\quad + b^3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
a^2 + ab + b^2 \\
\underline{a - b \qquad\qquad} \\
a^3 + a^2b + ab^2 \\
\underline{\quad - a^2b - ab^2 - b^3} \\
a^3 \qquad\qquad\quad - b^3
\end{array}$$

Het product van de drieterm $a^2 - ab + b^2$ met de tweeterm $a + b$ en het product van de drieterm $a^2 + ab + b^2$ met de tweeterm $a - b$, geven een dusdanig kort antwoord dat deze veel voorkomende producten tot de merkwaardige producten worden gerekend.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Indien we deze twee merkwaardige producten goed bekijken, zien we dat zij zeer veel op elkaar lijken, zodat we ze gemakkelijk verwarren. De vormen zijn geheel hetzelfde op enkele tekens na.
Begint de vorm met de som van een tweeterm, dan heeft de drieterm die er mee vermenigvuldigd moet worden een minteken voor het product. (Denk erom het is niet het dubbele product!) De uitkomst is dan de som van de derde machten van de termen der tweeterm. Begint de vorm met het verschil van een tweeterm, dan heeft de drieterm die er mee vermenigvuldigd moet worden een plusteken voor het product. De uitkomst is het verschil van de derde machten van de termen der tweeterm.

Voorbeelden:
$(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) = a^3 - (2b)^3 = a^3 - 8b^3$
$(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a)^3 + (3b)^3 = 8a^3 + 27b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) = (a^6 - b^6).$
$(p^2 + q^2(p^4 - p^2q^2 + q^4) = p^6 + q^6.$

7,2. Machten van een tweeterm.

Om een tweeterm tot een bepaalde macht uit te rekenen, zouden we de tweeterm tot de tweede macht kunnen uitrekenen, de uitkomst vermenigvuldigen met de tweeterm, die uitkomst weer met de tweeterm enz. Totdat we de gevraagde macht hebben uitgerekend. We zullen op deze manier de vorm $(a + b)^5$ uitrekenen:

$$\begin{array}{l}
a + b \\
\underline{a + b} \times \\
a^2 + ab \\
\underline{\quad + ab + b^2} \\
a^2 + 2ab + b^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (a + b)^2 \\
\underline{a + b \qquad\quad} \times \\
a^3 + 2a^2b + \ ab^2 \\
\underline{\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3} \\
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (a + b)^3 \\
\underline{a + b \qquad\qquad\qquad} \times \\
a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 \ + \ ab^3 \\
\underline{\quad + a^3b \ + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4} \\
a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (a + b)^4 \\
\underline{(a + b) \qquad\qquad\qquad\qquad} \times \\
a^5 + 4a^4b + \ 6a^3b^2 \ + \ 4a^2b^3 \ + \ ab^4 \\
\underline{\quad + \ a^4b \ + \ 4a^3b^2 \ + \ 6a^2b^3 \ + 4\,ab^4 + b^5} \\
a^5 + 5\,a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \ \ldots\ldots\ldots \ (a + b)^5
\end{array}$$

Aan deze machten merken we op dat de exponenten van a met 1 afdalen, terwijl die van b met 1 opklimmen, terwijl alle termen het plusteken bezitten. Als we de coëfficiënten der termen zouden weten, zouden we alle termen dus achter elkaar op kunnen schrijven, dus elke macht van $a + b$.
Om die coëfficiënten te bepalen letten we op het volgende: De coëfficiënten van de eerste macht dus van $(a + b)^1$ zijn $1 \ldots\ldots\ldots 1$. Vermenigvuldigen we nu $(a + b)^1$ met zichzelf en schrijven we alleen de coëfficiënten van de vermenigvuldiging op dan vinden we:

$$\begin{array}{ccc l}
1 & 1 & & \text{de coëfficiënten van } a(a+b). \\
\underline{} & \underline{1} & \underline{1} & \text{de coëfficiënten van } b(a+b). \\
1 & 2 & 1 & \text{de coëfficiënten van } (a+b)(a+b).
\end{array}$$

Voor de vorm $(a + b)^3$ moeten we $(a + b)^2(a + b)$ nemen, alleen in coëfficiënten, dus:

$$\begin{array}{cccc l}
1 & 1 & & & \\
\underline{} & \underline{1} & \underline{1} & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
\underline{} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \text{De coëfficiënten van } (a+b)^3.
\end{array}$$

Zo voortgaande vinden we voor de coëfficiënten van:
$(a + b)^4$ 1 . . . . 4 . . . . 6 . . . . 4 . . . . 1. en voor
$(a + b)^5$ 1 . . . . 5 . . . . 10 . . . . 10 . . . . 5 . . . . 1.

Hieruit volgt dat indien we de coëfficiënten van een voorgaande product bij elkaar optellen en we plaatsen voor deze rij van coëfficiënten een 1 en achter die rij een 1, we de coëfficiënten van de termen van een hogere macht vinden, dus:

$$\begin{array}{c l}
1 \smile 1 & \text{coëfficiënten van } (a+b) \\
1 \smile 2 \smile 1 & \text{coëfficiënten van } (a+b)^2 \\
1 \smile 3 \quad 3 \smile 1 & \text{coëfficiënten van } (a+b)^3 \text{ even}
\end{array}$$

<u>7,3.</u> <u>Driehoek van Pascal.</u>

De coëfficiënten van verschillende machten van $(a + b)$ zijn in een figuur vervat, die naar de ontdekker de naam draagt de Driehoek van Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Zo kunnen we verder gaan tot de gevraagde macht gevonden is.
Hieruit volgt dus dat bv. $(a + b)^6$ gelijk is aan:
$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.
(de exponenten van a nemen met 1 af, die van b nemen met 1 toe).
Dit kunnen we controleren. We hadden nl. gevonden:

$$\begin{array}{l}
(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
\qquad\quad \underline{a + b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 \; + \; ab^5 \\
\qquad\quad \underline{\quad + \; a^5b \; + \; 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6} \\
\qquad\quad a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6. \text{ Dit klopt dus inderdaad.}
\end{array}$$

Ter oefening maken de opgaven 61 t/m 65.
Oplossing inzenden van de opgaven 66 t/m 70.

8,1. Toepassingen van de Driehoek van Pascal.

Om dus van een tweeterm een bepaalde macht uit te kunnen rekenen zoeken we eerst de coëfficiënten met behulp van de driehoek van Pascal en laten de exponenten van het eerste getal met 1 afnemen en die van het tweede getal met 1 opklimmen, alle termen verbonden door plustekens.

Voorbeelden:

$(a+3b)^4 = a^4 + 4a^3(3b) + 6a^2(3b)^2 + 4a(3b)^3 + (3b)^4 =$
$\qquad = a^4 + 12a^3b + 54a^2b^2 + 108ab^3 + 81b^4.$
$(x^2+y^2)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2y^2 + 3(x^2)(y^2)^2 + (y^2)^3 = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6.$
$(a^2+bc)^5 = (a^2)^5 + 5(a^2)^4bc + 10(a^2)^3(bc)^2 + 10(a^2)^2(bc)^3 + 5(a^2)(bc)^4 + (bc)^5 =$
$\qquad = a^{10} + 5a^8bc + 10a^6b^2c^2 + 10a^4b^3c^3 + 5a^2b^4c^4 + b^5c^5.$
$(3a+2b)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2 2b + 3(3a)(2b)^2 + (2b)^3 = 27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$

Moeten we nu een verschil van twee termen tot een bepaalde macht uitrekenen, dan bedenken we dat bv. $(a-b)^5 = \{a+(-b)\}^5$. Nu gebruiken we wederom de driehoek van Pascal. In de uitkomst zullen alle termen die een oneven macht van b bevatten negatief worden, alle andere termen worden positief, dus:
$(a-b)^5 = a^5 - 5\,a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$

Hieruit zien we dat de tekens elkaar afwisselen. We kunnen nu ook zeggen, dat bij het bepalen van de macht van het verschil van twee termen, in de uitkomst de tekens elkaar afwisselen, beginnend met een plusteken als de eerste term positief is en beginnend met een minteken als de eerste term negatief is en de exponent van de macht oneven is; is de macht even, dan is het teken van de eerste term altijd positief (immers $(-a+b)^4 = (a-b)^4$).

Voorbeelden:

$(-a+b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^3 + b^3.$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3.$
$(-a+b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$
$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$

De beide vormen $(a+b)^3 en\ (a-b)^3$ komen zo veel voor, dat het aan te bevelen is deze beide vormen uit het hoofd te leren.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Voorbeeld van een veelterm tot een macht.

$(a+b-c)^4 = \{(a+b)-c\}^4 = (a+b)^4 - 4(a+b)^3c + 6(a+b)^2c^2 - 4(a+b)c^3 + c^4 =$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 4c(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + 6\,c^2(a^2 + 2ab + b^2) -$
$4ac^3 - \ 4bc^3 + c^4$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 4a^3c - 12a^2bc - 12ab^2c - 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 +$
$6b^2c^2 - 4ac^3 - 4bc^3 + c^4.$

8,2. Merkwaardige quotiënten.

Er bestaan drie merkwaardige quotiënten, nl:

1. $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ 2. $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b}$ 3. $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b}$

Zij heten merkwaardige quotiënten omdat het opgaande delingen zijn, waarvan we de uitkomsten direct op kunnen schrijven, zonder dat we de delingen uit hoeven te voeren.

Voordat we de delingen zullen bespreken, willen we eerst even enige opmerkingen maken over de exponenten n, 2n en 2n+1, die er in voorkomen.

Wordt in de wiskunde gevraagd: stel een willekeurig geheel getal voor, dan geven we zo'n getal aan door een bepaalde willekeurige letter, dus hier bijvoorbeeld de letter n. Deze n stelt dus ieder geheel getal voor, zowel even als oneven.

Wordt echter gevraagd: stel een even geheel getal voor, dan noemen we dit getal 2n. welke waarde n ook heeft; het product 2n is altijd even.

Wordt gevraagd: een oneven geheel getal voor te stellen, dan bedenken we, dat een even getal plus of min1, altijd oneven is. Aangezien $2n$ altijd een even getal voorstelt, is dus $2n+1$ of $2n-1$ altijd oneven (n kan verder alle gehele waarden aannemen van nul tot oneindig).

Het eerste quotiënt toont, dat het verschil van twee gelijknamige machten deelbaar is door het verschil van de grondtallen.

Nu is: $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a + b$

$$\frac{a^3 - b^3}{a-b} = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{a-b} = a^2 + ab + b^2$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a-b} = \frac{(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}{a-b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

We zien aan deze vormen, dat het quotiënt bestaat uit de som van positieve termen, waarvan de exponenten van het eerste grondtal met 1 afnemen, terwijl die van het tweede grondtal met 1 toenemen.

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

(De drie punten geven aan, dat hier nog een groot aantal termen tussen behoort te staan.)

Uit het tweede quotiënt volgt, dat het verschil van twee gelijknamige even machten deelbaar is door de som van de grondtallen.

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.$$

$$\frac{a^6 - b^6}{a + b} = a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$$

Het quotiënt is weer hetzelfde opgebouwd als in de voorgaande vorm, doch nu met afwisselende tekens.

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = a^{2n-1} - a^{2n-2} + \ldots\ldots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}.$$

Uit het derde quotiënt volgt, dat de som van twee gelijknamige oneven machten deelbaar is door de som van de grondtallen.

$\frac{a^3+b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2.$ $\frac{a^5+b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1} + \ldots\ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}.$$

Ter oefening maken de opgaven Aa, nr. 71 t/m 75.

Oplossingen inzenden van de opgaven Aa, nr. 76 t/m 80.

9,1. Ontbinding in factoren.

Onder het ontbinden in factoren van een veelterm verstaan we het opzoeken van die factoren, waarvan het product de veelterm weer oplevert.

Bij het ontbinden in factoren dient men de in de vorige lessen behandelde merkwaardige producten, indien die voorkomen, direct te herkennen, dus:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$
$a^4 - b^4 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b).$
$a^8 - b^8 = (a^4+b^4)(a^4-b^4) = (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$
$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2-b^2)^2 = \{(a+b)(a-b)\}^2 = (a+b)^2(a-b)^2.$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$
$8a^3 - 27b^3 = (2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2).$

De verdere ontbinding in factoren is tot een aantal methoden samen te voegen.

1^e Indien alle factoren van een veelterm eenzelfde factor bevatten, kunnen we deze factor buiten haakjes halen. Zo kunnen we schrijven:

$pa + pb = p(a+b).$
$20a + 10b - 30c = 10(2a+b-3c).$
$ax - bx + cx = x(a-b+c).$
$ab^2c + 3a^2bc^3 - 4ab^4c^2 = abc(b+3ac-4b^3c).$
$27a^3 - 12ab^2 = 3a(9a^2-4b^2) = 3a(3a-2b)(3a+2b).$
$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c).$
$a^5p - ab^4p = ap(a^4-b^4) = ap(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$
$(a+b)y + (a+b)z = (a+b)(y+z).$

Soms is het niet mogelijk direct uit alle termen van de veelterm een factor buiten haakjes te halen, maar wel uit enkele termen. Zijn de veeltermen die dan overblijven hetzelfde, dan is het weer mogelijk zoals in het laatste voorbeeld hiervoor gedaan is, om deze veelterm in factoren te ontbinden.
$ax + bx + ay + by + a + b$. Deze veelterm kan op twee manieren in factoren ontbonden worden.

1e manier: Voeg de vormen met de factor a bij elkaar en voeg de vormen met de factor b bij elkaar dus:

$a(x+y+1) + b(x+y+1) = (a+b)(x+y+1).$

2e manier: We hadden de termen ook kunnen verenigen in groepen van twee termen, dus:
$x(a+b) + y(a+b) + 1(a+b) = (x+y+1)(a+b).$

Voorbeelden:

$\boldsymbol{a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2} = x^2(a^2-b^2) - y^2(a^2-b^2) = (x^2-y^2)(a^2-b^2) =$
$= (x+y)(x-y)(a+b)(a-b).$
$(\boldsymbol{6abc + 2b + 3c - 3ac - 6bc - 2ab + a - 1}) =$
$= 6bc(a-1) - 3c(a-1) - 2b(a-1) + (a-1) =$
$= (6bc - 3c - 2b + 1)(a-1) = \{(6bc-3c) - (2b-1)\}(a-1) =$
$= \{3c(2b-1) - 1(2b-1)\}(a-1) = (3c-1)(2b-1)(a-1).$

Zoals uit dit laatste voorbeeld blijkt, zal men soms enige tijd moeten zoeken naar de juiste combinatie; men komt vaak door proberen tot een oplossing.

2^e^. Soms is een drieterm in factoren te ontbinden, door toevoeging en aftrekking van een term, waarbij weer gebruik gemaakt wordt van de merkwaardige producten, bv: $a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$. We hebben hier dus de vorm a^2b^2 bijgevoegd om er een volkomen kwadraat van te maken. Hiermee bedoelen we, een van de merkwaardige producten $(a+b)^2$ of $(a-b^2)$.
De bijgevoegde term moet natuurlijk ook weer in mindering worden gebracht, daar ander de opgave niet juist meer zou zijn. We vinden dan een verschil van twee kwadraten, hetgeen weer in factoren ontbonden kan worden, dus:
$(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - (ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$.

Voorbeelden:

$\boldsymbol{x^4 + 7x^2y^2 + 16y^4} = x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 =$
$= (x^2 + 4y^2 + xy)\ (x^4 + 4y^2 - xy)$.

$\boldsymbol{a^4 - 4a^2b^2 + 36b^4} = a^4 + 12a^2b^2 + 36b^4 - 16a^2b^2 = (a^2 + 6b^2)^2 - (4ab)^2 =$
$= (a^2 + 6b^2 + 4ab)(a^2 + 6b^2 - 4ab)$.

$\boldsymbol{p^{16} + p^8q^8 + q^{16}} = p^{16} + 2p^8q^8 + q^{16} - p^8q^8 = (p^8 + q^8)^2 - (p^4q^4)^2 =$
$= (p^8 + q^8 + p^4q^4)\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) = \{(p^8 + 2p^4q^4 + q^8) - p^4q^4\}\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) =$
$= \{(p^4 + q^4)^2 - (p^2q^2)^2\}\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) = (p^4 + q^4 + p^2q^2)\ (p^4 + q^4 - p^2q^2)\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) =$
$= \{(p^4 + 2p^2q^2 + q^4) - p^2q^2\}\ (p^4 + q^4 - p^2q^2)\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) =$
$= \{(p^2 + q^2)^2 - (pq)^2\}\ (p^4 + q^4 - p^2q^2)\ (p^8 + q^8 - p^4q^4) =$
$= (p^2 + q^2 + pq)\ (p^2 + q^2 - pq)\ (p^4 + q^4 - p^2q^2)\ (p^8 + q^8 - p^4q^4)$.

Uit bovenstaand voorbeeld zien we duidelijk in, dat de ontbinding tot het uiterste doorgezet moet worden, hetgeen soms met veel werk gepaard gaat. Hoe meer routine de leerling heeft, des te meer tussenbewerkingen kan hij overslaan.

Inplaats van het bijvoegen van een vorm, waardoor een dubbelproduct wordt verkregen, kunnen we ook de eerste twee termen als de termen van het volkomen kwadraat beschouwen en daarna de vorm completeren. Nemen we nog als voorbeeld de vorm $a^4 + 2a^2b^2 - 24b^4$, dan kunnen we hiervoor schrijven: $\boldsymbol{(a^2 + b^2)^2 - b^4 - 24b^4} =$
$= (a^2 + b^2)^2 - 25b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (5b^2)^2 = (a^2 + b^2 + 5b^2)(a^2 + b^2 - 5b^2) =$
$= (a^2 + 6b^2)\ (a^2 - 4b^2) = (a^2 + 6b^2)(a + 2b)(a - 2b)$.

$\boldsymbol{a^2 + 5a + 6} = \left(a + 2\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(a + 2\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(a + 2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$
$= \left(a + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(a + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (a + 3)\ (a + 2)$.

$\boldsymbol{a^2 + 4ab - 21b^2} = (a + 2b)^2 - 25b^2 = (a + 2b + 5b)\ (a + 2b - 5b) = (a + 7b)\ (a - 3b)$.
$16a^2 - 32ab + 15b^2 = 16(a^2 - 2ab) + 15b^2 = 16\{(a - b)^2 - b^2\} + 15b^2 =$
$= \{4(a - b) + b\}\ \{4(a - b) - b\} = (4a - 4b + b)\ (4a - 4b - b) = (4a - 3b)\ (4a - 5b)$.

Ter oefening maken de opgaven 81 t/m 85.
Oplossingen inzenden van de opgaven 86 t/m 90.

10,1 Ontbinding in factoren (vervolg)

3^e^. Er bestaat nog een andere methode om de vormen in factoren te ontbinden, dan zoals in het laatste gedeelte van les 9 is gedaan. Beschouwen we nogmaals de vorm $a^2 + 5a + 6$. Deze leverde als product op $(a + 2)\ (a + 3)$. Indien we het product $(a + 2)\ (a + 3) = a^2 + 5a + 6$ aandachtig beschouwen, dan zien we dat 5 de som van de getallen 2 en 3 is en 6 het product van deze getallen.
We redeneren nu als volgt:
Een vorm van de gedaante $a^2 + pa + q$ kan in factoren ontbonden worden als we twee getallen kunnen vinden waarvan de som gelijk is aan p en het product gelijk aan q.
Bijvoorbeeld: $a^2 + 7a + 12$. Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan $+7$ en het product gelijk is aan $+12$.
Dit zijn de getallen $+4$ en $+ 3$.
De ontbinding is dan $(a + 4)(a + 3)$.

$a^2 - 7a + 12$. Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan -7 en het product gelijk is aan 12.
Dit zijn de getallen -4 en $- 3$.
De ontbinding is $(a - 4)(a - 3)$.

Voorbeelden:

$\boldsymbol{a^2 - 4a + 3}$ som -4 product $+3$ de getallen zijn -3 en $- 1$.
dus: $a^2 - 4a + 3 = (a - 3)\ (a - 1)$.
$\boldsymbol{a^2 - 3a - 10}$ som -3 product -10 de getallen zijn -5 en $+ 2$
dus: $a^2 - 3a - 10 = (a - 5)\ (a + 2)$.
$\boldsymbol{a^2 - a - 2}$ som -1 product +2 de getallen zijn $-2\ en + 1$
dus $a^2 - a - 2 = (a - 2)\ (a + 1)$.

Van de volgende voorbeelden, waarvan we direct de ontbinding zullen geven, wordt aangeraden, zelf de juistheid hiervan na te gaan.

$a^2 + 3a + 2 = (a + 2)(a + 1)$.	$a^2 - 10a + 16 = (a - 8)(a - 2)$.
$a^2 + 8a + 12 = (a + 6)(a + 2)$.	$a^2 - 10a + 21 = (a - 7)(a - 3)$.
$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$.	$b^2 - 9b + 14 = (b - 2)(b - 7)$.
$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$.	$c^2 - 9c + 18 = (c - 3)(c - 6)$.
$y^2 + 13y + 12 = (y + 1)(y + 12)$.	$y^2 + y - 6 = (y + 3)(y - 2)$.
$p^2 + 2p - 3 = (p + 3)(p - 1)$.	$a^2 - 5a - 14 = (a - 7)(a + 2)$.
$a^2 - 2b - 48 = (a - 8)(a + 6)$.	$c^2 + 4c - 45 = (c + 9)(c - 5)$.

4^e^. De ontbindingen behandeld onder 3^e^ kunnen alleen uitgevoerd worden indien de coëfficiënt van de eerste term (dus de kwadratische) gelijk aan 1 is.
Is deze coëfficiënt niet gelijk aan 1, dan moeten we anders te werk gaan. We beschouwen als voorbeeld de drieterm $2a^2 + 5a + 2$.
We zoeken nu weer twee getallen waarvan de som gelijk is aan 5 maar waarvan het product gelijk is aan het product der uiterste coëfficiënten, dus gelijk aan $2 \times 2 = 4$. Dit zijn de getallen 4 en 1.
Bij de vorige ontbindingen konden we na het vinden van die getallen de factoren direct opschrijven. Hier mag dit niet meer, we gaan nu de middelste term splitsen in twee termen, met de gevonden coëfficiënten als volgt:
$2a^2 + 5a + 2 = 2a^2 + 4a + a + 2$. Welke van de twee gevonden getallen voorop komt te staan, is niet belangrijk, we vinden hetzelfde antwoord.
We nemen de vormen nu twee aan twee bij elkaar:
$2a^2 + 5a + 2 = 2a^2 + 4a + a + 2 = 2a(a + 2) + 1(a + 2) = (2a + 1)(a + 2)$.
Hadden we de gevonden termen andersom geplaatst dan was de ontbinding als volgt gegaan:
$2a^2 + 5a + 2 = 2a^2 + a + 4a + 2 = a(a + 1) + 2(2a + 1) = (a + 2)(2a + 1)$.

Voorbeelden:

$\boldsymbol{5a^2 + 12a + 4}$. Zoek twee getallen waarvan de som 12 is en het product 20.
Die getallen zijn 10 en 2. Splits dan de middelste term en ontbind de vorm.
$5a^2 + 12a + 4 = 5a^2 + 10a + 2a + 4 = 5a(a + 2) + 2(a + 2) = (5a + 2)(a + 2)$.

$\boldsymbol{2a^2 - 11ab - 6b^2}$. Zoek twee getallen, waarvan de som-11 is en het product -12; dit zijn de getallen -12 en $+ 1$, dus:
$2a^2 - 11ab - 6b^2 = 2a^2 - 12ab + ab - 6b^2 = 2a(a - 6b) + b(a - 6b) = (2a + b)(a - 6b)$.

$\boldsymbol{7a^2 - 15ab + 2b^2}$. Zoek twee getallen waarvan de som -15 is en het product $+14$; de getallen zijn -14 en $- 1$ dus:
$7a^2 - 15ab + 2b^2 = 7a^2 - 14ab - ab + 2b^2 = 7a(a - 2b) - b(a - 2b) = (7a - b)(a - 2b)$.

De volgende voorbeelden worden weer rechtstreeks uitgerekend.
$\boldsymbol{4a^2 - 16a + 15} = 4a^2 - 6a - 10a + 15 = 2a(2a - 3) - 5(2a - 3) = (2a - 5)(2a - 3)$.
$\boldsymbol{8p^2 + 10p - 3} = 8p^2 + 12p - 2p - 3 = 4p(2p + 3) - 1(2p + 3) = (4p - 1)(2p + 3)$.
$\boldsymbol{3x^2 + 5x - 2} = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2) = (3x - 1)(x + 2)$.
$\boldsymbol{15a^2 + 2ab - b^2} = 15a^2 + 5ab - 3ab - b^2 = 5a(3a + b) - b(3a + b) = (5a - b)(3a + b)$.

De ontbinding waarvan we er nu enkele zullen behandelen berusten alle op voorgaande methoden. Zij zijn erg moeilijk en het is soms een hele puzzel om deze ontbindingen tot een goed einde te brengen. Het is voor de cursist absoluut noodzakelijk om de ontbindingen in factoren volkomen te beheersen in verband met de zeer vele toepassingen die hiervan gebruikt zullen worden, zowel in de wiskunde als in de techniek.
We beschouwen nu de veelterm:
$\boldsymbol{a^2 + ab - 6b^2 - 4ac + 13bc - 5c^2}$
Rangschik deze veelterm naar a bijvoorbeeld als volgt:
$a^2 + a(b - 4c) - (6b^2 - 13bc + 5c^2)$.
De laatste term $6b^2 - 13bc + 5c^2$ kan nu in factoren ontbonden worden en wel:
$6b^2 - 13bc + 5c^2 = 6b^2 - 10bc - 3bc + 5c^2 = 2b(3b - 5c) - c(3b - 5c) = (2b - c)(3b - 5c)$.
Dus vinden we: $a^2 + a(b - 4c) - (2b - c)(3b - 5c)$.
We trachten nu deze laatste twee factoren zo te rangschikken dat de som van de twee factoren gelijk wordt aan $b - 4c$. Deze factoren zijn dan $3b - 5c$ en $-(2b - c)$.
We krijgen dus:
$a^2 + a(b - 4c) - (2b - c)(3b - 5c) =$
$= a^2 + (3b - 5c)a - (2b - c)a - (2b - c)(3b - 5c) =$
$= a\{a + (3b - 5c)\} - (2b - c)\{a + (3b - 5c)\} =$
$= \{a - (2b - c)\}\{a + (3b - 5c)\} = (a - 2b + c)(a + 3b - 5c)$.
Nog een voorbeeld:
$\boldsymbol{x^2 + 3xy + 7x + 6y + 10} = x^2 + x(3y + 7) + 6y + 10 =$
$= x^2 + x(3y + 7) + 2(3y + 5) = x^2 + (3y + 5)x + 2x + 2(3y + 5) =$
$= x\{x + (3y + 5)\} + 2\{x + (3y + 5)\} = (x + 2)(x + 3y + 5)$.

$\boldsymbol{4a^2 - 3b^2 + 4c^2 - 4ab - 10ac - bc} = 4a^2 - a(4b + 10c) - (3b^2 + bc - 4c^2) =$
$= 4a^2 - a(4b + 10c) - (3b^2 - 3bc + 4bc - 4c^2) =$
$= 4a^2 - a(4b + 10c) - \{3b(b - c) + 4c(b - c)\} = 4a^2 - a(4b + 10c) - (3b + 4c)(b - c)$;
de som moet zijn $-4b - 10c$ en het product $-4(3b + 4c)(b - c)$. De getallen zijn dan $6b + 8c$ en $-2b + 2c$ dus: $4a^2 + 2a(3b + 4c) - 2a(b - c) - (3b + 4c)(b - c) =$
$= 2a(2a + 3b + 4c) - (b - c)(2a + 3b + 4c) = (2a - b + c)(2a + 3b + 4c)$.

Ter oefening maken de opgaven 91 t/m 95.
Oplossingen inzenden van de opgaven 96 t/m 100.

11,1. De reststelling

Indien we een veelterm van een hogere graad dan de tweede in factoren willen ontbinden en de vorm is niet tot een der vorige methoden terug te brengen, dan kunnen we de veelterm toch onderzoeken op de aanwezigheid van factoren met behulp van de reststelling.
Deze luidt: De rest van een deling van een veelterm door de factor $x-a$ is gelijk aan de vorm die we verkrijgen door in het deeltal x te vervangen door a. Is de rest gelijk aan nul, dan gaat de deling op en is dus $x-a$ een factor van de veelterm.
Als men de vorm
$x^5-3ax^4+7a^2x^3-2a^3x^2+4ax^4-a^5$ door $x-a$ deelt, zal rest gelijk moeten zijn aan de waarde die de veelterm krijgt door voor x de waarde a in te vullen, omdat voor iedere waarde van x geldt dat:

$$\text{deeltal} = \text{deler } \times \text{quotient} + \text{rest, of :}$$

$$x^5-3ax^4+7a^2x^3-2a^3x^2+4ax^4-a^5=(x-a)\times\text{quotient}+\text{rest.}$$

Nu vullen we in deze vorm de waarde $x=a$ in.

$$a^5-3a^5+7a^5-2a^5+4a^5-a^5=(a-a)\times\text{quotient}+\text{rest.}$$

We zien dat $(a-a)\times quotient = 0\times quotient = 0$, dus moet de vorm links van het gelijkteken de rest aangeven, deze is $6a^5$.
Hieruit volgt dat we een veelterm voor iedere waarde van x kunnen onderzoeken op deelbaarheid.
Men lette erop dat indien we bijvoorbeeld onderzoeken $x=1$ of $x=-1$ en de rest na invulling gelijk aan nul is, dat dan $(x-1)$ of $(x+1)$ de factor is waardoor de veelterm gedeeld kan worden.
We bepalen ons tot gehele getallen, zowel positief als negatief, doch werken niet met breuken.
Mochten er in de veelterm breuken voorkomen dan vermenigvuldigen we de veelterm met een getal, zodanig dat de breuken verdwijnen. Worden er dan factoren gevonden, dan delen we die factoren op de oorspronkelijke veelterm (dus met de breuken) om de andere factoren te vinden.
We zullen een en ander met enkele voorbeelden verduidelijken.
Voorbeeld: Ontbind de vorm x^3+4x^2+x-6.
Indien deze vorm te ontbinden is, dan zal hij deelbaar moeten zijn door:
$x+1,\ x-1,\ x+2,\ x-2,\ x+3,\ x-3,\ x+6,$ of $x-6$, dus alle factoren met plus- en mintekens waaruit het getal -6 is opgebouwd. We schrijven dit korter als volgt:
$x\pm1,\ x\pm2,\ x\pm3,\ x\pm6$. We passen de reststelling toe:

Voor $x+1$ dus $x=-1$ invullen, wordt de vorm:
$(-1)^3+4(-1)^2+(-1)-6=-1+4-1-6=-4\neq0,$
dus de veelterm is niet deelbaar door $x+1$.

Voor $x-1$, dus $x=+1$ vinden we:
$(+1)^3+4(+1)^2+(+1)-6=+1+4+1-6=0,$
Dus de veelterm is deelbaar door $x-1$.

Voor $x+2$, dus $x=-2$ vinden we:
$-8+16-2-6=0$, dus de veelterm is deelbaar door $x+2$.
We merken op dat we de factor $x-2$ niet meer behoeven te onderzoeken, daar dan het product op het einde niet -6 zal opleveren. We hebben nl. reeds als factoren $(x-1)\ (x+2)$, dus zal $(x+3)$ de derde factor moeten zijn. We zullen dit nog even onderzoeken.
$x+3$ geeft $x=-3$ in te vullen:
$-27+36-3-6=0$. Dus het klopt.
De ontbinding wordt dan $(x-1)(x+2)\ (x+3)$.

Aangezien de veelterm van de derde graad was, hadden we na het vinden van de eerste factor deze ook kunnen delen, waarna we een veelterm van de tweede graad hadden overgehouden, die we op een van de bekende manieren hadden kunnen ontbinden.

$$
\begin{array}{l}
x-1\ /\ x^3+4x^2+x-6\ \backslash\ x^2+5x+6 \\
\qquad \underline{x^3-\ x^2} \\
\qquad\quad \underline{+5x^2-5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x-6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x-6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dus $x^3+4x^2+x-6=(x-1)(\,x^2+5x+6)=(x-1)(x+2)\ (x+3)$.
Zo is het mogelijk een veelterm tot de tweede graad terug te brengen door de gevonden factoren eruit te delen.
<u>Voorbeeld:</u> Ontbind de vorm $\boldsymbol{x^3+4x^2-11x-30}$.
Factoren moeten zitten in de tweetermen:
$x\pm1,\ \ x\pm2,\ \ x\pm3,\ \ x\pm5,\ \ x\pm6,\ \ x\pm10,\ \ x\pm15,\ \ x\pm30$.
$x=-1$ geeft $-1+4+11-30=-16$ dus $x+1$ geen factor.
$x=+1$ geeft $1+4-11-30=-36$ dus $x-1$ geen factor.
$x=-2$ geeft $-8+16+22-30=0$ dus $x+2$ wel een factor.

Uitdelen geeft:

$$
\begin{array}{l}
x+2\ /\ x^3+4x^2-11x-30\ \backslash\ x^2+2x-15 \\
\qquad\quad \underline{x^3+2x^2} \\
\qquad\qquad\quad 2x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x^2+4x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -15x \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-15x-30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Dus $x^3+4x^2-11x-30=(x+2)(x^2+2x-15)=(x+2)(x+5)\ (x-3)$.
<u>Voorbeeld:</u> $\boldsymbol{x^9-4x^6+x^3-4}$.
Om deze vorm te vereenvoudigen, stellen we $x^3=y$; de veelterm wordt dan y^3-4y^2+y-4 en merken we op dat deze termen twee-aan-twee bij elkaar kunnen nemen, dus:
$y^2(y-4)+1(y-4)=(y^2+1)(y-4)$.
Dus wordt $x^9-4x^6+x^3-4=(x^6+1)(x^3-4)$.
Nu is $x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$.
De ontbinding wordt dus: $(x^4-x^2+1)(x^3-4)(x^2+1)$.
We merken op dat dus de ontbinding van een veelterm van een hogere graad dan de tweede niet direct met de reststelling onderzocht behoeft te worden, maar dat het soms met een handige methode (bv. door substitutie) mogelijk is de ontbinding eenvoudig uit te voeren.

<u>Voorbeeld:</u> ontbind de volgende vormen in factoren: $\boldsymbol{2a^2-a-4ab+2b^2+b}$.
Vullen we in deze vorm voor a de letter b in dan vinden we:
$2b^2-b-4b^2+2b^2+b=0$, dus $a-b$ is een factor van deze veelterm.
Uitdelen geeft:

$$
\begin{array}{l}
a-b\ /\ 2a^2-a-4ab+2b^2+b\ \backslash\ 2a-1-2b \\
\qquad\quad \underline{2a^2\qquad -2ab} \\
\qquad\qquad -a\ -2ab \\
\qquad\qquad \underline{-a\qquad\qquad\quad +b} \\
\qquad\qquad\quad -2ab \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2ab+2b^2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

We vinden dus:
$2a^2-a-4ab+2b^2+b=(a-b)(2a-1-2b)$
De ontbinding is natuurlijk ook op andere wijze mogelijk:
nl. $2(a^2-2ab+b^2)-(a-b)=2(a-b)^2-(a-b)=(a-b)(2a-2b-1)$.

Ter oefening maken de opgaven 101 t/m 105. Oplossingen inzenden van de opgaven 106 t/m 110.

12,1. Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud.

De grootste gemene deler (G.G.D.) van twee of meer algebraïsche vormen is de gemene (gemeenschappelijke) deler van die algebraïsche vormen. Om van enige vormen de G.G.D. te bepalen, ontbinden we die vormen in factoren en nemen het product van de gemene deler, elk met de kleinste exponent waarin hij in een van de vormen voorkomt.
Wat is de G.G.D. van de volgende vormen?
$\mathbf{30a^3b^4c^5,\ \ 15a^2b^3c^4d,\ \ 10a^5b^2c^3}$ **en** $\mathbf{25a^2bc^3d^2}$.
We schrijven de vormen in ondeelbare factoren:
$2.3.5a^3b^4c^5,\ \ 3.5a^2b^3c^4d,\ \ 2.5.a^5b^2c^3$ en $5^2a^2bc^3d^2$.
$\mathbf{G.G.D. = 5.a^2bc^3}$.

Wat is de G.G.D. van:
$\mathbf{10x^3y + 7x^2y^2 - 6xy^3\ ;\ 6x^2yz + 7xy^2z - 5y^3z}$ ***en*** $\mathbf{2x^2y^2 - 7xy^3 + 3y^4}$.
Oplossing:
$10x^3y + 7x^2y^2 - 6xy^3 = xy(10x^2 + 7xy - 6y^2) = xy(2x - y)(5x + 6y)$.
$6x^2yz + 7xy^2z - 5y^3z = yz(6x^2 + 7xy - 5y^2) = yz(2x - y)(3x + 5y)$.
$2x^2y^2 - 7xy^3 + 3y^4 = y^2(2x^2 - 7xy + 3y^2) = y^2(2x - y)(x - 3y)$.
$\mathbf{G.G.D. = y(2x - y)}$.

Vermenigvuldigen we een van de vormen met een factor die niet in de andere vormen voorkomt, dan kan deze factor ook niet in de G.G.D. voorkomen. We maken hiervan gebruik om eventueel breuken uit de algebraïsche vorm te verdrijven.

Stelling: De G.G.D. van enige vormen verandert niet, als men een van die vormen vermenigvuldigt met een factor, die niet in elk van de andere vormen voorkomt.

Stelling: De G.G.D. van enige vormen verandert niet, als men uit een van die vormen een factor wegdeelt, die niet in elk der andere vormen voorkomt.

Stelling: Deelt men uit enige vormen een factor weg die in iedere vorm voorkomt, dan wordt de G.G.D. van die vormen door die factor gedeeld.

Stelling: Vermenigvuldigt men elke vorm waarvan men de G.G.D. moet bepalen met een factor, dan wordt de G.G.D. van die vormen met die factor vermenigvuldigd.

Evenals in de rekenkunde is aangegeven is het mogelijk uit twee vormen de G.G.D. te bepalen door deling.

Voorbeeld: Bepaal de G.G.D. uit: $\mathbf{x^2 - 1}$ ***en*** $\mathbf{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 1\ /\ x^3 - x^2 + x\ \ - 1\ \backslash\ x - 1 \\
\qquad\quad \underline{x^3 \qquad\ - x} \\
\qquad\qquad -x^2 + 2x \\
\qquad\qquad \underline{-x^2 \qquad\ + 1} \\
\qquad\qquad\qquad 2x - 2\ /\ x^2 - 1\ \backslash
\end{array}
$$

We merken hier op dat $2x - 2$ ontbonden kan worden en $2(x - 1)$ en dat 2 geen gemeenschappelijke factor is, dus voeren we de deling verder uit als volgt:

$$
\begin{array}{l}
x - 1/x^2 \qquad - 1\ \backslash\ \mathbf{x + 1} \\
\qquad\ \underline{x^2 - x} \\
\qquad\qquad x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

De G.G.D. is dan $\mathbf{x - 1}$.

Opmerking: men lette erop niet met breuken te werken, anders komt men tot een foutieve uitkomst met deze bewerking.

Een algebraïsche vorm waarop twee of meer andere algebraïsche vormen deelbaar zijn, heet een gemeen (gemeenschappelijk) veelvoud van die vormen. Het kleinste gemene veelvoud (K.G.V.) van twee of meer algebraïsche vormen is het gemene veelvoud van die vormen, van de laagst mogelijke graad. Om van enige vormen het K.G.V. te bepalen, ontbinden we die vormen in factoren en nemen het product van alle factoren, die er in voorkomen, ieder met de hoogste exponent waarin hij in een van de vormen voorkomt.
Voorbeeld: wat is het K.G.V. van de vormen:
$2x^2 - 7x - 15$; $2x^2 - 13x + 15$ en $2x^2 + 7x - 15$.
$2x^2 - 7x - 15 = (2x+3)(x-5)$.
$2x^2 - 13x + 15 = (2x-3)(x-5)$. **K.G.V.** $\mathbf{(2x+3)(x-5)(2x-3)(x+5)}$.
$2x^2 + 7x - 15 = (2x-3)(x+5)$.

<u>12,2. Breuken</u>

Een vorm van de gedaante $\frac{a}{b}$, waarin a en b algebraïsche vormen zijn, heet een algebraïsche breuk.
De streep heeft de betekenis van het deelteken, terwijl a de teller en b de noemer wordt genoemd.
Zoals we bij de deling reeds gezien hebben, is een algebraïsche breuk positief, als teller en noemer hetzelfde teken- en negatief, als teller en noemer verschillend teken hebben.
Een breuk verandert niet van waarde als teller en noemer beide van teken veranderd worden.
Veranderen we echter alleen de teller of alleen de noemer van teken, dan verandert de waarde van de breuk ook van teken. Een breuk verandert niet van waarde als men teller en noemer met eenzelfde getal vermenigvuldigt of door eenzelfde getal deelt.
Van deze laatste eigenschap maken we gebruik om breuken te vereenvoudigen of om breuken gelijkvormig te maken.
Gelijknamige breuken zijn breuken die dezelfde noemer hebben.
Om een breuk te vereenvoudigen, gaan we van teller en noemer de G.G.D. bepalen en delen teller en noemer door de G.G.D.

Zo is: $\frac{3a^2 + 5ab + 2b^2}{3a^2 - ab - 2b^2} = \frac{(a+b)\,(3a+2b)}{(a-b)\,(3a+2b)} = \frac{a+b}{a-b}$.

Om breuken gelijknamig te maken, bepalen we van de noemers der breuken het K.G.V. en vermenigvuldigen de tellers en noemers van de afzonderlijke breuken met die factor, die in de desbetreffende vorm ontbreekt om het K.G.V. te vormen.

$$\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} + \frac{2ab}{a^2-b^2} = \frac{a(a+b) - b(a-b) + 2ab}{a^2-b^2} = \frac{a^2 + ab - ab + b^2 + 2ab}{a^2-b^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{-2b^2}{a^3-b^3} - \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^2 + ab + b^2 - 2b^2 - a^2 + b^2}{a^3-b^3} = \frac{ab}{a^3-b^3}.$$

$$\frac{1}{2x^2 - 7xy - 15y^2} + \frac{1}{2x^2 - 13xy + 15y^2} = \frac{1}{(2x+3y)(x-5y)} + \frac{1}{(2x-3y)(x-5y)} =$$

$$= \frac{2x - 3y + 2x + 3y}{(2x+3y)(2x-3y)(x-5y)} = \frac{4x}{(2x+3y)(2x-3y)(x-5y)}.$$

Ter oefening maken de opgaven 111 t/m 105.
Oplossingen inzenden van de opgaven 115 t/m 120.

13,1. Vermenigvuldiging en machtsverheffing van breuken.

Een breuk wordt met een vorm vermenigvuldigd door de teller met die vorm te vermenigvuldigen, of de noemer er door te delen.

Voorbeelden:

$$-3 \times \frac{+5}{-7} = \frac{-3 \times +5}{-7} = \frac{-15}{-7} = \frac{15}{7}\ ;$$

$$-3 \times \frac{+5}{-7} = \frac{+5}{-7 \div -3} = \frac{+5}{\frac{+7}{3}} = 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7}\ ;$$

$$-p \times \frac{q+r}{t} = \frac{-pq-pr}{t}\ ; \quad (a+b) \times \frac{a-b}{c} = \boldsymbol{\frac{a^2-b^2}{c}}\ .$$

Het product van twee breuken is gelijk aan het product van de tellers, gedeeld door het product van de noemers.

Voorbeelden: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \boldsymbol{\frac{ac}{bd}}$

$$\frac{a}{-b} \times \frac{-2}{-a} = -\frac{2a}{ab} = -\boldsymbol{\frac{2}{b}}$$ (Let op, drie mintekens)

We kunnen dit ook uitbreiden tot het product van meer breuken.
Dan geldt dat het gedurig product van enige breuken gelijk is aan het gedurig product van de tellers, gedeeld door het gedurig product van de noemers.
Bij het uitwerken van de vraagstukken zullen we steeds proberen gelijke factoren weg te delen waardoor de berekening korter wordt en er steeds minder kans bestaat om fouten te maken.
Voorbeelden:

$$\frac{a^2-ab}{ab+b^2} \times \frac{a^2+ab}{ab-b^2} = \frac{a(a-b)}{b(a+b)} \times \frac{a(a+b)}{b(a-b)} = \boldsymbol{\frac{a^2}{b^2}}\,.$$

We zien dat de factoren $(a+b)\ en\ (a-b)$ zowel in de teller als in de noemer voorkomen, zodat zij tegen elkaar wegvallen.

$$\frac{a^2x^2-a^4}{x^2} \times \frac{a^2x^2+abx^2}{ax+1} \times \frac{ax}{a^2-b^2} \times \frac{ax^2+x}{a^2x-a^3} =$$

$$= \frac{a^2(x-a)(x+a)}{x^2} \times \frac{ax^2(a+b)}{ax+1} \times \frac{ax}{(a-b)(a+b)} \times \frac{x(ax+1)}{a^2(x-a)} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{ax^2(x+a)}{a-b}}\,.$$

$$\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2} \times \frac{a-b}{a^2b+ab^2} \times \frac{a^5-a^3b^2}{a^3+b^3} \times \frac{a^2b-ab^2+b^3}{a^4-2a^3b+a^2b^2} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a-b)^2} \times \frac{a-b}{ab(a+b)} \times \frac{a^3(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \times$$

$$\times \frac{b(a^2-ab+b^2)}{a^2(a^2-2ab+b^2)} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} \times \frac{a-b}{ab(a+b)} \times \frac{a^3(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \times \frac{b(a^2-ab+b^2)}{a^2(a-b)^2} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{a^2+b^2}{a-b}}\,.$$

Indien een breuk tot een macht gebracht is, kunnen we dit ook schrijven als de gelijknamige macht van de teller, gedeeld door die van de noemer.

Voorbeelden: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{\boldsymbol{a^3}}{\boldsymbol{b^3}}$; $\left(\frac{2x-3y}{5a+2b}\right)^5 = \frac{\boldsymbol{(2x-3y)^5}}{\boldsymbol{(5a+2b)^5}}$.

Het verdient aanbeveling de breuken indien mogelijk eerst te vereenvoudigen en daarna de verdere bewerkingen uit te voeren. Een voorbeeld zal een en ander verduidelijken.

$$\left(m-n+\frac{2n^3}{nm+n^2}\right)\times\left(m-\frac{m^2n^2-mn^3}{m^3+mn^2}\right)=$$

We gaan nu eerst de in de vorm voorkomende breuken trachten te vereenvoudigen en ontbinden dus de vormen eerst in factoren.

$$\left(m-n+\frac{2n^3}{n(m+n)}\right)\times\left(m-\frac{mn^2(m-n)}{m(m^2+n^2)}\right)=\left(m-n+\frac{2n^2}{m+n}\right)\times\left(m-\frac{n^2(m-n)}{m^2+n^2}\right)=$$

Nu de vormen onder één noemer brengen.

$$=\frac{m^2-n^2+2n^2}{m+n}\times\frac{m^3+mn^2-mn^2+n^3}{m^2+n^2}=$$

Let op: in de tweede term staat voor de deelstreep van de breuk een minteken. Bij het onder één noemer brengen, veranderen alle tekens van de teller.
We vinden nu na samenvoegen van gelijke termen.

$$=\frac{m^2+n^2}{m+n}\times\frac{m^3+n^3}{m^2+n^2}=\frac{m^3+n^3}{m+n}=$$

$$=\frac{(m+n)(m^2-mn+n^2)}{m+n}=\boldsymbol{m^2-mn+n^2}.$$

Voorbeeld:

$$\left(\frac{x^2-xy}{-xy-y^2}\right)^3\cdot\left(\frac{x^2+xy}{xy-y^2}\right)^4\cdot\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^2\cdot\left(-1+\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y(x+y)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-xy\right)^3}{(-xy-y^2)^3}\cdot\frac{\left(x^2+xy\right)^4}{(xy-y^2)^4}\cdot\frac{(y-x)^2}{(y+x)^2}\cdot\left(\frac{-x+y}{x}\right)\cdot\frac{y(x+y)}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{x^3(x-y)^3}{-y^3(x+y)^3}\cdot\frac{x^4(x+y)^4}{y^4(x-y)^4}\cdot\frac{(y-x)^2}{(y+x)^2}\cdot\frac{-(x-y)}{x}\cdot\frac{y(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{\boldsymbol{x^6}}{\boldsymbol{y^6}}$$

Opmerking: Let bij het voorgaande goed op de volgende bewerkingen:

1e $(-xy-y^2)^3=[-y(x+y)]^3=\boldsymbol{-y^3(x+y)^3}$

2e $(y-x)^2=[-(x-y)]^2=\boldsymbol{(x-y)^2}$

3e $\left(-1+\frac{y}{x}\right)=\frac{-x+y}{x}=\frac{\boldsymbol{-(x-y)}}{\boldsymbol{x}}$

Deze drie vormen zijn nog even extra aangetipt, omdat in de praktijk blijkt dat vele cursisten in deze vormen fouten maken.

Ter oefening maken de opgaven 121 t/m 125.
Oplossingen inzenden van de opgaven 126 t/m 130.

HILVERSUM

14,1. Deling van breuken.

Een breuk wordt gedeeld door een gehele vorm, als men de teller er door deelt, of de noemer er mee vermenigvuldigt.

$$\frac{6}{7} \div 3 = \frac{\frac{6}{3}}{7} = \frac{2}{7} \text{ of } \frac{6}{7} \div 3 = \frac{6}{3 \times 7} = \frac{2}{7}.$$

Onder het omgekeerde van een algebraïsche vorm verstaan we een algebraïsche vorm die met de eerste vermenigvuldigd de waarde van $+1$ tot product heeft.
Het omgekeerde van a is dan $\frac{1}{a}$; van $7a^2b$ is $\frac{1}{7a^2b}$.

Daar delen en vermenigvuldigen twee nauw aan elkaar verwante bewerkingen zijn, maken we er gebruik van dat delen, vermenigvuldigen is met de omgekeerde waarde van de deler.
Vooral in de algebra maken we er een veelvuldig gebruik van, aangezien dit meestal tot aanmerkelijke vereenvoudigingen leidt.
Als algemene regel kunnen we dus zeggen:

Delen is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde van de deler.

$$\frac{6}{7} \div 3 = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{7} ; \quad \frac{-a}{b} \div \frac{+c}{-d} = \frac{-a}{b} \times \frac{-d}{+c} = +\frac{ad}{bc} ;$$

$$\frac{a^2 - b^2}{ab + 2b^2} \div \frac{(a-b)^2}{a^2 - 4b^2} = \frac{a^2 - b^2}{ab + 2b^2} \times \frac{a^2 - 4b^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{b(a+2b)} \times$$

$$\times \frac{(a+2b)(a-2b)}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)(a-2b)}{b(a-b)}.$$

Evenals in de rekenkunde kennen we ook in de algebra de samengestelde breuken. Een samengestelde breuk is een breuk waarvan de teller of de noemer of zowel de teller als de noemer uit breuken bestaan. Bij de samengestelde breuken kunnen we nu een nuttig gebruik maken van de stelling dat het delen hetzelfde is als het vermenigvuldigen met de omgekeerde waarde.
We zullen een-en-ander met enige voorbeelden verduidelijken.

$$\frac{1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{\frac{b+a}{b}}{\frac{a+b}{a}} = \frac{b+a}{b} \times \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b}.$$

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b^2} - 1} = \frac{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{b^2}}{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{b^2} \times \frac{b^2}{a^2 - b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Opmerking: men lette er goed op de hoofddeelstrepen op dezelfde hoogte te plaatsen als de = -tekens en de ×-tekens, aangezien anders zeker fouten gemaakt zullen worden.

$$\frac{4a-\frac{8ab}{a+b}}{3b\left(1-\frac{2a}{a+b}\right)}=\frac{\frac{4a^2+4ab-8ab}{a+b}}{3b\left(\frac{a+b-2a}{a+b}\right)}=\frac{\frac{4a^2-4ab}{a+b}}{\frac{3b(b-a)}{a+b}}=$$

$$=\frac{4a^2-4ab}{a+b}\times\frac{a+b}{3b(b-a)}=\frac{4a(a-b)}{3b(b-a)}=\frac{4a(a-b)}{-3b(a-b)}=-\frac{\mathbf{4a}}{\mathbf{3b}}.$$

$$\left[\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\frac{b^4-1}{a^2}}{(a+b)(a^2+b^2)}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]\times\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}=$$

$$\left[\frac{\frac{a^2-1}{a}\cdot\frac{a^2+1}{a}-\frac{b^4-1}{a^2}}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{-b+a}{ab}\right]\times\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}=$$

$$\left[\frac{\frac{(a^2-1)(a^2+1)-(b^4-1)}{a^2}}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{a-b}{ab}\right]\times\frac{1}{ab}\times\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}=$$

$$\left[\frac{a^4-1-b^4+1}{a^2(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{a-b}{ab}\right]\times\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$\left[\frac{a^4-b^4}{a^2(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{a-b}{ab}\right]\times\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$\left[\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{a^2(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{a-b}{ab}\right]\times\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$\left[\frac{a-b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}\right]\times\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$\left[\frac{ab-b^2+a^2-ab}{a^2b}\right]\times\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2b}\times\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}.$$

14,2. De graad van gebroken vormen.

De graad van een breuk is gelijk aan de graad van de teller verminderd met de graad van de noemer.

Bekijken we de breuk $\frac{7a^3b^5}{8p^4q^2}$ dan zien we dat de teller van de 8e graad is en de noemer van de 6e graad. De graad van de breuk is dan (8 − 6) is 2e graads.

$\frac{(a+b)^7}{ab^2}$ is van de 4e graad. Immers de teller is van de 7e graad en de noemer van de 3e graad.

Ter oefening maken de opgaven 131 t/m 135.
Oplossingen inzenden van de opgaven 136 t/m 140.

R.T.

Algebra, Les 15 Nadruk verboden 29

HILVERSUM

15,1. Vergelijkingen.

Geeft men in de vorm $x^2 + 3x - 7$ aan x de waarde nul, dan krijgt die vorm de waarde -7; voor $x = 1$ wordt dit $1 + 3 - 7 = -3$; voor $x = -1$ wordt het $1 - 3 - 7 = -9$ voor $x = 2$; $4 + 6 - 7 = 3$; voor $x = -2,\ 4 - 6 - 7 = -9$.

Het is mogelijk om aan x verschillende waarden toe te kennen, waardoor de veelterm in het algemeen ook verschillende waarden zal verkrijgen. Voor de waarden van x kunnen we alle mogelijke getallen nemen, dus niet alleen de positieve en negatieve getallen, doch ook de gebroken getallen, wortelvormen enz.

De grootheid x waaraan men dus verschillende waarden geeft, heet een veranderlijke grootheid. De veranderlijke grootheden stelt men meestal voor door een der laatste letters uit het alfabet, dus x, y of z.

Het is mogelijk om een veelterm samen te stellen die uit meerdere veranderlijken bestaat, bijvoorbeeld $2x - 8y + 4z - 7$. Willen we de waarde van deze veelterm weten, dan moeten dus de waarden gegeven of aangenomen worden voor de veranderlijke x, y en z. Stel $x = 3, y = -2, z = 5$, dan is de waarde van de weelterm $6 + 16 + 20 - 7 = 35$. Voor andere waarden van x, y en z vinden we natuurlijk een andere uitkomst voor de veelterm.

Stellen we nu een vorm met veranderlijke grootheden gelijk aan een andere vorm met of zonder afhankelijke grootheden, dan heet de voorstelling een vergelijking.

Zo is $x^2 - 5x + 8 = 7x - 3$ een vergelijking. Bij een vergelijking zijn we niet meer vrij in de keuze van de veranderlijke, maar deze is bepaald door de vergelijking, met andere woorden, de veranderlijke is geen veranderlijke meer, doch een bepaald vast getal. Dit getal is echter vooralsnog onbekend en moet uit de vergelijking worden opgelost. Men spreekt dan ook van de onbekende in de vergelijking. Het gedeelte van de vergelijking dat voor het = -teken staat, noemen we het eerste lid van de vergelijking, het gedeelte achter het = -teken heet het tweede lid. De waarde die we aan de onbekende moeten geven opdat het eerste lid gelijk is aan het tweede lid noemen we de wortel van de vergelijking. Om dus een vergelijking op te lossen, moeten we de wortel(s) bepalen.

Al naar gelang het aantal onbekenden dat in een vergelijking voorkomt, spreken we van een vergelijking met een , twee of drie onbekenden.

Zo is $3x^2 - 5x + 7 = 8$ een vergelijking met één onbekende; $7x + 3y - 8 = 12$ een vergelijking met twee onbekenden; $25x^2 + 7y - 3z^2 + 9z + 14y^2 = 8$ een vergelijking met 3 onbekenden enz. Hierin gaan we nog een onderscheid maken en wel naar de graad waarin de onbekende voorkomt. $3x^2 - 5x + 7 = 8$ is dan een vergelijking van de tweede graad met één onbekende.

15,2. Eigenschappen van de vergelijkingen.

Eigenschap 1. Als men beide leden van een vergelijking met eenzelfde getal vermeerdert of vermindert, ontstaat een nieuwe vergelijking met dezelfde wortel als de oorspronkelijke vergelijking.

$5x - 3 = 8x + 9$
Tel aan beide kanten van het = -teken de waarde +3 erbij op, dit geeft
$5x - 3 + 3 = 8x + 9 + 3$ of $5x = 8x + 12$.

Indien we voorgaande uitwerking eens nader beschouwen, dan zien we dat we hetzelfde resultaat bereiken met behulp van de volgende eigenschap.

Eigenschap 2. Men mag een term uit het ene lid naar het andere lid overbrengen, mits men die term van teken verandert.
$9x - 8 = 8x + 5$ dus:
$9x - 8x = 5 + 8$ of $x - 13$.

Eigenschap 3. Men mag beide leden van een vergelijking met een zelfde bekend getal vermenigvuldigen of door eenzelfde bekend getal delen.
Voorbeeld: $7x = 14$ geeft $x = 2$; $1/3x = 8$ geeft $x = 24$.

Deze eigenschappen dienen om de wortels van vergelijkingen te bepalen, of zoals we liever zeggen om de vergelijkingen op te lossen.

Voorbeeld: $12x - 14 + 7x - 8 = 4x - 7 + 3x - 12$
$12x + 7x - 4x - 3x = -7 - 12 + 14 + 8$

$12x = 3$ dus $x = \frac{3}{12} = \mathbf{\frac{1}{4}}$.

De waarde $x = \frac{1}{4}$ is dus de wortel van de vergelijking, dat wil zeggen:
vullen we voor x de waarde $\frac{1}{4}$ in, dan vinden we voor beide leden dezelfde waarde. Dit gebruiken we als een controlemiddel om te onderzoeken of de gevonden oplossing de goede is, (met andere woorden, om te onderzoeken of we geen rekenfouten hebben gemaakt).

$\frac{12}{4} - 14 + \frac{7}{4} - 8 = \frac{4}{4} - 7 + \frac{3}{4} - 12.$

$3 - 14 + 1\frac{3}{4} - 8 = 1 - 7 + \frac{3}{4} - 12$ dus $\quad \mathbf{-17\frac{1}{4} = -17\frac{1}{4}}$

Komen in de vergelijking breuken voor , dan verdient het meestal aanbeveling eerst de breuken te gaan verdrijven en daarna de vergelijking op te lossen. Men maakt daarbij gebruik van eigenschap 3.

Voorbeeld: $\frac{2x-7}{3} + \frac{3x+4}{4} = \frac{5x-9}{6} + 7\frac{1}{6}$

Vermenigvuldigen we nu beide leden met het K.G.V. van de noemers, (het getal 12) dan vinden we:

$4(2x - 7) + 3(3x + 4) = 2(5x - 9) + 12 . \frac{43}{6}$
$8x - 28 + 9x + 12 = 10x - 18 + 86$
$17x - 16 = 10x + 68$
$17x - 10x = 68 + 16$
$7x = 84$
$\mathbf{x = 12}$

Ter oefening maken de opgaven 141 t/m 145.
Oplossingen inzenden van de opgaven 146 t/m 150.

HILVERSUM

16,1. Vervolg van de vergelijkingen.

Oplossen van de vergelijkingen is op verschillende wijzen mogelijk.
Men dient steeds te zoeken naar de eenvoudigste oplossing. Kan men bv. alle termen van een vergelijking door een getal delen of met een getal vermenigvuldigen, zodat de vergelijking daardoor eenvoudiger wordt, dan dient men dat eerst te doen.

Voorbeeld: $3\{2(x-4)+6\}-5=1$
Breng eerst de term -5 naar het tweede lid.
$3\{2(x-4)+6\}=6$. De vergelijking is te vereenvoudigen door beide leden door 3 te delen:
$2(x-4)+6=2$. Breng de term $+6$ naar het tweede lid en deel de vergelijking door 2.
$x-4=-2$ dus $\boldsymbol{x=2}$.

16,2. Delen door een factor waarin de onbekende voorkomt.

Gegeven is de vergelijking $(x+2)(x-7)=(x+2)(3x-5)$. Beide leden zijn deelbaar door de factor $x+2$. Na deling houden we over $x-7=3x-5$ dus $3x-x=-7+5$ of $2x=-2$ en $x=-1$.
We beschouwen nog eens de factor die we er uit gedeeld hebben nl. de factor $x+2$. Deze factor wordt gelijk aan nul als $x=-2$. Nu is een product gelijk aan nul, als een der factoren gelijk is aan nul. Voor $x=-2$ zijn dus beide kanten van de vergelijking gelijk aan nul, m.a.w. $x=-2$ is een oplossing van de vergelijking.
We vinden dus twee oplossingen voor deze vergelijking. Dit is ook nog op een andere manier aan te tonen als volgt:

$(x+2)(x-7)=(x+2)(3x-5)$. Hiervoor is te schrijven:
$(x+2)(x-7)-(x+2)(3x-5)=0$
Of: $(x+2)\{(x-7)-(3x-5)\}=0$. Na omwerking vinden we:
$(x+2)(-2x-2)=0$.

Een product is nul als een der factoren gelijk is aan nul dus als:
$x+2=0$ of $-x-2=0$.
Hieruit volgt $x=-2$ of $x=-1$. Beide oplossingen voldoen.
Delen we dus een vergelijking door een factor die de onbekende bevat, dan ontstaat een nieuwe vergelijking die de wortel uit de factor die weggedeeld is niet meer bevat.
We zeggen dan dat er een wortel verduisterd is. In eigenschap 3 (les 15), staat dan ook, dat men beide leden van een vergelijking door eenzelfde bekend getal mag delen.
We houden ons dus aan de volgende regel:

Delen we een vergelijking door een factor waarin de onbekende voorkomt, dan moeten we deze factor gelijk aan nul stellen en daaruit de onbekende oplossen. Dit is één oplossing van de vergelijking.
Het gedeelte van de vergelijking dat na de deling overblijft, moet dan verder opgelost worden.

In het algemeen mag men niet vermenigvuldigen met een factor waarin de onbekende voorkomt.
We zullen dit met een voorbeeld duidelijk maken.
De vergelijking $2x-5=x+3$ heeft tot wortel de waarde $x=8$.
Zou men nu de beide leden van de vergelijking vermenigvuldigen met $x-2$, dus met een factor die de onbekende bevat, dan heeft de vergelijking $(2x-5)(x-2)=(x+3)(x-2)$ niet alleen de waarde $x=8$ als oplossing, maar eveneens de waarde $x=2$.
De nieuwe vergelijking heeft dan een wortel meer dan de oorspronkelijke vergelijking.

Men zegt dan dat door het vermenigvuldigen met een factor die de onbekende bevat een wortel is ingevoerd.
Men moet nu altijd de volgende regel in acht nemen:
Indien men bij het oplossen van een vergelijking vermenigvuldigd heeft met een factor waarin de onbekende voorkomt, dan moet men alle gevonden wortels controleren door ze in de oorspronkelijk gegeven vergelijking in te vullen.
Voldoet de gevonden wortel niet aan de vergelijking, dan is deze wortel ingevoerd.
Voorbeeld:
$\frac{6x-3}{2x+7} = \frac{3x-2}{x+5}$. Na vermenigvuldiging met het K.G.V. der noemers:
$(2x+7)(x+5)$ vinden we $(6x-3)(x+5) = (3x-2)(3x+7)$. (Dit noemen we kruislings vermenigvuldigen). We vinden na vermenigvuldiging:
$6x^2 + 27x - 15 = 6x^2 + 17x - 14$.
De term $6x^2$ valt eruit. Men lette erop dat er niet gedeeld wordt door $6x^2$, doch dat deze term na overbrenging naar het eerste lid $-6x^2$ oplevert en dan wegvalt tegen de term $6x^2$.
Dus $27x - 15 = 17x - 14$ of $10x = 1$, waaruit $x = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

We vullen nu de waarde $x = 0{,}1$ in de oorspronkelijke vergelijking in dus:
$\frac{0{,}6-3}{0{,}2+7} = \frac{0{,}3-2}{0{,}1+5}$. Dit geeft:

$\frac{-2{,}4}{7{,}2} = \frac{-1{,}7}{5{,}1}$. Hieruit volgt $3 = 3$ dus de wortel $x = 0{,}1$ voldoet.

16,3. Identieke, niet-identieke en valse vergelijkingen.

Een vergelijking heet identiek als ze voor alle waarden van de onbekende in een gelijkheid overgaat.
Voorbeeld: $5x + 4 = \frac{15x+12}{3}$.
Voor elke waarde van x zal aan beide zijden van het gelijkteken hetzelfde bedrag tevoorschijn komen.
Een identieke vergelijking heeft oneindig veel wortels.

Een vergelijking heet niet-identiek, als ze niet voor alle waarden van de onbekenden in een gelijkheid overgaat. Dit waren dus de vergelijkingen zoals we in de vorige les hebben bekeken.

Een vergelijking heet vals, als ze voor geen enkele waarde van de onbekenden in een gelijkheid overgaat. Zo kan de vergelijking:
$5x + 4 = \frac{15x+12}{3} + 7$ nooit een gelijkheid worden, welke waarde men ook aan x geeft.
Een valse vergelijking heeft geen enkele wortel.

Ter oefening maken de opgaven 151 t/m 155
Oplossingen inzenden van de opgaven 156 t/m 160.

17,1. Uitgewerkte voorbeelden van moeilijkere vergelijkingen.

Los x op uit de volgende vergelijkingen.

1. $\dfrac{x-6}{x-4}+\dfrac{x+5}{x-2}=\dfrac{1-x}{2-x}+\dfrac{3-x}{4-x}$.

Hiervoor mogen we schrijven:

$$\frac{x-6}{x-4}+\frac{x+5}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-3}{x-4}$$

Men merkt hierbij op dat de termen twee aan twee dezelfde noemer bezitten. Deze termen voegen we eerst bij elkaar.

$$\frac{x-6}{x-4}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+5}{x-2} \quad \text{of}$$

$$\frac{x-6-x+3}{x-4}=\frac{x-1-x-5}{x-2} \quad \text{en na vereenvoudiging}$$

$$\frac{-3}{x-4}=\frac{-6}{x-2}\ ;\text{delen door} -3 \text{ geeft } \frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$$

Hieruit volgt $x-2=2(x-4)$ of $x-2=2x-8$ dus $\boldsymbol{x=6}$.

2. $\dfrac{2x-a}{a}+\dfrac{2x-b}{b}=;\ \dfrac{(2x-a)b+(2x-b)a}{ab}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

Of $(2x-a)b+(2x-b)a=a^2+b^2$
$2bx-ab+2ax-ab=a^2+b^2$
$2bx+2ax=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$2x(a+b)=(a+b)^2$ delen door $(a+b)$ geeft
$2x=a+b$ dus $\boldsymbol{x=\dfrac{a+b}{2}}$.

3. $\dfrac{16}{x-17}-\dfrac{21}{x-9}=\dfrac{16}{x+4}-\dfrac{21}{x+7}$

We merken op dat in twee breuken de teller 16 is en in twee andere 21. We brengen dan deze breuken bij elkaar, ieder aan een kant van het gelijkteken.

$$\frac{16}{x-17}-\frac{16}{x+4}=\frac{21}{x-9}-\frac{21}{x+7}$$

$$16\left(\frac{1}{x-17}-\frac{1}{x+4}\right)=21\left(\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x+7}\right)$$

$$16.\frac{x+4-x+17}{(x-17)(x+4)}=21.\frac{x+7-x+9}{(x-9)(x+7)}$$

$$\frac{16\,.21}{(x-17)(x+4)}=\frac{16\,.21}{(x-9)(x+7)} \quad of \quad \frac{1}{(x-17)(x+4)}=\frac{1}{(x-9)(x+7)}$$

Hieruit volgt dat: $(x-17)(x+4)=(x-9)(x+7)$

$x^2-13x-68=x^2-2x-63\ ;\ -11x=5$ dus $x=-\boldsymbol{\dfrac{5}{11}}$.

4. $\dfrac{4x+7}{7}+\dfrac{7x-3\frac{1}{2}}{6x+2}=\dfrac{16x+15}{28}+\dfrac{2\frac{1}{4}}{7}.$

In dit voorbeeld zien we drie breuken waarin in de noemer de onbekende x niet voorkomt,
We brengen deze drie breuken naar een kant van het gelijkteken dus:

$$\frac{7x-3\frac{1}{2}}{6x+4}=\frac{16x+15}{28}+\frac{2\frac{1}{4}}{7}-\frac{4x+7}{7}.$$

$$\frac{14x-7}{12x+4}=\frac{16x+15+9-16x-28}{28}=\frac{-4}{28}=-\frac{1}{7}$$

$$7(14x-7)=-1(12x+4)$$
$$98x-49=-12x-4$$
$$110x=45 \text{ of } x=\frac{45}{110}=\frac{9}{22}.$$

5. $\dfrac{6x}{x^2-9}+\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{3+x}=\dfrac{1}{17}$

We merken op dat in het linkerlid x^2-9 ontbonden kan worden in $(x-3)(x+3)$ en dat deze factoren ook in de tweede en derde term voorkomen. We brengen dus het linkerlid onder één noemer en wel de noemer $(x-3)(x+3)$.

$$\frac{6x-3(x+3)+3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{17}$$

$$\frac{6x-3x-9+3x-9}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{17} \quad\rightarrow\quad \frac{6x-18}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{17}$$

Nu de teller in factoren ontbinden, dit geeft:

$$\frac{6x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{17}$$

De factor $x-3$ kon eruit gedeeld worden en moet dan, daar deze factor de onbekende x bevat, nul gesteld worden.

We vinden nu als eerste oplossing $x-3=0$ dus $\boldsymbol{x=3}$
We houden over:

$\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{1}{17}$ dus $x+3=6\,.\,17=102$ dus $\boldsymbol{x=99}$.

Nu controleren we of beide oplossingen voldoen. We merken op dat indien we de wortel $x=3$ in de oorspronkelijke vergelijking invullen, de noemers van de beide eerste breuken:
$\dfrac{6x}{x^2-9}$ en $\dfrac{3}{3-x}$ gelijk aan nul worden. Nu is bekend dat, indien de noemer van een breuk gelijk aan nul is, de waarde van de breuk oneindig groot wordt. Dus de waarde $x=3$ voldoet niet.
De waarde x is gelijk 99 blijkt na invulling te voldoen.

Ter oefening maken de opgaven 161 t/m 165.
Oplossingen inzenden van de opgaven 166 t/m 170.

18,1. Ingeklede vergelijkingen.

In de vorige lessen hebben we de vergelijkingen met één onbekende behandeld. Deze vergelijkingen waren echter reeds opgesteld en behoefden nog slechts opgelost te worden. Bij de ingeklede vergelijkingen dienen we zelf de vergelijking op te stellen. De opgave is bij de ingeklede vergelijking in woorden opgesteld, waarbij men zelf de onbekende moet kiezen en daarna de vergelijking op moet stellen. Dit opstellen van de vergelijking is meestal niet zo eenvoudig en vergt veel routine van de leerling. We zullen dus eerst met enige vooroefeningen beginnen, veel voorbeelden geven en dan langzamerhand naar de moeilijker opgaven overgaan.

Als het getal x genoemd wordt, wat is dan het drievoud van dit getal?
Het drievoud van het getal is dan $3x$. Hoe stelt men het getal voor plus 50?
Het getal plus vijftig is $x + 50$.

Als twee getallen 30 verschillen, hoe kunnen we deze getallen dan voorstellen?
Hierbij zijn twee mogelijkheden, die beiden goed zijn nl:
Stel het ene getal x, dan is het andere getal $x - 30$. Het is echter ook goed als men zegt het ene getal is x en het andere $x + 30$.

Als een vader 40 jaar is en zijn zoon 15 jaar, hoe oud zijn ze dan over x jaar, en hoe oud zijn ze dan samen? Over x jaar is de vader $40 + x$ jaar en de zoon $15 + x$ jaar.
Samen zijn ze dan $40 + x + 15 + x = 55 + 2x$ jaar.

Bij een getal van drie cijfers is het cijfer der tientallen 5 meer dan het cijfer der eenheden en het cijfer der honderdtallen is 3 meer dan het cijfer der tientallen. Hoe stelt men dit getal voor?
Stel het cijfer der eenheden is x, dan is het cijfer der tientallen $x + 5$ en het cijfer der honderdtallen is $x + 5 + 3 = x + 8$.
We moeten nu het getal opstellen. Bij een normaal rekenkundig getal levert het geen moeilijkheden op om een getal waarvan het cijfer der eenheden, tientallen en honderdtallen bekend is op te stellen.
Nemen we bv. dat het cijfer de eenheden 8, dat der tientallen 5 en dat der honderdtallen 2 is, dan kunnen we zonder meer opschrijven dat het getal 258 is.
Doen we dit bij het getal uit ons voorbeeld dan zouden we vinden: $(x + 8)(x + 5)x$.
Maar dit betekent in de algebra een vermenigvuldiging zodat we deze schrijfwijze hier niet kunnen gebruiken. Komen we nu nog eens terug op ons getal 258 dan hadden we ook kunnen zeggen dat we het getal als volgt schrijven: $200 + 50 + 8$.
Hierbij hebben we dus gebruik gemaakt van de wetenschap dat 1 honderdtal 100 eenheden bevat en 1 tiental, 10 eenheden.
Hiervan zullen we nu gebruik maken om het getal op te stellen.
We redeneren dus als volgt: we hebben $(x + 8)$ honderdtallen, dit zijn $100(x + 8)$ eenheden; $(x + 5)$ tientallen, dit zijn $10(x + 5)$ eenheden.
Totaal hebben we dus $100(x + 8) + 10(x + 5) + x$ eenheden. Het gevraagde getal is dus:
$100(x + 8) + 10(x + 5) + x = 100x + 800 + 10 + 50 + x = 111x + 850$.

18,2. Voorbeelden van oplossingen van ingeklede vergelijkingen.

Een getal is viermaal zo groot als een ander getal; hun som overtreft het $\frac{2}{5}$ deel van het kleinste getal met 92. Bereken de getallen.

<u>Oplossing:</u> Stel het kleinste getal x, dan is het andere getal $4x$. Hun som bedraagt dus $5x$.
$\frac{2}{5}$ van het kleinste getal kunnen we nu voorstellen als $\frac{2}{5}x$. Uit de opgave blijkt dus dat $5x$, 92 meer is dan $\frac{2}{5}x$. Nu stellen we de vergelijking op: $5x = \frac{2}{5}x + 92$. Deze vergelijking kunnen we eenvoudig oplossen:

$$5x - \frac{2}{5}x = 92;\ \ 25x - 2x = 460;\ \ 23x = 460;\ \ x = 20\ .$$

Het kleinste getal is dus 20 en het grootste getal $\mathbf{4\,.\,20 = 80}$.

<u>Opgave:</u> A heeft tweemaal zoveel geld als B.
A en B gaan een spel spelen. A wint van B 10 gulden*[2] en heeft nu viermaal zo veel geld als B. Hoeveel geld had ieder aanvankelijk?

<u>Oplossing:</u> Stel dat B aanvankelijk x gulden heeft. A heeft dan $2x$ gulden.
Na het spel bezit A $(2x + 10)$ gulden en B $(x - 10)$ gulden.
Nu heeft A viermaal zo veel geld als B, waaruit de vergelijking opgesteld kan worden nl:
$2x + 10 = 4(x - 10)$. Nu kunnen we de vergelijking weer oplossen.

$$2x + 10 = 4x - 40$$
$$2x - 4x = -10 - 40$$
$$2x = 50 \text{ en } x = 25\ .$$

Dus B heeft aanvankelijk 25 gulden en A 50 gulden.
We kunnen het vraagstuk ook controleren. Na het spelen heeft A dus $50 + 10 = 60$ gulden en B heeft $(25 - 10) = 15$ gulden.
Dus inderdaad heeft A dan viermaal zo veel geld als B.

<u>Opgave:</u> Een vader is thans 42 jaar, zijn zoon is nu 10 jaar. Over hoeveel jaar zal hij driemaal zo oud zijn als zijn zoon?

<u>Oplossing:</u> Stel dat de vader over x jaar driemaal zo oud is als zijn zoon. De vader is dan $(42 + x)$ jaar en de zoon $(10 + x)$ jaar.
Nu geldt dus dat $3(10 + x) = 42 + x$. Hieruit volgt $30 + 3x = 42 + x$ of $2x = 12$. Dus $\boldsymbol{x = 6}$.
Over 6 jaar is de vader 48 jaar en de zoon 16 jaar.
Dus is de vader dan driemaal zo oud als zijn zoon.

<u>Voorbeeld:</u> Als men van het tweevoud van een getal 10 aftrekt en van het dubbele van de rest ook, dan is het $\frac{3}{5}$ deel van het getal dat we dan verkrijgen gelijk aan 24. Welk getal is dit?
<u>Oplossing:</u> Stel het getal x. Het tweevoud hiervan is dan $2x$. Verminderen we dit getal met 10, dan is de rest $2x - 10$. Het dubbele van de rest is $2(2x - 10) = 4x - 20$. Dit verminderd met 10 geeft $4x - 20 - 10 = 4x - 30$.
Het $\frac{3}{5}$ deel hiervan is gelijk aan 24, zodat de vergelijking wordt:

$$\frac{3}{5}(4x - 30) = 24.$$

$$12x - 90 = 120 \ \text{ dus } \ 12x = 210 \ \text{ en } \ x = 17\frac{1}{2}.$$

Het getal is dus $\mathbf{17\frac{1}{2}}$.

Ter oefening maken de opgaven 171 t/m 175.
Oplossingen inzenden van de opgaven 176 t/m 180.

[2] Gulden: Nederlandse munteenheid die in 2002 is vervangen door de Euro. De gulden is in de tekst gehandhaafd aangezien dit voor de berekeningen geen gevolgen heeft. (1 gulden is 100 cent, 1 kwartje is 25 cent, een dubbeltje is 10 cent) FV.

19,1. Ingeklede vergelijkingen (vervolg).

Bij vraagstukken die over kapitalen gaan, is het meestal beter om het kapitaal $100x$ gulden te stellen in plaats van op x gulden, dit vooral in verband met berekeningen van procenten, waarbij de breuken vermeden worden.

Voorbeeld: Iemand zet van een kapitaal van f. 5000,- een deel uit à 5% en het andere deel à 4%. Als de gezamenlijke rente f. 230,- is, bereken dan elk deel.

Oplossing: Stel het ene deel $100x$ gulden, dan is het andere deel $(5000 - 100x)$ gulden. Van het eerste deel bedraagt de rente $5x$ en van het tweede deel $4(50 - x)$. Daar de gezamenlijke rente f. 230,- bedraagt, vinden we de volgende vergelijking:

$$5x + 4(50 - x) = 230\ ;$$
$$5x + 200 - 4x = 230 \text{ of } x = 30.$$

Dus het eerste deel bedraagt f. 3000,- en het tweede deel f. 2000,-

Indien we nu een vraagstuk in vergelijking hebben gebracht, dan kan uit de oplossing van die vergelijking blijken dat het vraagstuk onmogelijk is. Wordt bv. in een opgave, waarin gevraagd de leeftijd van iemand te berekenen, een negatieve waarde gevonden, dan is de opgave dus niet juist, hoewel de vergelijking normaal oplosbaar is.
Een ander voorbeeld is, indien in een vraagstuk berekend moet worden hoeveel personen er zijn en we vinden een gebroken of negatief getal, dan is deze opgave dus onmogelijk.

Voorbeeld: Tien personen, bestaande uit een aantal mannen en vrouwen geven een aantal guldens uit. De mannen geven ieder 8 gulden- en de vrouwen ieder 6 gulden uit. Het totaal aantal guldens dat uitgegeven is, bedraagt 6 minder dan het veertienvoud van het aantal mannen. Hoeveel mannen en vrouwen zijn er?

Oplossing: Stel en zijn x mannen, dan zijn er $10 - x$ vrouwen. De mannen verteren in totaal $8x$ gulden en de vrouwen $6(10 - x)$ guldens.
Samen is dit $8x + 6(10 - x) = 2x + 60$. Dit is 6 minder dan $14x$, dus vinden we de volgende vergelijking:

$$2x + 60 = 14x - 6 \text{ of } 12x = 66 \text{ en } \boldsymbol{x = 5\tfrac{1}{2}}.$$

Het aantal mannen zou dus $5\frac{1}{2}$ zijn, hetgeen onmogelijk is.

Bij opgaven, waarin gerekend moet worden met grootheden met verschillende eenheden dient men er voor te zorgen, dat alles eerst naar dezelfde eenheden wordt gebracht.

Voorbeeld: In een kist bevinden zich 100 geldstukken; kwartjes en dubbeltjes. De totale waarde van het geld is f. 21,85. Hoeveel kwartjes en hoeveel dubbeltjes zijn er in die kist?

Oplossing: Stel er zijn x kwartjes, dan zijn er $(100 - x)$ dubbeltjes.
(Geldstukken kunnen zowel kwartjes als dubbeltjes zijn, dus is dezelfde eenheid). Willen we nu het totale bedrag uitrekenen, dan kunnen we dit het eenvoudigste doen, door alles in centen om te rekenen. x kwartjes bedraagt dus $25x$ centen. $(100 - x)$ dubbeltjes bedraagt $10(100 - x)$ centen. Het totale bedrag is dan: $[25x + 10(100 - x)]$ centen. Er was gegeven dat het bedrag f. 21,85 was, dus kunnen we de vergelijking opstellen:

$$25x + 10(100 - x) = 2185$$
$$25x + 1000 - 10x = 2185$$
$$15x = 1185 \text{ dus } x = 79\ .$$

Er bevinden zich dus 97 kwartjes en 21 dubbeltjes in die kist.

<u>Voorbeeld:</u> Iemand fietst een afstand van 40 km, gedeeltelijk met een snelheid van 15 km. per uur, gedeeltelijk met een snelheid van 12 km. per uur. Hoeveel km. heeft hij met de eerste snelheid afgelegd, als hij over de hele weg 3 uur werk heeft?

<u>Oplossing:</u> Stel het gedeelte van de weg dat hij aflegt met een snelheid van 15 km. per uur op x km. Dan is het tweede gedeelte van die weg $(40 - x)$ km.
Over het eerste gedeelte doet hij $\frac{x}{15}$ uur, over het tweede gedeelte $\frac{40-x}{12}$ uur. Totaal doet hij over de gehele weg 3 uur, dus de vergelijking wordt:

$$\frac{x}{15} + \frac{40 - x}{12} = 3. \text{ Breuken wegwerken geeft:}$$

$$4x + 5(40 - x) = 3 \times 60$$

$$4x + 200 - 5x = 180$$

$$-x = -20 \;\; dus \;\; x = 20$$

Er wordt dus 20 km. met een snelheid van 15 km. per uur afgelegd en 20 km. met een snelheid van 12 km. per uur.

<u>Voorbeeld:</u> Een arbeider verdient in 3 uur f. 7,- en zijn zoon in 7 uur f. 3,- . Na hoeveel uren heeft de vader f. 160,- meer verdiend dan de zoon?

<u>Oplossing:</u> Stel dat de vader na x uur f. 160,- meer verdiend heeft dan de zoon.
De vader verdient per uur $\frac{7}{3}$ gulden en de zoon per uur $\frac{3}{7}$ gulden.
Na x uur heeft de vader dus $\frac{7}{3}x$ gulden verdiend en de zoon $\frac{3}{7}x$ gulden.
Het verschil hiervan bedraagt f. 160,- zodat de vergelijking wordt:

$$\frac{7}{3}x - \frac{3}{7}x = 160$$

$$49x - 9x = 21 \times 160$$

$$40x = 21 \,.\, 160 \;\; dus \;\; x = 21 \,.\, 4 = 84.$$

Na 84 uur heeft de vader f. 160,- meer verdiend dan de zoon.

<u>Voorbeeld:</u> A begint met een snelheid van 4 km. per uur te lopen. Een kwartier later vertrekt B van hetzelfde punt met een snelheid van 4,75 km. per uur. Na hoeveel tijd zal hij A inhalen?

<u>Oplossing:</u> Stel B haalt A in na x uur, dus B heeft x uur gelopen en A x uur plus een kwartier, dus $\left(x + \frac{1}{4}\right)$ uur. A heeft in die tijd een weg afgelegd van $4\left(x + \frac{1}{4}\right)$ km. en B een weg van $4\frac{3}{4}$ km.
Deze wegen zijn echter even lang, dus wordt de vergelijking:

$$4\left(x + \frac{1}{4}\right) = 4\frac{3}{4}x \;\; of \;\; 4x + 1 = 4\frac{3}{4}x\,.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{3}{4}x = 1 \;\; en \;\; x = \frac{4}{3}.$$

Na $\frac{4}{3}$ uur of na 1 uur en 20 minuten heeft B, A ingehaald.

Ter oefening maken de opgaven 181 t/m 185.
Oplossingen inzenden van de opgaven 186 t/m 190.

HILVERSUM

20,1. Ingeklede vergelijkingen (vervolg).

Daar de ingeklede vergelijkingen zeer belangrijk zijn en daar de praktijk uitwijst dat de leerlingen met deze materie altijd zeer veel moeilijkheden hebben, zullen we nog een les aan dit onderwerp besteden. De cursist moet de voorbeelden nauwkeurig doornemen en daarna de opgaven die er ter oefening bij gegeven zijn uitwerken om te zien of hij de stof begrepen heeft. Alleen op deze manier zal hij met grondig resultaat aan de opgaven kunnen werken. De techniek-vraagstukken zijn in de meeste gevallen ook ingeklede vergelijkingen waaruit men dan de vergelijkingen of formules die men nodig heeft op moet stellen voordat men tot de oplossing over kan gaan.

Voorbeeld: Een gezelschap bestond uit driemaal zoveel mannen als vrouwen. Nadat 4 mannen met hun vrouwen vertrokken waren, was het aantal mannen 4 maal zo groot als het aantal vrouwen. Hoeveel mannen en hoeveel vrouwen waren er?

Oplossing: Stel er waren x vrouwen, dan waren er dus $3x$ mannen. Nadat de 4 mannen en de 4 vrouwen vertrokken zijn, zijn er dus nog $(x-4)$ vrouwen en $(3x-4)$ mannen over. het aantal mannen is nu 4 maal zo groot als het aantal vrouwen, dus geldt als vergelijking:

$$3x-4=4(x-4)$$
$$3x-4=4x-16 \ of \ x=12\,.$$

Er waren dus 12 vrouwen en 36 mannen.

Voorbeeld: Een handelaar kocht een stuk linnen voor $5\frac{1}{2}$ gulden de meter.
Bij het nameten bleek dat hij 6 meter meer heeft gekregen dan waarvoor hij betaalde, doch het linnen was zo slecht dat hij het voor $4\frac{1}{2}$ gulden de meter moest verkopen, waardoor hij $8\frac{4}{11}$ procent verloor. Hoe lang was het stuk linnen?

Oplossing: Stel de lengte van het stuk linnen op x meter. Hij betaalt hiervoor dus $5\frac{1}{2}x$ gulden.
De handelaar bezit echter $x+6$ meter.
Hij ontving hiervoor $(x+6)4\frac{1}{2}$ gulden. Hij verliest nu echter $8\frac{4}{11}$ procent. Zijn verlies bedraagt dus:
$5\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}(x+6)$ gulden. We vinden dan de volgende vergelijking:

$$5\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}(x+6)=8\frac{4}{11}\,.\frac{5\frac{2}{2}x}{100}$$
$$x-27=\frac{92}{11}\,.\frac{11}{200}x=\frac{46}{100}x \ of \ x-\frac{46}{100}x=27\,.$$
$$\text{dus } \frac{54}{100}x=27 \text{ waaruit volgt } x=50.$$

De handelaar heeft dus 50 meter linnen gekocht.

Voorbeeld: Van een breuk is de teller twee maal groter dan de noemer. Als de teller met vijf vermeerderd wordt en men de noemer verdubbelt, dan wordt de waarde van de breuk $\frac{4}{5}$.
Wat is de oorspronkelijk breuk?

Oplossing: Stel de noemer x, dan is de teller $x+2$, de breuk wordt dan:

$$\frac{x+2}{x}.$$

Indien we de teller met vijf vermeerderen, dan wordt de teller dus $x + 7$.
Als we de noemer verdubbelen, vinden we voor de noemer de waarde $2x$.
De nieuwe breuk wordt nu $\frac{x+7}{2x}$. De waarde hiervan is $\frac{4}{5}$, zodat de vergelijking wordt:

$$\frac{x+7}{2x} = \frac{4}{5} \ \ of \ \ 5x + 35 = 8x \ \ of \ \ 3x = 35 \ \ dus\, x = 11\frac{2}{3}.$$

De breuk was $\frac{\mathbf{13\ \ 2/3}}{\mathbf{11\ \ 2/3}}$.

<u>Opmerking:</u> We mogen deze breuk niet vereenvoudigen, dus bv. niet teller en noemer met 3 vermenigvuldigen, aangezien de opgave niet meer klopt, zoals men eenvoudig na kan rekenen. Men moet dus voorzichtig zijn met de vereenvoudiging van een breuk en altijd controleren of de gestelde opgave nog juist beantwoord is.

<u>Voorbeeld:</u> Van een getal van 4 cijfers is het cijfer links een 3 en rechts een 7. Verwisselt men die cijfers, dan krijgt men een nieuw getal dat 539 meer is dan het tweevoud van het oorspronkelijke getal. Welk getal is dat?

<u>Oplossing:</u> De middelste twee cijfers van het getal zijn onbekend. Stellen we het getal dat door deze cijfers samen gevormd wordt op x, dan kunnen we het getal opstellen. Dit getal wordt dan: $3000 + 10x + 7$. Let goed op! Daar x het getal voorstelt gevormd door de middelste twee cijfers behoeven we deze waarde slechts met 10 te vermenigvuldigen om deze waarde in eenheden uit te drukken. Verwisselen we nu de twee buitenste cijfers, dan blijven de twee binnenste cijfers onveranderd bestaan. Het getal wordt dan $7000 + 10x + 3$.
Het nieuwe getal $7000 + 10x + 3$ is nu 539 meer dan $2(3000 + 10x + 7)$ zodat de vergelijking wordt:

$$7000 + 10x + 3 = 2(3000 + 10x + 7) + 539$$
$$7003 + 10x + 3 = 6014 + 20x + 539.$$
$$10x = 7003 - 6014 - 539 = 7003 - 6553 = 450$$

Dus $x = 45$

Het getal was dus 3457.

We gaan deze waarde controleren.
Bij verwisselen van de buitenste cijfers wordt het getal 7453. Nu moet gelden:
$7453 - 539 = 2 \times 3457 \ \ \rightarrow \ \ 6814 = 6914.$ Het klopt dus inderdaad.

<u>Voorbeeld:</u> Bereken drie opeenvolgende getallen zodanig, dat de som van de derde machten van het kleinste en het grootste het dubbele van de derde macht van het middelste getal met 42 overtreft.

<u>Oplossing:</u> Stel het kleinste getal x, dan zijn de opeenvolgende getallen $x,\ \ x + 1$ en $x + 2$.
De som van de derde machten van het kleinste en het grootste getal stellen we voor als:
$x^3 + (x + 2)^3$.
Het dubbele van de derde macht van het middelste getal is dan $2(x + 1)^3$.
De vergelijking wordt nu:

$x^3 + (x + 2)^3 = 2(x + 1)^3 + 42$ of uitgewerkt:

$$x^3 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 + 42$$

Dus $12x + 8 = 6x + 2 + 42$.

Hieruit volgt: $6x = 36,$ dus $x = 6$.

De getallen zijn dan 6, 7 en 8.

Ter oefening maken de opgaven 191 t/m 195.
Oplossingen inzenden van de opgaven 196 t/m 200.

HILVERSUM

21,1. Vergelijkingen met twee onbekenden.

Aan een vergelijking met twee onbekenden kan door een onbepaald aantal waarden voor x en y worden voldaan.
$3x + 4y = 5$ is een vergelijking met twee onbekenden. Vullen we in deze vergelijking een willekeurige waarde voor x in (zowel positief als negatief) dan kunnen we de bijbehorende waarde voor y uitrekenen.
We kunnen ook een willekeurige waarde voor y invullen en dan de bijbehorende waarde van x uitrekenen. Men mag echter niet tegelijkertijd een waarde voor x en voor y kiezen, daar dit niet aan de gegeven vergelijking behoeft te voldoen. We zullen voor de vergelijking $3x + 4y = 5$ enige waarden van y uitrekenen, terwijl we x zelf kiezen bv:

$x = 0$ geeft $y = +\frac{5}{4}$; $x = 1$ geeft $y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ geeft $y = 2$; $x = 2$ geeft $y = -\frac{1}{4}$

$x = -2$ geeft $y = 2\frac{3}{4}$ enzovoorts.

Nemen we nu nog een vergelijking in x en y, dan kunnen we ook hier weer waarden voor x of y invullen en de andere daarbij behorende waarde uitrekenen.
Het blijkt nu dat (behalve een enkel uitzonderingsgeval) er altijd een waarde van x en y bestaat die aan de twee vergelijkingen tegelijkertijd voldoet. (de uitzonderingsgevallen bekijken we later).
We gaan nu de oplossing bepalen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.
Met oplossing bedoelen we die waarde van x *en* y, die aan beide vergelijkingen voldoet.
Hiervoor bestaan verschillende methoden die we achtereenvolgens zullen bespreken.
Om goed in te zien hoe men die waarden x *en* y vindt, wederom de wortels genaamd, moet men steeds bedenken dat in beide vergelijkingen de x zowel als de y, dezelfde zijn.

Voorbeeld: Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

We gaan nu de coëfficiënten van x of van y gelijk maken, waarbij we gebruik maken van de eigenschap, dat we een vergelijking met eenzelfde getal mogen vermenigvuldigen of door eenzelfde getal mogen delen.
Vermenigvuldigen we de tweede vergelijking met 2 dan worden de coëfficiënten van x aan elkaar gelijk, we vinden dus:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 2x + 6y &= 22 \end{aligned}$$

Trekken we deze vergelijking van elkaar af dan valt de x eruit, we vinden dus:
(denk erom, aftrekken is optellen met omgekeerd teken)

$-7y = -21$ of $y = 3$. Om de bijbehorende x-waarde te vinden, vullen we de gevonden y-waarde in één van beide vergelijkingen in en kiezen daarvoor altijd de eenvoudigste vergelijking.
We nemen bv. de eerste vergelijking dus:
$2x - y = 1$; $y = 3$ ingevuld geeft $2x - 3 = 1$ *of* $2x = 4$ dus $x = 2$.
De oplossing is dus $x = 2$ en $y = 3$.
We onderzoeken altijd of de gevonden wortels juist zijn door de gevonden waarde voor x en y in de andere vergelijking in te vullen dus in:
$x + 3y = 11$ geeft dit $2 + 9 = 11$, dus de gevonden oplossing was juist.

We geven nu de methode van oplossen nogmaals aan. Het getal waarmee we vermenigvuldigen om de coëfficiënt van x of y gelijk te maken geven we aan achter de vergelijking tussen twee verticale streepjes als volgt:

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - y = 1 & 1 & 2x - y \;=\; 1 \\ x + 3y = 11 & 2 & \underline{2x + 6y = 22} - \\ & & \quad -7y \;= -21 \text{ dus } y = 3\,. \end{array}$$

$y = 3$ in $2x - y = 1$ geeft $2x - 3 = 1$ of $2x = 4$ dus $x = 2$.
Oplossing: $\boldsymbol{x = 2}$; $\boldsymbol{y = 3}$.

We zullen nu enige voorbeelden behandelen, zoals men die dus moet maken.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{l|c|l} 3x - 2y = 25 & 2 & 6x - 4y = 50 \\ 2x + 4y = 14 & 1 & \underline{2x + 4y = 14} + \\ & & 8x \qquad = 64 \\ & & \boldsymbol{x = 8} \end{array}$$

$x = 8$ in $3x - 2y = 25$ geeft $24 - 2y = 25$ dus $-2y = +1$ en $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}}$.
Controle: Ingevuld in de tweede vergelijking geeft:
$16 - 2 = 14$, dus de oplossing is juist.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{l|c|l} 7x + 5y = 64 & 2 & 14x + 10y = 128 \\ 4x - 2y = 22 & 5 & \underline{20x - 10y = 110} + \\ & & 34x \qquad = 218 \\ & & \boldsymbol{x = 7} \end{array}$$

$x = 7$ in $4x - 2y = 22$ geeft $28 - 2y = 22$ of $-2y = -6$ dus $\boldsymbol{y = 3}$.
Controle: ingevuld in $7x + 5y = 64$ geeft:
$49 + 15 = 64$, dus de oplossing is juist.

We zien uit de opgaven, dat indien de tekens van de gelijk gemaakte waarden hetzelfde zijn, we de vergelijkingen aftrekken. Zijn de gelijk gemaakte waarden verschillend van teken, dan tellen we de vergelijkingen bij elkaar op.
Soms moeten we de vergelijkingen eerst gaan herleiden tot hun eenvoudigste gedaante bv:

$$\begin{array}{r|l|l} x + 3y = 10x + 60 & -9x + 3y = 60 & -3x + y = 20 \\ 6y - 9x = 5y + x - 1 & -10x + y = -1 & \underline{-10x + y = -1} - \\ & & 7x \qquad = 21 \\ & & \boldsymbol{x = 3} \end{array}$$

$x = 3$ ingevuld in $-3x + y = 20$ geeft $-9 + y = 20$ dus $y = 29$.
Controle: x en y invullen in $-10x + y = -1$ geeft:
$-30 + 29 = -1$, dus de oplossing is juist.

Voor de controle mag men ook de vergelijkingen $6y - 9x = 5y + x - 1$ nemen, maar we nemen het liefst de eenvoudigste vergelijking.

Ter oefening maken de opgaven 201 t/m 205.
Oplossingen inzenden van de opgaven 206 t/m 210.

22,1. Vergelijkingen met twee onbekenden (tweede en derde methode).

De tweede methode voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen met twee onbekenden is de methode der gelijkstelling. Daar x en ook y dezelfde waarde hebben in beide vergelijkingen zoals in de vorige les is gebleken, is het mogelijk bv. x uit de beide vergelijkingen op te lossen en deze aan elkaar gelijk te stellen. We houden dan een vergelijking over waarin alleen de y als onbekende voorkomt. Nemen we bv. het stelsel vergelijkingen:

$$x - 4y = 24$$
$$x - 2y = 14$$

Uit de eerste vergelijking volgt $x = 4y + 24$
Uit de tweede vergelijking volgt $x = 2y + 14$

Hieruit vinden we dus dat $4y + 24 = 2y + 14$ daar y hierin als enige onbekende voorkomt, kunnen we de waarde van y oplossen nl. $2y = -10$, dus $y = 5$.
Vullen we de gevonden y-waarde in een der beide vergelijkingen in, dan is $x = -20 + 24 = 4$.
Invullen in de andere vergelijking ter controle geeft $x = -10 + 14 = 4$, dus dezelfde uitkomst.
Hieruit blijkt dat de gevonden oplossing de juiste is.
Voorbeeld:

$$\begin{cases} 4x + 9y = 31 & \text{Hieruit volgt } x = \dfrac{31 - 9y}{4} \\[2ex] 2x - 6y = 12 & \text{Hieruit volgt } x = \dfrac{12 + 6y}{2} \end{cases}$$

Gelijkstellen geeft: $\dfrac{31 - 9y}{4} = \dfrac{12 + 6y}{2} = 6 + 3y$

Dus $31 - 9y = 24 + 12y$.

$21y = 7$ en $y = \dfrac{1}{3}$ dus $x = 7$.

Bij nadere beschouwing zien we dat het beter was geweest om niet de x gelijk st stellen, doch de waarde $2x$ of $4x$ als volgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 4x + 9y = 31 & 2x = \dfrac{31 - 9y}{2} \\[2ex] 2x - 6y = 12 & 2x = 6 + 12y \end{array}\right\} \text{enzovoorts}$$

Of ook $\left.\begin{array}{l} 4x = 31 - 9y \\ 4x = 12y + 24 \end{array}\right\}$ hieruit $31 - 9y = 12y + 24$

$$21y = 7 \qquad \text{dus } y = \frac{1}{3}$$

In plaats van de waarden van x gelijk te stellen kunnen we ook x uit een der vergelijkingen oplossen en in de andere vergelijking invullen. Bij deze methode spreken we over de oplossing door substitutie (invulling). Los x en y van de volgende vergelijking op met de methode van substitutie:

$$5x + 3y = 7$$
$$4x + 2y = 3$$

Uit de eerste vergelijking volgt: $x = \dfrac{7 - 3y}{5}$

Ingevuld in de tweede vergelijking geeft dit:

$$4\left(\frac{7-3x}{5}\right) = 5y - 3$$

$28 - 12y + 25y = 15$ of $13y = -13$ dus $y = -1$

Hieruit volgt: $x = \dfrac{7+3}{5} = 2$.

Deze laatste oplossingsmethode is vaak zeer aantrekkelijk. Vooral bij vergelijkingen met meer dan twee onbekenden zal men er dikwijls gebruik van maken. (De vergelijkingen met meerdere onbekenden worden in een van de volgende lessen behandeld.)
In de techniek worden zeer veel vraagstukken opgelost met behulp van de wetten van Kirchhoff. De met behulp van deze zeer belangrijke wetten opgebouwde vergelijkingen, zullen we heel dikwijls oplossen met de methode van substitutie.
Soms is het mogelijk om een grotere waarde dan x of y te substitueren, hetgeen dan natuurlijk aanzienlijk minder rekenwerk geeft.

<u>Voorbeeld:</u> $5x + 9y = 7$
$100x + 14y = -26$

Uit de eerste vergelijking volgt: $5x = 7 - 9y$
Dit in de tweede vergelijking ingevuld geeft:
$20(7 - 9y) + 14 = -26$ of $140 - 180y + 14y = -26$
Dus: $166y = 166$; en $\boldsymbol{y = 1}$.
we vinden nu: $5x = 7 - 9 = -2$ of $\boldsymbol{x = -\frac{2}{5}}$.

<u>22,2. Afhankelijke en strijdige vergelijkingen.</u>

Bij de uitwerking van vraagstukken gebeurt het wel eens dat men bij twee vergelijkingen met twee onbekenden vindt, dat de coëfficiënten van x en y een evenredigheid vormen bv:

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - 3y = 5 & 2 & 4x - 6y = 10 \\ 4x - 6y = 7 & 1 & \underline{4x - 6y = 7}\ - \\ & & \quad 0 = 3 \end{array}$$

Na oplossing van deze beide vergelijkingen vinden we dus dat $0 = 3$, hetgeen natuurlijk niet mogelijk is. Het is dan onmogelijk waarden voor x en y te vinden die aan de beide vergelijkingen gelijktijdig voldoen. Zulke vergelijkingen heten <u>strijdig</u>.

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - 3y = 5 & 2 & 4x - 6y = 10 \\ 4x - 6y = 10 & 1 & \underline{4x - 6y = 10}\ - \\ & & \quad 0 = 0 \end{array}$$

We vinden nu de oplossing $0 = 0$, hetgeen wel juist is. Dit geldt echter voor iedere waarde van x en y. De twee vergelijkingen zijn hetzelfde. We noemen zo'n stelsel vergelijkingen <u>afhankelijke vergelijkingen.</u> In het normale geval noemen we de vergelijkingen onafhankelijk vergelijkingen. We kunnen nu de volgende conclusies trekken:

1. Zijn twee vergelijkingen onafhankelijk dan is het stelsel oplosbaar, dan vinden we één oplossing voor x en y.
2. Zijn twee vergelijkingen strijdig dan is het stelsel vergelijkingen onoplosbaar en er is geen enkele waarde voor x en y te vinden die tegelijkertijd aan beide vergelijkingen voldoen.
3. Zijn twee vergelijkingen afhankelijk dan bestaan er oneindig veel oplossingen voor x en y.

Ter oefening maken de opgaven 211 /m 215.
Oplossingen inzenden van de opgaven 216 t/m 220.

23,1. Vergelijkingen met twee onbekenden.

Een stel wortels dat gelijktijdig voldoet aan twee vergelijkingen met twee onbekenden zal ook voldoen aan de vergelijking die door optelling of aftrekking van de leden van die vergelijking ontstaat.
We kunnen dan deze nieuwe vergelijking met een van de oorspronkelijke samen nemen om de wortels op te lossen. Dit kan soms tot aanmerkelijke vereenvoudigingen leiden (vooral met meerdere vergelijkingen met meerdere onbekenden).
Bij sommige opgaven is het noodzakelijk een of andere substitutie in te voeren om het vraagstuk te vereenvoudigen. We zullen dit met enige voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld:

$$\begin{cases} \dfrac{22}{2x-4y+3}+\dfrac{15}{6x-5y-8}=\dfrac{5}{2}. \\[2ex] \dfrac{5}{2x-4y+3}+\dfrac{60}{6x-5y-8}=\dfrac{27}{11}. \end{cases}$$

In deze opgave zien we dat de noemers van de vergelijkingen hetzelfde zijn. We stellen nu:

$2x-4y+3=\dfrac{1}{u}$ dus $\dfrac{1}{2x-4y+3}=u$ en

$6x-5y-8=\dfrac{1}{v}$ dus $\dfrac{1}{6x-5y-8=v}$

Dit ingevuld geeft:
$$\begin{array}{rl|c|rl} 22u+15v= & \dfrac{5}{2} & 4 & 88u+60v= & 10 \\[1ex] 5u+60v= & \dfrac{27}{11} & 1 & 5u+60v= & \dfrac{27}{11} \\ \hline & & & 83u = & \dfrac{83}{11} \end{array} -$$
dus: $u=\dfrac{1}{11}$.

$u=\dfrac{1}{11}$ in $22u+15v=\dfrac{5}{2}$ geeft: $2+15v=\dfrac{5}{2}$

of: $15v=\dfrac{1}{2}$ dus $v=\dfrac{1}{30}$

We kunnen nu zeggen dat:
$$\begin{aligned} 2x-4y+3&=11 \\ 6x-5y-8&=30 \end{aligned}$$

of:
$$\begin{array}{r|c|r} 2x-4y=8 & 3 & 6x-12y=24 \\ 6x-5y=38 & 1 & \underline{6x-\ \ 5y=38} \ - \\ & & -\ 7y=-14 \end{array}$$

$\boldsymbol{y=2}$ Dit ingevuld in de vergelijking $2x-4y=8$

geeft: $2x-8=8$ waaruit volgt dat: $\boldsymbol{x=8.}$

Voorbeeld: Bepaal de waarden van x en y uit de volgende vergelijkingen:

$$x + 2y = 2x + 3y - 2 = 3x + 5y - 6\,.$$

De vergelijkingen zijn dus hier niet apart gegeven, maar moeten eerst nog opgesteld worden. Men kan nu het eerste deel met het tweede en met het derde deel samen nemen, waaruit dan de twee vergelijkingen volgen. Het is echter ook mogelijk het tweede gedeelte met het eerste en met het derde of het derde met het eerste en tweede gedeelte samen te nemen. Welke combinatie men ook volgt, men komt altijd op hetzelfde antwoord. Er moet echter goed op gelet worden dat we nooit drie vergelijkingen hieruit kunnen opstellen, daar we dan een stelsel van afhankelijke vergelijkingen krijgen, zodat we geen oplossing kunnen vinden. We zullen nu het stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{array}{l|c|c|l} x + 2y = 2x + 3y - 2 & x + y = 2 & 2 & 2x + 2y = 4 \\ x + 2y = 3x + 5y - 6 & 2x + 3y = 6 & 1 & \underline{2x + 3y = 6}\; - \\ & & & \quad \boldsymbol{y = 2} \end{array}$$

$y = 2$ ingevuld in $x + y = 2$ geeft $\boldsymbol{x = 0}$.
Vullen we nu de gevonden waarden in de vergelijkingen
$x + 2y = 2x + 3y - 2 = 3x + 5y - 6$ in, dan vinden we:
$0 + 4 = 0 + 6 - 2 = 0 + 10 - 6$ dus: $4 = 4 = 4$.

Voorbeeld: Los $x\ en\ y$ op uit de volgende vergelijkingen.

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 - b^2}{x} + \dfrac{ab}{y} = a + \dfrac{b^2}{a - b} \\[2ex] \dfrac{a - b}{x} + \dfrac{a + b}{y} = \dfrac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \end{cases} \qquad \text{Stel in deze vergelijkingen } \frac{1}{x} = u \ \ en \ \ \frac{1}{y} = v$$

$$\begin{array}{r|c|l} \text{dus: } (a^2 - b^2)u + ab\,v = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a - b} & 1 & (a^2 - b^2)u + ab\,v = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a - b} \\[2ex] (a - b)u + (a + b)v = \dfrac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} & a + b & (a^2 - b^2)u + (a + b)^2 v = \dfrac{2a^2 + 2b^2}{a - b} \end{array}$$

Aftrekken geeft: $ab\,u - (a + b)^2 v = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a - b} - \dfrac{2a^2 + 2b^2}{a - b}$

of: $v(ab - a^2 - 2ab - b^2) = \dfrac{a^2 - ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2}{a - b}$

$-v(a^2 + ab + b^2) = \dfrac{-a^2 - ab - b^2}{a - b}$ dus: $v = \dfrac{1}{a - b}$ of: $\boldsymbol{x = a - b}$.

De waarde v vullen we nu in een der vergelijkingen in en vinden dan:

$$(a - b)u + \frac{a + b}{a - b} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2}$$

dus: $(a - b)u = \dfrac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$

$$(a - b)u = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{a - b}{a + b}$$

dus: $u = \dfrac{a - b}{(a - b)(a + b)} = \dfrac{1}{a + b}$ of: $\boldsymbol{y = a + b}$.

Ter oefening maken de opgaven 221 t/m 225.
Oplossingen inzenden van de opgaven 226 t/m 230.

HILVERSUM

24,1. Ingeklede vergelijkingen, op te lossen met behulp van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Het principe voor het oplossen van deze ingeklede vergelijkingen is hetzelfde als die met één onbekende, zoals we in een der vorige lessen hebben behandeld. Meestal is de methode met meer onbekenden eenvoudiger als die met één onbekende. We zullen een en ander weer aan de hand van enige uitgewerkte voorbeelden trachten te verduidelijken.

Voorbeeld 1: Het tweevoud van een getal vermeerderd met een tweede getal is 40. Het tweevoud van het tweede getal, vermeerderd met het eerste geeft 35. Bepaal die getallen.

Oplossing: Stel het eerste getal is x en het tweede y. De vergelijkingen worden nu:

$$\begin{array}{l|c|l|l} 2x+y=40 & 1 & 2x+y=40 & 3y=30 \text{ of } y=10 \\ x+2y=35 & 2 & 2x+4y=70 & \text{dus: } x=15 \end{array}$$

De getallen zijn dus: 15 en 10

Voorbeeld 2: Een getal bestaat uit drie cijfers. De som van de cijfers is 16. Het cijfer der tientallen is 4 meer dan het cijfer der honderdtallen.
Keren we de volgorde der cijfers om, dan is het verschil van het nieuwe en het oorspronkelijke getal 79 minder dan het oorspronkelijke getal bedraagt. Welk getal is dit?

Oplossing: Stel het cijfer der eenheden is x en het cijfer der tientallen is y, dan is het cijfer der honderdtallen $y-4$. Het getal wordt nu:
$100(y-4)+10y+x=110y+x-400$.
Keren we de volgorde der cijfers om, dan wordt het nieuwe getal:
$100x+10y+y-4=100x+11y-4$.
Het verschil van deze beide getallen bedraagt:
$(100x+11y-4)-(110y+x-400)=99x-99y+396$.
Het verschil is 79 minder dan het oorspronkelijke getal bedraagt, dus vinden we als eerste vergelijking:
$99x-99y+396+79=110y+x-400 \text{ of } 98x-209y=-875$.
De tweede vergelijking vinden we uit de som der cijfers nl:
$y-4+y+x=16 \text{ of } x+2y=20$.
Dus het stelsel vergelijkingen wordt:

$$\begin{array}{r|r|l} x+\quad 2y=\quad 20 & 98 & 98x+196y=\ \ 1960 \qquad 405y=2835 \\ 98x-209y=-875 & 1 & 98x-209y=-875 \qquad\quad y=7 \end{array}$$

$x+14=20$ geeft: $x=6$.
Het cijfer der eenheden is 6; het cijfer der tientallen is 7 en het cijfer der honderdtallen is 3.

Dus het getal is 376.

Controle: De som der cijfers 1s 16, dus dit klopt. Draaien we de volgorde der cijfers om, dan wordt het getal 673. Het verschil tussen de beide getallen bedraagt dus $673-376=297$. Tellen we hier 79 bij op dan vinden we $297+79=376$, dus het oorspronkelijke getal.

Voorbeeld 3: Een tabakshandelaar heeft twee soorten tabak. Mengt hij 3 ons*[3] van de ene soort met 7 ons van de andere soort, dan krijgt hij tabak van 84 cent per ons. Mengt hij 13 ons van de ene soort met 17 ons van de andere soort, dan kost hem dit mengsel 88 cent per ons.
Hoeveel kost 1 ons van iedere soort?

[3] 1 ons is 100 gram (FV)

<u>Oplossing:</u> Stel de eerste soort tabak kost x cent per ons en de tweede soort y cent.
3 ons van de ene soort kost dus $3x$ cent en 7 ons van de tweede soort $7y$ cent. Samen kost hem deze 10 ons dus $(3x + 7y)$ cent. Per ons kost dit mengsel
$\frac{3x + 7y}{10}$ cent en dit is gelijk aan 84 cent.
13 ons van de eerste soort kost hem $13x$ cent en 17 ons van de tweede soort kost hem $17y$ cent.
Totaal voor 30 ons dus $(13x + 17y)$ cent.
Hiervoor is dan de prijs per ons $\frac{13x + 17y}{30}$, waarbij dit bedrag gelijk is aan 88 cent.
De vergelijkingen worden nu:

$$\begin{array}{l|c|c|l}
\frac{3x + 7y}{10} = 84 & 3x + 7y = 840 & 13 & 39x + 91y = 10920 \\
\frac{13x + 17y}{30} = 88 & 13x + 17y = 2640 & 3 & 39x + 51y = 7920 \; - \\
\cline{4-4}
 & & & 40y = 3000 \\
 & & & y = 75
\end{array}$$

$3x + 525 = 840$ of $3x = 315$ dus $x = 105$.
1 ons van de eerste soort kostte dus 105 cent en van de tweede soort 75 cent.

<u>Controle:</u>

$$\frac{3x + 7y}{10} = \frac{315 + 525}{10} = \frac{840}{10} - 84.$$

$$\frac{13x + 17y}{30} = \frac{1365 + 1275}{30} = \frac{2640}{30} = 88.$$

<u>Voorbeeld 4:</u> Iemand heeft guldens en rijksdaalders*[4]. Wisselt hij alles in kwartjes, dan krijgt hij 188 geldstukken. Wisselt hij de guldens in dubbeltjes en de rijksdaalders in guldens dan krijgt hij 200 geldstukken. Hoeveel guldens en hoeveel rijksdaalders heeft hij?

<u>Oplossing:</u> Stel hij heeft x guldens en y rijksdaalders. Wisselt hij alles in kwartjes, dan krijgt hij voor zijn x guldens dus $4x$ kwartjes en voor zijn y rijksdaalders $10y$ kwartjes. Totaal is dit $(4x + 10y)$ kwartjes. De eerste vergelijking wordt nu: $4x + 10y = 188$ of $2x + 5y = 94$.
Wisselt hij de guldens in dubbeltjes dan krijgt hij $10x$ geldstukken.
Voor de rijksdaalders krijgt hij $2\frac{1}{2}y$ guldens. Dit zijn dus totaal $(10x + 2\frac{1}{2}y)$ geldstukken.
De tweede vergelijking wordt $10x + 2\frac{1}{2}y = 200$ of $4x + y = 80$.
Het stelsel vergelijkingen wordt dan:

$$\begin{array}{l|c|l|l}
2x + 5y = 94 & 2 & 4x + 10y = 188 & 9y = 108 \\
4x + y \;\; = 80 & 1 & 4x + y \quad = 80 & y = 12
\end{array}$$

$2x + 60 - 94$ of $2x = 34$ dus $x = 17$.

Hij heeft dus 17 guldens en 12 rijksdaalders.

<u>Controle:</u> dus 17 guldens geven 68 kwartjes
12 rijksdaalders geven 120 kwartjes. Totaal 188 geldstukken.
17 guldens geven 170 dubbeltjes; 12 rijksdaalders geven 30 dubbeltjes.
Totaal 200 geldstukken.

Ter oefening maken de opgaven 231 t/m 235.
Oplossingen inzenden van de opgaven 236 t/m 240.

[4] 1 rijksdaalder is 2½ gulden, 10 kwartjes en 25 dubbeltjes. (FV)

25,1. Drie vergelijkingen met drie onbekenden van de eerste graad.

Wanneer we een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden hebben, dan kunnen we hiervan twee vergelijkingen met twee onbekenden maken. Daarvoor elimineren we één der onbekenden uit alle drie vergelijkingen. Het stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden lossen we verder op zoals we in de vorige lessen behandeld hebben. Door terugsubstitutie van de gevonden onbekenden kunnen we dan de drie onbekenden vinden.

Voorbeeld: Los de volgende stelsel vergelijkingen op.

$2x + 3y + 4z = 20$..(1)
$4x + 3y + 3z = 19$..(2)
$3x + 4y + 5z = 26$..(3)

We vermenigvuldigen vergelijking (1) met 3 en vergelijking (2) met 4 en trekken dan de gevonden vergelijkingen van elkaar af, als volgt:

$$\begin{array}{l|c|l} 2x+3y+4z=20 & 3 & 6x+\ \ 9y+12z\ =60 \\ 4x+3y+3z=19 & 4 & \underline{16x+12y+12z=76\ -} \\ & & 10x\ +\ 3y\qquad\ \ = 16 \text{.........................(4)} \end{array}$$

Vermenigvuldig nu vergelijking (1) met 5 en vergelijking (3) met 4 en trek deze vergelijkingen af:

$$\begin{array}{l|c|l} 2x+3y+4z=20 & 5 & 10x+15y+20z=100 \\ 3x+4y+5z=19 & 4 & \underline{12x+16y+20z=104\ -} \\ & & \ \ 2x\ +\ \ y\qquad\ = \ \ 4 \text{...........................(5)} \end{array}$$

We houden nu dus twee vergelijkingen (4) en (5) met twee onbekenden (x en y) over, die we verder normaal oplossen aldus:

$$\begin{array}{l|c|l} 10x+3y=16 & 1 & 10x+3y=16 \\ \ \ 2x+\ \ y=\ \ 4 & 3 & \underline{\ \ 6x+3y=12\ -} \\ & & \ \ 4x+\ \ \ \ =\ \ 4 \qquad \text{dus: } x=1 \end{array}$$

Vul nu x in vergelijking (4) of (5) in bv. in (5) dan is $2 + y = 4$ dus $y = 2$.
Nu vullen we de gevonden waarden van $x\ en\ y$ in, in een der vergelijkingen (1), (2) of (3) bv. in vergelijking (1). Dit levert op:
$2 + 6 + 4z = 20$ of $4z = 12$ dus: $z = 3$.
We vinden dus als oplossing van het stelsel vergelijkingen: $\boldsymbol{x = 1,\ y = 2}$ **en** $\boldsymbol{z = 3}$.
Ter controle vullen we deze waarden bv. in de tweede vergelijking in dus:
$2 + 6 + 12 = 20$. De gevonden oplossing is dus juist.

Voor het oplossen van drie vergelijkingen met drie onbekenden gaan we weer volgens een bepaald schema te werk. Achter de vergelijkingen plaatsen we een aantal verticale streepjes en tussen twee van deze streepjes de getallen waarmee we de vergelijking willen vermenigvuldigen om één der onbekenden te elimineren. Men dient er wel op te letten dat men één onbekende elimineert, zodat men slechts tweemaal de eliminatie toe mag passen. Het verdient aanbeveling eerst goed te overwegen welke onbekende men eerst wil elimineren en men zoekt daarvoor die onbekenden met de eenvoudigste coëfficiënten. Ook is het vaak gemakkelijk om die onbekende te elimineren, die in één van de vergelij-kingen met een negatief teken voorkomt. Na gelijkmaking van de coëfficiënten van die onbekende kan men namelijk die vergelijkingen dan optellen, hetgeen meestal wel uit het hoofd gedaan kan worden.
We schrijven dan de gevonden vergelijking direct op. Een en ander zal in het volgende voorbeeld worden toegepast.

Voorbeeld: Los het volgende stelsel van vergelijkingen op.

$$\begin{array}{l|c|c|l}
2x - 7y - z = 21 & 3 & 2 & 11x - 20y = 82 \\
5x + y + 3z = 19 & 1 & & \underline{\ \ x - 20y = 62\ -} \\
3x + 6y - 2z = -20 & & 1 & 10x \qquad\ \ = 20 \\
 & & & \qquad x = 2
\end{array}$$

$x = 2$ ingevuld in de vergelijking $x - 20 = 62$ geeft $2 - 20y = 62$ of $-20y = 60$ dus $y = -3$.
$x = 2$ en $y = -3$ ingevuld in de vergelijking $2x - 7y - z = 21$ geeft:
$4 + 21 - z = 21$ of $z = 4$.
Controle: $x, y\ en\ z$ invullen in $5x + y + 3z = 19$ geeft:
$10 - 3 + 12 = 19$. De oplossing is dus: $\boldsymbol{x = 2}$; $\boldsymbol{y = -3}$; $\boldsymbol{z = 4}$.

25,2. n vergelijkingen van de eerste graad met n onbekenden.

Bij een stelsel van vier vergelijkingen met vier onbekenden brengen we dit stelsel terug tot een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden en lossen dit stelsel weer op zoals hiervoor is behandeld.
Algemeen kunnen we dus zeggen:
Bij het oplossen van een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden elimineren we één der onbekenden en houden over $(n - 1)$ vergelijkingen met $(n - 1)$ onbekenden. Uit dit stelsel elimineren we weer één onbekende en houden we over $(n - 2)$ vergelijkingen met $(n - 2)$ onbekenden. Uiteindelijk houden we dan over 1 vergelijking met 1 onbekende. Deze gevonden waarde wordt in één der beide vergelijkingen met twee onbekenden ingevuld, waarna we een tweede onbekende vinden. Deze twee gevonden waarden invullen in een der vergelijkingen met drie onbekenden geeft de derde onbekende enzovoorts. Is het totale aantal onbekenden opgelost, dan vullen we de gevonden waarden ter controle in, in één der oorspronkelijke vergelijkingen.

Voorbeeld: Los het volgende stelsel vergelijkingen op.

$$\begin{array}{l|c|c|c|l}
x + y + z + u = 10 & 4 & 3 & & 2x \quad + y - u = 1 \\
2x + 3y + 4z + 5u = 39 & 1 & & 1 & -2x \quad - y + u = 0 \\
5x + 4y + 3z + 2u = 30 & & 1 & & -4x + 13y - u = 17 \\
3x - 5y + 2z + 3u = 11 & & & 2 &
\end{array}$$

We zien nu dat de vergelijkingen $\left\{\begin{array}{l} 2x + y - u = 1 \\ -2x - y + u = 0 \end{array}\right.$ strijdig zijn

Het stelsel vergelijkingen is dus niet oplosbaar.

Als een vraagstuk bestaat uit onderling strijdige vergelijkingen, dan noemen we het vraagstuk onmogelijk. Er zijn dan geen wortels die aan de vergelijkingen tegelijkertijd voldoen.
Is een stelsel vergelijkingen afhankelijk dan zijn er oneindig veel wortels die aan de vergelijking voldoen.
Willen we nu nagaan of vergelijkingen met meer onbekenden, afhankelijk of strijdig zijn, dan elimineren we een van de onbekenden.
Zijn van de komende vergelijkingen er twee strijdig of afhankelijk, dan is ook het oorspronkelijke stelsel strijdig of afhankelijk.

Ter oefening maken de opgaven 241 t/m 245.
Oplossingen inzenden van de opgaven 246 t/m 250.

R.T.

Algebra, Les 26 Nadruk verboden 51

HILVERSUM

26,1 Wortelgrootheden.

Onder de tweedemachtswortel uit een getal verstaat men een ander getal dat tot de tweede macht gebracht het eerste getal oplevert.
We kunnen dit verder uitbreiden dan alleen tot de tweedemachtswortel. Bekijken we de gelijkheid $2^3 = 8$, dan blijkt dus dat we 2 tot de derde macht moeten verheffen om 8 te krijgen, m.a.w. 2 is de derdemachtswortel uit 8. Algemeen kunnen we de volgende definitie opstellen.
Definitie: Onder de n^{de} machtswortel uit een getal verstaat men een ander getal, dat tot de n^{de} macht gebracht het eerste getal oplevert.
We geven de zogenaamde macht van de wortel aan door een getal in het wortelteken te schrijven bv. $\sqrt[2]{x},\ \ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[n]{x}$ enz.
Het is de gewoonte om de tweedemachtswortel zonder getal te schrijven.
De afspraak luidt dus: indien in het wortelteken geen getal voorkomt, wordt altijd de tweedemachtswortel bedoeld. Het cijfer dat in het wortelteken staat heet de wortelexponent.

Wortels die dezelfde wortelexponent hebben, noemen we gelijknamige wortels. Men dient er goed op te letten dat de worteltrekking een bewerkingsmethode is zoals optellen, vermenigvuldigen enz. Er moet dus altijd aangegeven worden waar de wortelbewerking op moet worden toegepast, of zoals we liever zeggen, uit welk getal de wortel getrokken moet worden, dus: $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[7]{b^2}$ enz.
Uit deze voorbeelden zien we dat deze wortelvormen ongelijke wortelexponenten bezitten.
Wij noemen ze ongelijknamige wortels.
Is het mogelijk om de wortel uit een getal te bepalen, m.a.w. is het getal onder het wortelteken tot dezelfde macht te brengen als de wortelexponent aangeeft, dan is de wortelvorm herleidbaar.
Dit geldt natuurlijk niet voor alle wortelvormen. Zo is de vorm $\sqrt[3]{a^2b}$ niet herleidbaar, maar $\sqrt[3]{a^3b^4}$ wel, nl. $\sqrt[3]{a^3b^4} = ab\sqrt[3]{b}$.

We gaan nu eerst enige bepalingen geven over de getalbegrippen:

1e Is een getal voor te stellen als een geheel of gebroken getal, dan noemen we het getal een meetbaar getal, is dit niet mogelijk dan heet het getal onmeetbaar.
Onmeetbare getallen zijn bv: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$ enz.

2e Wordt een getal zonder wortelteken uitgedrukt, dan heet dit getal rationaal, wordt het getal met wortelteken uitgedrukt, dan heet het getal irrationaal.

Eigenschap: Een wortel uit een product is gelijk aan het product van de gelijknamige wortels uit de factoren onder het wortelteken:

bv: $\sqrt[3]{a^2bc} = \sqrt[3]{a^2} \,.\, \sqrt[3]{b} \,.\, \sqrt[3]{c}$

$\sqrt[n]{pq} = \sqrt[n]{p} \,.\, \sqrt[n]{q}$

Omgekeerd mogen we ook zeggen:
Het product van enige gelijknamige wortels is gelijk aan de gelijknamige wortel uit het product van de getallen onder de worteltekens.

bv: $\sqrt[5]{a^2} \,.\, \sqrt[5]{b^3} \,.\, \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{8a^2b^3}$

$\sqrt[n]{p} \times \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{pq}$

<u>Eigenschap:</u> Een product wordt tot een macht gebracht, door elke factor tot die macht te brengen, dus:

$\left(\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b}\,.\,\sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3.\left(\sqrt[3]{b}\right)^3.\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = a.b.c.$

Van deze eigenschap maken we gebruik om zoveel mogelijk factoren voor het wortelteken te brengen.

$\sqrt[5]{a^{12}b^6} = \sqrt[5]{a^{10}b^5a^2b} = \sqrt[5]{(a^2)^5b^5}\ \ \sqrt[5]{a^2b} = a^2b\sqrt[5]{a^2b}.$

$\sqrt[3]{a^{14}b^{25}} = \sqrt[3]{(a^4)^3(b^8)^3a^2b} = a^4b^8\sqrt[3]{a^2}b.$

Men dient er goed op te letten dat het wortelteken over de gehele vorm waaruit de wortel getrokken moet worden wordt geplaatst. Een andere methode is het wortelteken voor de vorm te plaatsen en de vorm waaruit de wortel getrokken moet worden tussen haakjes. Van deze laatste methode zullen we ons bedienen indien de vormen groot zijn bv: $\sqrt[3]{}(a^8b^4c^5d^2e^9) = a^2bce^3\sqrt[3]{}(a^2bc^2d^2)$.

Het is omgekeerd ook mogelijk om factoren die voor het wortelteken staan onder het wortelteken te brengen door het getal dat voor de wortel staat onder de wortel te plaatsen waarbij de exponent van het getal vermenigvuldigd wordt met de wortelexponent bv:
$ab^2\sqrt[5]{c^2d} = a^5b^{10}c^2d.$

<u>Eigenschap:</u> Een wortel uit een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de gelijknamige wortels uit deeltal en deler.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt om wortels uit breuken te herleiden. Een wortel uit een breuk is herleid als er onder het wortelteken geen breuk meer voorkomt en zoveel factoren als mogelijk voor het wortelteken zijn gebracht.

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}\ ; \qquad \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\ ;$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{c^4d^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^3b^2cd^3}{c^5d^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^2cd^3}}{\sqrt[5]{c^5d^5}} = \frac{1}{cd}\sqrt[5]{a^3b^2cd^3}$$

We kunnen deze laatste eigenschap ook omgekeerd gebruiken nl: het quotiënt van twee gelijknamige wortels is gelijk aan de gelijknamige wortel uit het quotiënt van de getallen onder de worteltekens.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}; \qquad \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{a^2}} = \sqrt[5]{a^2}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^7bc^{10}}}{\sqrt[3]{a^4b^5c^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^7bc^{10}}{a^4b^5c^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3c^7}{b^4}} = \frac{ac^2}{b}\sqrt[3]{bc}\,.$$

Ter oefening maken de opgaven 251 t/m 255.
Oplossingen inzenden van de opgaven 256 t/m 260.

R.T.

Algebra, Les 27 Nadruk verboden 53

Vervolg wortelvormen.

27,1. Eigenschap: De waarde van een wortel verandert niet als men de exponent van de macht en de wortelexponent met eenzelfde getal vermenigvuldigt, of door eenzelfde getal deelt.

vb: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[9]{6}$; $\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{\boldsymbol{a^{pn}}}$ **.**

van vermenigvuldigen van de exponenten maken we gebruik om wortels gelijknamig te maken, waarna vermenigvuldiging, deling, aftrekking of optelling van de wortelvormen mogelijk is.

$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[5]{b^2}\,\sqrt{c} = \sqrt[30]{a^{10}}\,\sqrt[30]{b^{12}}\,\sqrt[30]{c^{15}} = \sqrt[\mathbf{30}]{\boldsymbol{a^{10}b^{12}c^{15}}}$.

Van het delen van de exponenten maken we gebruik om wortelvormen te vereenvoudigen.

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$; $\sqrt[2n]{a^{mn}} = \sqrt{\boldsymbol{a^m}}$.

Eigenschap: de p^{de} machtswortel uit de q^{de} machtswortel van een getal is gelijk aan de pq^{de} machtswortel van het getal.

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{a}\right)} = \sqrt[pq]{\boldsymbol{a}} \ ;$$

vb: $\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a}\right)} = \sqrt[\mathbf{15}]{\boldsymbol{a}}$; $\sqrt[7]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[\mathbf{14}]{\boldsymbol{a^3}}$.

27,2. Wortels uit algebraïsche getallen.

De tweede machtswortel uit 4 is $+2$ en -2, omdat $(+2)^2 = 4$ en $(-2)^2 = 4$.
In het algemeen geldt dat evenmachtswortels uit positieve getallen twee waarden hebben en wel een positieve en een negatieve waarde.
Moeten we een evenmachtswortel trekken uit een getal dan moeten we de twee waarden die hieruit kunnen ontstaan beiden vermelden.
We doen dit door het plus- en het minteken boven elkaar te plaatsen, bv. $\sqrt{16} = \pm 4$. (Denk erom, dit heeft niet de betekenis 'plusminus', hetgeen ongeveer 4 zou betekenen, we spreken het uit als: plus- of min 4. Voor 'ongeveer gelijk aan', gebruiken we meestal het teken $\approx$).
Evenmachtswortels uit negatieve getallen bestaan niet, omdat we geen getal kunnen vinden dat tot een even macht gebracht negatief is. dit zijn zogenaamde onbestaanbare- of imaginaire*[5] getallen.
In tegenstelling met de imaginaire getallen noemt men alle andere getallen reële getallen.
De onevenmachtswortels uit een positief getal geeft als antwoord slechts één waarde en wel een positieve. De onevenmachtswortel uit een negatief getal geeft eveneens slechts één waarde als uitkomst, maar deze is negatief.
Zo is: $\sqrt[3]{8} = 2$ omdat $2^3 = 8$ en $\sqrt[3]{-8} = -2$ omdat $(-2)^3 = -8$.

We zullen nu van de diverse genoemde eigenschappen in deze les een aantal voorbeelden uitwerken.
Voorbeeld 1: Herleid de volgende wortelvorm:

$\sqrt[5]{\dfrac{pq}{p^3q^2r^3s^7}}$ omdat we van de factoren in de noemer machten moeten maken waarvan de exponenten 5 of een veelvoud van 5 moeten zijn, heeft het weinig zin om door de factoren p en q te delen, daar we dan toch weer met diezelfde factoren moeten vermenigvuldigen. We vinden nu:

$$\sqrt[5]{\frac{pq}{p^3q^2r^3s^7}} = \sqrt[5]{\frac{p^3q^4r^2s^3}{p^5q^5r^5s^{10}}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{pqrs^2}}\sqrt[5]{\boldsymbol{p^3q^4r^2s^3}} \ .$$

---

[5] Zie voor imaginaire getallen les 36. (FV)

We merken op dat we van de factor s^7 eerst s^5 hadden kunnen afsplitsen en deze voor het wortelteken hadden kunnen brengen. We hielden dan nog s^2 in de noemer over, waarna we de teller en noemer nog met s^3 hadden moeten vermenigvuldigen. Dit hebben we nu ook gedaan, zodat we zien dat deze methode vlugger gaat dan de methode om eerst eventueel iets onder het wortelteken uit te halen.

<u>Voorbeeld 2:</u>

Herleid de vorm: $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^4-1}}$

We merken hier op dat de teller en de noemer gedeeld kunnen worden door de factor x^2-1.
Deze factor verdwijnt nu geheel, ook in de noemer als volgt:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^4-1}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x^2-1)(x^2+1)}}=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}\,.$$

<u>Voorbeeld 3:</u>

Herleid de vorm: $5x\sqrt[a]{\dfrac{25}{x^2}}$

We zien in deze vorm dat de wortelexponent geen bekend getal is. Willen we nu de wortel herleiden, dan moet dus de exponent van het getal in de noemer gelijk aan a worden gemaakt.
Nu is $x^2\,.\,x^{a-2}=x^a$, in woorden:
De noemer x^2 moeten we met x^{a-2} vermenigvuldigen om x^a te krijgen. Voeren we deze bewerking uit dan vinden we:

$$\sqrt[a]{\frac{25}{x^2}}=5x\sqrt[a]{\frac{25x^{a-2}}{x^a}}=\frac{5x}{x}\sqrt[a]{25x^{a-2}}=5\sqrt[a]{25x^{a-2}}\,.$$

Het was ook mogelijk geweest om de x waarde die voor de wortel staat onder de wortel te brengen waarbij we er goed op moeten letten dat de exponent van een getal dat we onder een wortel brengen, vermenigvuldigd moet worden met de wortelexponent bv:

$$5x\sqrt[a]{\frac{25}{x^2}}=5\sqrt[a]{\frac{25x^a}{x^2}}=\boldsymbol{5\sqrt[a]{25x^{a-2}}}\,.$$

<u>Voorbeeld 4:</u>

Herleid de volgende vorm: $\sqrt[p]{\dfrac{a^q}{b^r}}$

In deze samengestelde vorm moet dus de term b^r in de vorm b^p geschreven worden. We vinden dat $b^r\,.\,b^{p-r}=b^p$. Teller en noemer onder het wortelteken vermenigvuldigen we dus met b^{p-r} als volt:

$$\sqrt[p]{\frac{a^q.\,b^{p-r}}{b^p}}=\boldsymbol{\frac{1}{b}\sqrt[p]{a^q.\,b^{p-r}}}\,.$$

Ter oefening maken de opgaven 261 t/m 265.
Oplossingen inzenden van de opgaven 266 t/m 270.

R.T.

Hoofdbewerkingen met wortelvormen.

28,1. Optelling en aftrekking.

De som of het verschil van twee gelijksoortige wortels wordt bepaald door de factoren voor het wortelteken op te tellen of af te trekken en die uitkomst met de gelijksoortige wortel te vermenigvuldigen. Indien de wortels niet gelijksoortig zijn, dan kunnen zij soms gelijksoortig worden gemaakt. Zijn ongelijksoortige wortels niet gelijksoortig te maken dan kan men de som of het verschil dus niet eenvoudiger voorstellen.

Voorbeelden:

$a.)\ 7\sqrt{2}+12\sqrt{2}-3\sqrt{2}-8\sqrt{2}=\mathbf{8\sqrt{2}}\,.$

$b.)\ \sqrt[3]{a^2b^5c^5}+\sqrt[3]{a^5b^2c^5}-\sqrt[3]{a^5b^5c^2}=bc\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+ac\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-ab\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=$

$=(bc+ac-ab)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,.$

$c.)\ \sqrt{\dfrac{p}{q}}-3\sqrt[4]{\dfrac{p^2}{q^6}}+8\sqrt[6]{\dfrac{8p^3}{q^9}}=\sqrt{\dfrac{p}{q}}-3\sqrt{\dfrac{p}{q^3}}+8\sqrt{\dfrac{2p}{q^3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{q}\sqrt{pq}-\dfrac{3}{q^2}\sqrt{pq}+\dfrac{8}{q^2}\sqrt{2pq}}\,.$

In dit voorbeeld zien we dat niet alle wortels gelijksoortig zijn. Voor $\sqrt{2pq}$ kunnen we echter schrijven $\sqrt{2}\,.\sqrt{pq}$.

We vinden dan:

$$\left(\frac{1}{q}-\frac{3}{q^2}+\frac{8\sqrt{2}}{q^2}\right)\sqrt{pq}=\frac{1}{q^2}\left(q-3+8\sqrt{2}\right)\sqrt{pq}\,.$$

$d.)\ a\sqrt{(16a+32)}-\sqrt{(a-2)(a^2-4)}+\sqrt{\{(9a^2+36a+36)(a+2)\}}=$

$=a\sqrt{\{4^2(a+2)\}}-\sqrt{\{(a-2)(a-2)(a+2)\}}+\sqrt{\{3^2(a^2+4a+4)\times(a+2)\}}=$

$=4a\sqrt{(a+2)}-(a-2)\sqrt{(a+2)}+3(a+2)\sqrt{(a+2)}=$

$=\{4a-(a-2)+3(a+2)\}\sqrt{(a+2)}=(4a-a+2+3a+6)\sqrt{a+2}=$

$=(6a+8)\sqrt{a+2}=\mathbf{2(3a+4)\sqrt{a+2}}\,.$

$e.)\ 6a\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}-3b\sqrt[3]{\dfrac{y^2z^3}{x}}+3c\sqrt[3]{\dfrac{y^8}{x^7}}=6a\sqrt[3]{\dfrac{x^2y^2}{y^3}}-3bz\sqrt[3]{\dfrac{x^2y^2}{x^3}}+\dfrac{3cy^2}{x^2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2y^2}{x^3}}=$

$=\dfrac{6a}{y}\sqrt[3]{x^2y^2}-\dfrac{3bz}{x}\sqrt[3]{x^2y^2}+\dfrac{3cy^2}{x^3}\sqrt{x^2y^2}=$

$=\left(\dfrac{6a}{y}-\dfrac{3bz}{x}+\dfrac{3cy^2}{x^3}\right)\sqrt[3]{x^2y^2}.$

R.T.

56 Aa Nadruk verboden

28,2. Vermenigvuldiging.

We hebben reeds gezien dat wortelvormen te vermenigvuldigen zijn, als de wortels gelijknamig zijn. We leerden nl. dat het product van enige gelijknamige wortels gelijk is aan de gelijknamige wortel uit het product van de getallen onder de worteltekens. Zijn de wortels van een product niet gelijknamig dan dienen we de wortels eerst gelijknamig te maken. Wordt een veelterm, waarin wortelvormen voorkomen, vermenigvuldigd met een wortelvorm dan moeten we er dus goed op letten dat we de wortels steeds gelijknamig maken.

Voorbeeld: $\sqrt[3]{a}\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a^2}=$

$$=\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{a^2}.\sqrt[6]{a^3}+.\sqrt[3]{a^3}=\boldsymbol{\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{5}+a.}$$

Twee veeltermen die wortelvormen bevatten vermenigvuldigen we met elkaar op dezelfde manie als in het voorgaande: steeds maken we de wortelvormen bij het vermenigvuldigen gelijknamig.
Voorbeeld:

$$\begin{array}{llll}
2\sqrt{ab} & +3\sqrt{ac} & -2\sqrt{bc} & \\
\sqrt{ab} & -\sqrt{ac} & +\sqrt{bc} & \\
\hline
2ab & +3a\sqrt{bc} & -2b\sqrt{ac} & \\
 & -2a\sqrt{bc} & & -3ac+2c\sqrt{ab} \\
 & & +2b\sqrt{ac} & +3c\sqrt{ab}-2bc \\
\hline
2ab & +a\sqrt{bc} & & -3ac+5c\sqrt{ab}-2bc
\end{array}$$

We hadden de factoren ook achter elkaar kunnen schrijven en dan de vermenigvuldiging uitvoeren nl:

$\left(2\sqrt{ab}+3\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}\right)\left(\sqrt{ab}-\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)=$
$=2ab\ +3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}-2a\sqrt{bc}-3ac+2c\sqrt{ab}+2b\sqrt{ac}+3c\sqrt{ab}-2bc=$
$=\boldsymbol{2ab\ +a\sqrt{bc}-3ac+5c\sqrt{ab}\ -2bc.}$

Voorbeeld: $\left(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}+\sqrt[5]{a^3b^4}\right)\left(\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[3]{ab^2}\right)=$

$\sqrt[3]{a^2b}.\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[3]{a^2b}.\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt{ab}.\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt{ab}.\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[5]{a^3b^4}.\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[5]{a^3b^4}.\sqrt[4]{ab^3}=$

$=\sqrt[12]{a^8b^4a^3b^9}-\sqrt[3]{a^3b^3}-\sqrt[4]{a^2b^2ab^3}+\sqrt[6]{a^3b^3a^2b^4}+\sqrt[20]{a^{12}b^{16}a^5b^{15}}-\sqrt[15]{a^9b^{12}a^5b^{10}}=$

$=\sqrt[12]{a^{11}b^{13}}-ab-\sqrt[4]{a^3b^5}+\sqrt[6]{a^5b^7}+\sqrt[20]{a^{17}b^{31}}-\sqrt[15]{a^{14}b^{22}}=$

$=\boldsymbol{b\sqrt[12]{a^{11}b}-ab-b\sqrt[4]{a^3b}+b\sqrt[6]{a^5b}+b\sqrt[20]{a^{17}b^{11}}-b\sqrt[15]{a^{14}b^7}}\,.$

De merkwaardige producten kunnen we ook bij de wortelvormen toepassen, hetgeen we weer met enige voorbeelden zullen aantonen.

1e. $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^5=7-5=\mathbf{2.}$

2e. $\left\{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{11}-2\right)\right\}\left\{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{11}-2\right)\right\}=$

$=\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{11}-2\right)^2=\left(7+3+5-2\sqrt{21}+2\sqrt{35}-2\sqrt{15}\right)-\left(11+4-4\sqrt{11}\right)=$

$=15-2\sqrt{21}+2\sqrt{35}-2\sqrt{15}-15+4\sqrt{11}\ =\ \boldsymbol{4\sqrt{11}-2\sqrt{15}-2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}\,.$

3e. $\sqrt[4]{12+\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{12-\sqrt{19}}\times\sqrt{5}=\sqrt[4]{\left(12+\sqrt{19}\right)\left(12-\sqrt{19}\right)}\times\sqrt{5}=$

$\sqrt[4]{144-19}\times\sqrt{5}=\sqrt[4]{125}\times\sqrt[4]{5^2}=\boldsymbol{5\sqrt[4]{5}}\,.$

Ter oefening maken de opgaven 271 t/m 275.
Oplossingen inzenden van de opgaven 276 t/m 279.

29,1. Deling van wortelvormen.

In de wiskunde geldt de afspraak dat we nimmer wortels in de noemer van een breuk laten staan. Ook een breuk onder een wortelteken moet weggewerkt worden. We dienen er dus goed op te letten dat een vraagstuk nog niet is beëindigd als één van de twee hierboven genoemde gevallen voorkomt. We onderscheiden hierbij twee gevallen:

1^e^ Er staat een eenterm in de noemer.
2^e^ Er staat een twee- of veelterm in de noemer.

In het tweede geval beperken we ons tot tweede machtswortels. Om hierbij de noemer rationaal (wortelvrij) te maken, maken we gebruik van de merkwaardige producten en van de eigenschap dat teller en noemer van een breuk met hetzelfde getal vermenigvuldigd mogen worden.
Het eerste geval is in de voorgaande lessen reeds behandeld zodat we ons nu zullen beperken tot het tweede geval en hiervan enige voorbeelden zullen geven.

Voorbeeld 1:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}=\frac{2\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{18-6}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\,(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{12}=\frac{\mathbf{6+2\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}=\frac{\mathbf{3+\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}.$$

Voorbeeld 2:

$$\frac{a-\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{\left(a-\sqrt{ab}\right)\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)}{\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+2a\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-2ab}{(a+b)^2-\left(2\sqrt{ab}\right)^2}=\frac{a^2-ab+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}}{a^2+2ab+b^2-4ab}=$$

$$=\frac{a(a-b)+\sqrt{ab}(a-b)}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)\left(a+\sqrt{ab}\right)}{(a-b)^2}=\frac{\boldsymbol{a+\sqrt{ab}}}{\boldsymbol{a-b}}.$$

Indien de noemer van een breuk meer termen bevat dan twee, dan is het ook mogelijk om de noemer wortelvrij te maken, indien we hierbij de merkwaardige producten weer toepassen en dan stap-voor-stap de vorm uitwerken.

Voorbeeld 1:

$$\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right\}\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right\}}=$$

$$=\frac{12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(2+2\sqrt{6}+3\right)-5}=\frac{12\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\mathbf{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}.$$

Zoals we in dit voorbeeld zien, hebben we de teller zo lang mogelijk in factoren laten staan in de hoop op een gegeven moment een factor te kunnen wegdelen. Zoals uit het voorbeeld blijkt, is dit ook gelukt, hetgeen ons dus voordeel heeft opgeleverd.

Voorbeeld 2:

$$\frac{4+\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\frac{(4+\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-6}=\frac{(4+\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})}{8+2\sqrt{5}-6}=$$

$$=\frac{(4+\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})}{2(1+\sqrt{15})}=\frac{(4+\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(1-\sqrt{15})}{2(1-15)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(-11-3\sqrt{15})}{-28}=\frac{1}{28}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(11+3\sqrt{15})=$$

$$=\frac{1}{28}(11\sqrt{3}+11\sqrt{5}-11\sqrt{6}+9\sqrt{5}+15\sqrt{3}-9\sqrt{10})=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{28}(26\sqrt{3}+20\sqrt{5}-11\sqrt{6}-9\sqrt{10})}.$$

Voorbeeld 3:

$$\frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2-\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}}=$$

In dit voorbeeld kunnen we met de noemer verschillende combinaties maken. Nemen we echter de eerste en de vierde term bij elkaar en de tweede en de derde term, dan zien we in het dubbel product van die vormen de vorm $2\sqrt{15}$ in beide met tegengesteld teken tevoorschijn komen, die dan tegen elkaar wegvallen.
Hadden we deze combinaties niet zo gekozen, dan was de berekening veel langer geworden.
Het verdient dus aanbeveling het vraagstuk eerst goed te bekijken voordat we er mee gaan werken. De tijd die we hier dan besteden, komt meestal met rente weer terug. We gaan nu de vorm uitwerken als volgt:

$$=\frac{(2+\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15})(2-\sqrt{15}+\sqrt{3}-2\sqrt{5})}{\{(2-\sqrt{15})-(\sqrt{3}-2\sqrt{5})\}\{(2-\sqrt{15})+(\sqrt{3}-2\sqrt{15})\}}=$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{15})\,(2+\sqrt{3}-2\sqrt{5}-\sqrt{15})}{(2-\sqrt{15})^2-(\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2}=$$

We zien dat de teller ook een merkwaardig product is, zodat we deze keer de teller direct uit gaan werken:

$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5}+\sqrt{15})^2}{(4-4\sqrt{15}+15)-(3-4\sqrt{15}+20)}=\frac{(4+4\sqrt{3}+3)-(20+20\sqrt{3}+15)}{(19-4\sqrt{15})-(23-4\sqrt{15})}=$$

$$=\frac{(7+4\sqrt{3})-(35+20\sqrt{3})}{19-4\sqrt{15}-23+4\sqrt{15}}=\frac{7+4\sqrt{3}-35-20\sqrt{3}}{-4}=$$

$$=\frac{-28-16\sqrt{3}}{-4}=\boldsymbol{7+4\sqrt{3}}\,.$$

Ter oefening maken de opgaven 280 t/m 284.
Oplossingen inzenden van de opgaven 285 t/m 290.

30,1. Vierkantswortel uit tweetermen van de gedaante: $a \pm b\sqrt{c}$.

Indien de wortel uit een getal niet te trekken is, dan noemen we deze wortelvorm een onmeetbaar getal.
Als twee tweetermen, ieder bestaande uit een meetbaar en een onmeetbaar getal aan elkaar gelijk zijn, dan moeten de meetbare en ook de onmeetbare delen aan elkaar gelijk zijn. We zullen dit met een zeer eenvoudig voorbeeld aantonen. Hebben we de volgende gelijkheid x boeken $+ y$ schriften $= 5$ boeken $+3$ schriften dan is het een ieder zonder meer duidelijk, dat moet gelden: $x = 5$ en $y = 3$, omdat boeken en schriften verschillende grootheden zijn die men niet kan verwisselen.
Evenzo is het met de meetbare en onmeetbare getallen. Hebben we bijvoorbeeld de gelijkheid: $p + \sqrt{q} = 3 + \sqrt{5}$, dan is $p = 3$ en $q = 5$.

Verheffen we een tweeterm die uit twee onmeetbare getallen bestaat in het kwadraat, dan vinden we een andere tweeterm die bestaat uit een meetbaar en een onmeetbaar getal.

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}\,.$$
$$\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{14} + 2 = 9 - 2\sqrt{14}\,.$$

Willen we nu omgekeerd de wortel trekken uit een tweeterm met een meetbaar en een onmeetbaar getal dan gaan we als volgt te werk:
We stellen de wortel uit de gegeven tweeterm gelijk aan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, indien de gegeven tweeterm een som is en gelijk aan $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ indien de gegeven tweeterm een verschil is.
Verheffen we beide leden in het kwadraat, dan komt er in beide leden van de gelijkheid een meetbaar en een onmeetbaar getal. We stellen dan de meetbare getallen aan elkaar gelijk en eveneens de onmeetbare, waardoor twee vergelijkingen in x en y, dus met twee onbekenden ontstaan.
Hieruit zijn x en y op te lossen.

Voorbeeld 1: Herleid $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

Stel $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ kwadrateren geeft:

$$5 + 2\sqrt{6} = x + y + 2\sqrt{xy}\,.$$

Nu is dus $x + y = 5$ en $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$

Hoewel $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$ aan beide kanten deelbaar is door 2 zullen we de vorm toch in deze gedaante laten staan, daar dit bij de oplossing voordelen biedt, zoals we zullen zien.
We gaan beide vergelijkingen kwadrateren en trekken die van elkaar af.

$$\begin{array}{rl} x^2 + 2xy + y^2 &= 25 \\ 4xy \quad\;\; &= 24 \quad - \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 &= 1 \end{array}$$

Of $(x - y)^2 = 1$ dus $x - y = 1$. (we nemen altijd alleen de positieve oplossing.)
We hebben dus gevonden:

$$\begin{array}{ll} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \quad + \\ \hline 2x &= 6 \text{ dus } x = 3 \text{ en } y = 2 \end{array}$$

Dus is $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \boldsymbol{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

<u>Voorbeeld 2:</u> Herleid $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ Stel: $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.
$14-6\sqrt{5} = x+y-2\sqrt{xy}$ dus: $x+y=14$ en $2xy = 6\sqrt{5}$

Kwadrateren geeft:
$$\begin{array}{rl} x^2+2xy+y^2 &= 196 \\ 4xy &= 180 \quad - \\ \hline x^2-2xy+y^2 &= 16 \end{array} \quad \rightarrow \quad (x-y)^2 = 16 \text{ dus: } x-y=4$$

We vinden:
$$\begin{array}{rl} x+y &= 14 \\ x-y &= 4 \quad + \\ \hline 2x &= 18 \end{array}$$
of $x=9$ en $y=5$ → Dus: $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{9}-\sqrt{5} = \mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}}$.

Niet iedere wortel uit een tweeterm is oplosbaar. Om niet na onnodig veel rekenwerk tot de conclusie te komen dat de vorm onoplosbaar is, bestaat er een methode om dit direct te onderzoeken. Beschouwen we het laatste voorbeeld nog eens, dan zien we dat na het kwadrateren van de vormen $x+y=14$ en $2\sqrt{xy}=6\sqrt{5}$, het verschil van de kwadraten der getallen 14 en $6\sqrt{5}$ een volkomen kwadraat moet zijn, daar anders uit $(x-y)^2=16$ de wortel uit het rechterlid niet te trekken is en de vorm dan niet vereenvoudigd kan worden. Nu zijn de getallen 14 en $6\sqrt{5}$ juist de getallen die onder het wortelteken staan. Samengevat kunnen we dus zeggen:

De vorm $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$ is te herleiden indien a^2-b^2c een volkomen kwadraat is. We moeten dit dan ook altijd eerst onderzoeken voordat we tot de oplossing overgaan.
We gaan nu nog een samengesteld voorbeeld bekijken.

<u>Herleid:</u> $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}}$. Eerst gaan we het gedeelte $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ vereenvoudigen.

Onderzoeken we of dit mogelijk is, dan vinden we: $(19)^2-\left(8\sqrt{3}\right)^2 = 361-192 = 196 = 13^2$.
Dus een volkomen kwadraat. Stel: $\sqrt{19+8\sqrt{3}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Dan is: $19+8\sqrt{3} = x+y+2\sqrt{xy}$ dus: $x+y=19$ en $2\sqrt{xy=8\sqrt{3}}$

$$\begin{array}{rl} x^2+2xy+y^2 &= 361 \\ 4xy &= 192 \quad - \\ \hline x^2-2xy+y^2 &= 169 \end{array} \qquad (x-y)^2 = 169 \text{ dus } x-y=13.$$

Dus:
$$\begin{array}{rl} x+y &= 19 \\ x-y &= 13 \, + \\ \hline 2x &= 32 \end{array}$$
→ $x=16$ en $y=3$ dus is $\sqrt{19+8\sqrt{3}} = \sqrt{16}+\sqrt{3} = 4+\sqrt{3}$.

We vinden nu: $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3}+4+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

We onderzoeken of deze vorm nog herleidbaar is als volgt: $(4)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16-12 = 4 = 2^2$.
Dus herleidbaar. Stel: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
Dan is: $4+2\sqrt{3} = x+y+2\sqrt{xy}$ of $x+y=4$ en $2\sqrt{xy}=2\sqrt{3}$

Kwadrateren:
$$\begin{array}{rl} x^2+2xy+y^2 &= 16 \\ 4xy &= 12 \quad - \\ \hline x^2-2xy+y^2 &= 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad (x=y)^2 = 4 \text{ of } x-y=2$$

We vinden nu:
$$\begin{array}{rl} x+y &= 4 \\ x-y &= 2 \, + \\ \hline 2x &= 6 \end{array}$$
→ $x=3$ *en* $y=1$

Dus is: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+\sqrt{1} = \sqrt{3}+1$

Dus de oplossing is: $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}} = \sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}$.

Ter oefening maken de opgaven 291 t/m 295.
Oplossingen inzenden van de opgaven 296 t/m 300.

31,1. Vervolg van de vierkantswortel uit tweetermen van de gedaante: $a \pm b\sqrt{c}$.

De oplossingen in de voorgaande les gegeven, zijn tamelijk uitgebreid.
In deze les zullen we leren hoe de meeste van deze vraagstukken veel sneller opgelost kunnen worden. we maken hierbij gebruik van de merkwaardige producten.
In de vorige les hebben we als voorbeeld genomen de opgave $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.
We nemen deze oplossing nog eens gedeeltelijk over als volgt:
Stel: $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
Kwadrateren geeft: $x + y + 2\sqrt{xy} = 5 + 2\sqrt{6}$.
Dus is $x + y = 5$ en $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$.

We redeneren nu als volgt verder:
Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan 5 en het product gelijk aan 6. ($x + y$ moet 5 zijn en xy moet 6 zijn.) De getallen zijn 2 en 3, dus $x = 2$ en $y = 3$ of andersom, doch dit is niet belangrijk, indien we een som van twee getallen moeten hebben nl. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.
De oplossing wordt dus: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Was de oplossing gevraagd van $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$, dan was de oplossing identiek gegaan. We kunnen nu echter twee oplossingen vinden nl. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ en $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, dus juist tegengesteld aan elkaar, doch dit klopt, daar de oplossing van een vierkantswortel altijd twee oplossingen geeft en wel een positieve en een negatieve.
Bij deze opgaven nemen we echter slechts één oplossing en wel de positieve. We maken dus de afspraak, het grootste getal altijd voorop te zetten.
We zien dus indien we de opgave $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ nog eens bekijken, dat we twee getallen zochten waarvan de som 5 was en het product 6. Deze getallen waren 2 en 3.
We schrijven nu: $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\sqrt{6}+2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{6} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} =$
$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
De vorm onder het wortelteken wordt dus omgewerkt tot het merkwaardige product $(a+b)^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$.
Daarom is de eis die bij deze vorm gesteld wordt, dat er voor het wortelteken dat onder de totale wortel staat, een 2 staat (nl. van het dubbele product).
Staat er geen 2 voor dit wortelteken, dan moeten we die er zelf inwerken.

Voorbeeld: $\sqrt{4-\sqrt{15}}$ (dit is opgave 294).
Onderzoek eerst of de wortel herleidbaar is. Dan moet $4^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2$ dus het verschil der kwadraten een volkomen kwadraat zijn. Dit is hier het geval daar $16 - 15 = 1$ een volkomen kwadraat is.
Voor de vorm $\sqrt{15}$ moet nu de factor 2 komen, dit kunnen we doen door de vorm met twee te vermenigvuldigen en weer door twee te delen, als volgt:

$$\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{2}}$$

Bij deze methode krijgen we echter een breuk onder de wortel, hetgeen we kunnen vermijden door teller en noemer met 4 te vermenigvuldigen, waardoor een nadere herleiding aan het einde overbodig wordt. We vinden dus:

$$\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{16-4\sqrt{15}}{4}} = ½\sqrt{16-4\sqrt{15}} = ½\sqrt{16-2\sqrt{60}}\,.$$

We zoeken nu twee getallen waarvan de som gelijk is aan 16 en het product gelijk aan 60.
Deze getallen zijn 10 en 6, dus vinden we:

½ $\sqrt{16-2\sqrt{60}} =$ ½ $\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$.

Voorbeeld: $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$: Herleidbaar, want $49-45=4$ is een volkomen kwadraat.

$\sqrt{7-3\sqrt{5}} =$ ½$\sqrt{28-12\sqrt{5}} =$ ½$\sqrt{28-2\sqrt{180}} =$ ½$\left(\sqrt{18}-\sqrt{10}\right) =$ ½$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$.

Voorbeeld: $\sqrt{ax-2a\sqrt{ax-a^2}}$ (dit is opgave 294)
$a^2x^2-4a^2(ax-a^2)=a^2x^2-4a^3x+4a^4=a^2(x^2-4ax+4a^2)=a^2(x^2-2a)^2$
is een volkomen kwadraat, dus herleidbaar.

$\sqrt{ax-2\sqrt{a^2(ax-a^2)}}$. Onder het wortelteken staat reeds een product, dat eventueel nog anders geschreven kan worden, bv. a of a^2 in de haakjes werken enz.
Nu is echter $a^2+ax-a^2=ax$, dus het eerste getal.
We vinden nu dat:

$\sqrt{ax-2\sqrt{a^2(ax-a^2)}} = \sqrt{a^2}-\sqrt{ax-a^2} = a-\sqrt{ax-a^2}$.

Voorbeeld: $\sqrt[4]{175-100\sqrt{3}}$. Deze vorm is te beschouwen als: $\sqrt{\sqrt{175-100\sqrt{3}}}$.
Indien mogelijk moeten we dus de tweemaal de herleiding toepassen, zodat we de vorm in twee gedeelten uit gaan werken als volgt:

$\sqrt{175-100\sqrt{3}}$ is herleidbaar want het verschil der kwadraten $30625-30000=625=25^2$, is een volkomen kwadraat.

$\sqrt{175-100\sqrt{3}} = \sqrt{175-2\sqrt{7500}} = \sqrt{100}-\sqrt{75} = 10-5\sqrt{3}$.

We vinden dus dat:

$\sqrt[4]{175-100\sqrt{3}} = \sqrt{10-5\sqrt{3}}$.

Deze laatste vorm is verder herleidbaar, daar $100-75=25$ een volkomen kwadraat is, aldus:

$\sqrt{10-5\sqrt{3}} =$ ½$\sqrt{40-2\sqrt{300}} =$ ½$\left(\sqrt{30}-\sqrt{10}\right)$.

Hebben we een som of een verschil van twee wortelvormen van de gedaante $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$ die ieder op zich niet herleidbaar zijn, dan is de vorm soms wel eenvoudiger te schrijven, hetgeen we met een voorbeeld zullen aantonen.
We gaan de vorm kwadrateren en trekken de wortel weer uit de gehele vorm, daar we natuurlijk een vorm niet zonder meer mogen kwadrateren.

Dus: $\sqrt{\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5+\sqrt{5}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}.\sqrt{5-\sqrt{5}}+5-\sqrt{5}} =$

$= \sqrt{10+2\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}} = \sqrt{10+2\sqrt{25-5}} = \sqrt{10+2\sqrt{20}} = \sqrt{10+4\sqrt{5}}$.

Opmerking: Bij een verschil moeten we om het teken van het antwoord denken.
Dit is negatief als de aftrekker groter is dan het aftrektal.

Ter oefening maken de opgaven 301 t/m 305.
Oplossingen inzenden van de opgaven 306 t/m 310.

HILVERSUM

32,1. Vierkantswortel uit een veelterm.

Het trekken van de vierkantswortel uit een veelterm kunnen we op ongeveer dezelfde wijze doen als in de rekenkunde bij het worteltrekken uit grote getallen.
Indien het getal in factoren te ontbinden is, zullen we dit toepassen, maar dit is met vormen die een hogere macht hebben dan de tweede vaak erg lastig. We gaan nu als volgt te werk.
Trek de wortel uit de volgende veelterm.
$49x^4 - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼$
Zoek een getal dat in het kwadraat gebracht $49x^4$ oplevert, dus het getal $7x^2$, dit getal in het kwadraat trekken we van de veelterm af

$$\begin{array}{ll} & 49x^4 - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼ \\ (7x^2)^2 & \underline{49x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} - \\ & \qquad -28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼ \end{array}$$

Nu evenals in de rekenkunde (2 maal het getal + een onbekende) maal dezelfde onbekende, dus: $(14x^2 + \ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots)$ Het getal dat in de plaats van de puntjes moet komen moet vermenigvuldigd met $14x^2$ de term $-28x^3$ opleveren, dus het getal $-2x$.
We vinden:

$(14x^2 - 2x) \times (-2x) = -28x^3 + 4x^2$ deze veelterm weer aftrekken, dus:

$$\begin{array}{l} -28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼ \\ \underline{-28x^3 + \ \ 4x^2 \qquad\quad} \\ \qquad\quad - 21x^2 + 6x + 2¼ \end{array}$$

Nu weer $(14x^2 - 4x\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots)$
Het getal dat in de plaats van de puntjes moet komen moet vermenigvuldigd met $14x^2$ de term $-21x^2$ opleveren. Dit is het getal $\frac{-3}{2}$.

$$\begin{array}{ll} & -21x^2 + 6x + 2¼ \\ \left(14x^2 - 4x - \frac{3}{2}\right) \times -\left(\frac{3}{2}\right) = & \underline{-21x^2 + 6x + 2¼} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

We vinden nu dat:

$\sqrt{49x^4 - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼} = \boldsymbol{7x^2 - 2x - \frac{3}{2}}$.

Een en ander lossen we nu op volgens het volgend oplossingsschema:

$$\begin{array}{ll} & 49x^4 - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼ \\ 7x^2.7x^2 & \underline{= 49x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ & \qquad - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼ \\ (14x^2 - 2x)(-2x) & \qquad \underline{- 28x^3 + \ \ 4x^2 \qquad\qquad\quad} \\ & \qquad\qquad\quad - 21x^2 + 6x + 2¼ \\ \left(14x^2 4x - \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) & \qquad\qquad\quad \underline{- 21x^2 + 6x + 2¼} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Dus: $\sqrt{49x^4 - 28x^3 - 17x^2 + 6x + 2¼} = \boldsymbol{7x^2 - 2x - \frac{3}{2}}$

Voorbeeld 1: Herleid $\sqrt{100x^2 + 100xy + 25y^2 + 60xz + 30yz + 9z^2}$

Oplossing:

$$\begin{array}{ll}
 & 100x^2 + 100xy + 25y^2 + 60xz + 30yz + 9z^2 \\
10x.10x \quad = & \underline{100x^2} \\
 & \quad 100xy + 25y^2 + 60xz + 30yz + 9z^2 \\
(20x+5y).(5y) & \quad \underline{100xy + 25y^2} \\
 & \qquad 60xz + 30yz + 9z^2 \\
(20x+10y+3z).(3z) & \qquad \underline{60xz + 30yz + 9z^2} \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

Dus: $\sqrt{100x^2 + 100xy + 25y^2 + 60xz + 30yz + 9z^2} = \mathbf{10x + 5y + 3z.}$

Men dient er weer op te letten, dat we bij deze opgave steeds de positieve oplossing van de wortel hebben vermeld, doch dat de negatieve oplossing eveneens een oplossing van de vierkantswortel is.
Eigenlijk moeten we dus bij het laatste voorbeeld vermelden:
De oplossing is: $\pm\, 10x + 5y + 3z$.

Voorbeeld 2: Herleid: $\sqrt{\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4}}$

Bij deze opgave is eenvoudig in te zien dat de vorm als volgt geschreven kan worden:

$$\sqrt{\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{y^2} + \left(\sqrt[3]{y^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt[3]{\mathbf{x^2}} + \sqrt[3]{\mathbf{y^2}}.$$

We zullen nu eens zien of deze vorm ook volgens de andere manier eenvoudig oplosbaar is.
We moeten goed opletten geen fouten te maken met de exponenten.

$$\begin{array}{ll}
 & \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4} \\
\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x^2} \quad = & \underline{\sqrt[3]{x^4}} \\
 & 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4} \\
\left(2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right).\left(\sqrt[3]{y^2}\right) & \underline{2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4}} \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

Dus is: $\sqrt{\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^4}} = \sqrt[3]{\mathbf{x^2}} + \sqrt[3]{\mathbf{y^2}}.$

Indien men de uitkomst van een wortelvorm wil controleren, verhef dan het antwoord in het kwadraat waarna we de oorspronkelijke vorm weer terug krijgen.
We zullen dit bij voorbeeld 1 eens controleren.
De oplossing was daar: $10x + 5y + 3z$.
Kwadrateren levert op:
$(10x + 5y + 3z)^2 = 100x^2 + 25y^2 + 9z^2 + 100xy + 60xz + 30yz.$
Bij het kwadrateren van deze drieterm hebben we genomen, de som der kwadraten van iedere term en verder de dubbele producten van de eerste term en de tweede; de eerste en de derde en tenslotte de tweede en de derde zoals we in een van de vorige lessen hebben geleerd.

Ter oefening maken de opgaven 311 t/m 315.
Oplossingen inzenden van de opgaven 316 t/m 320.

33,1. Oneigenlijke machten.

33,1. In de leerstof die we tot nu toe behandeld hebben, is steeds de exponent van de macht als een geheel rekenkundig getal beschouwd.
Hieruit zou volgen dat een exponent niet positief, negatief, gebroken of nul zou kunnen zijn, doch slechts een getalwaarde zou voorstellen. (dus ook niet met een plusteken, aangezien een exponent slechts een getal is dat aangeeft uit hoeveel gelijke factoren een bepaalde macht bestaat).
We gaan nu echter wel gebruik maken van positieve, negatieve en gebroken exponenten, waarbij we aan deze exponenten bepaalde afspraken gaan verbinden. Ook als de exponent aangegeven wordt door het getal nul kennen we hier een bepaalde betekenis aan toe.
Daar een getal dat niet door een teken wordt voorafgegaan tot een positief getal wordt gerekend behoeven we aan een positieve exponent geen extra betekenis toe te kennen.

33,2. Negatieve exponenten.

In les 5 van de algebra hebben we geleerd dat het quotiënt van twee machten met eenzelfde grondtal weer een macht oplevert van dat grondtal, met als exponent het verschil der exponenten der oorspronkelijke machten. Als algemene regel hebben we gegeven:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hierbij werd verondersteld dat de exponent van de teller groter was dan de exponent van de noemer, waardoor het verschil $m - n$ steeds positief wordt. Was de exponent van de noemer groter, dan plaatsten we de macht in de noemer als volgt.

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$$

Voeren we de regel van het aftrekken der exponenten echter consequent door, dan vinden we:

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{-4}$$

Hieruit volgt dat aan de begrippen $\frac{1}{a^4}$ en a^{-4} dus dezelfde betekenis toegekend moet worden.

Zo is: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $10^{-9} = \frac{1}{10^9}$ enz.

We trekken hieruit de volgende conclusies:
Machten met negatieve exponenten zijn breuken die als teller het getal 1 bezitten en als noemer de macht met de rekenkundige exponent.
(d.w.z. de exponent zonder teken).

Algemeen: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Indien we het volgende voorbeeld beschouwen: $\frac{1}{a^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{a^3}} = a^3$, dan zien we dat de macht met de negatieve exponent die in de noemer van de breuk staat, in de teller komt zonder het minteken.
We kunnen nu zeggen: een macht kan van de teller naar de noemer gebracht worden en omgekeerd van de noemer naar de teller, indien we het teken van de exponent tegengesteld nemen.

Voorbeelden: $a^{-2}b^{-5}c^3 = \frac{c^3}{a^2b^5}$; $\frac{a^{-5}}{b^{-3}} = \frac{b^3}{a^4}$

Bij het berekenen van een samengestelde vorm kunnen we normaal de afspraken van het vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen handhaven. We dienen er dan goed op te letten dat we de negatieve exponenten ook werkelijk als negatieve getallen behandelen.

Zo is: $x^{-2}.\ x^{-5}.\ x^3 = x^{-2-5+3} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$;

$(y^{-2})^3 = y^{-2\times 3} = y^{-6}$; $(y^{-3})^2 = y^{-3\times 2} = y^{-6}$

$\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = a^2$; $(x^{-4})^{-3} = x^{-4\times -3} = x^{12}$.

Uit de voorbeelden blijkt dat de algemene regel die we geleerd hebben ook bij de bewerkingen met negatieve exponenten geldig blijven.
Deze regels waren:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

m en n kunnen dus zowel positief als negatief zijn.

33,3. Het getal nul als exponent.

Zijn bij een deling van twee machten met hetzelfde grondtal de exponenten aan elkaar gelijk, dan wordt de exponent van het quotiënt gelijk aan nul. Deling van twee gelijke machten geeft echter als uitkomst het getal 1. We kunnen dan de volgende conclusie trekken:
Indien een macht het getal nul als exponent heeft, is de macht gelijk aan 1 ongeacht de waarde van het grondtal. We zullen dit met een voorbeeld verduidelijken.

$\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0$, eveneens is: $\frac{a^7}{a^7} = 1$ dus is: $a^0 = 1$

In woorden: Een getal tot de macht nul is gelijk aan 1.

Opmerking: We maken op deze regel enkele uitzonderingen en wel voor het geval a gelijk is aan nul of oneindig. De uitkomst is dan onbepaald. Hier komen we later echter op terug.

Ter oefening maken de opgaven 321 t/m 325.
Oplossingen inzenden van de opgaven 326 t/m 330.

R.T.

Algebra, Les 34 Nadruk verboden 67

HILVERSUM

Oneigenlijke machten (vervolg).

34,1. Machten met gebroken exponenten.

In de algebra les 27,1 hebben we gezien dat de waarde van een wortel uit een macht niet verandert als men de exponent van de macht en de wortel exponent met eenzelfde getal vermenigvuldigd of door eenzelfde getal deelt.

Zo is dus: $\sqrt[3]{a^6} = a^2$. We hadden als tussenbewerking kunnen schrijven: $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$.
De wortelexponent delen we dus op de machtsexponent onder het wortelteken. In bovenstaand voorbeeld ging de deling op. Het is echter ook mogelijk dat de deling niet opgaat, zodat de exponent een breuk wordt.

bv: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Deze schrijfwijze leidt bij samengestelde vormen tot grote vereenvoudigingen.
We zien dus dat machten met gebroken exponenten wortelvormen voorstellen. De noemer van de gebroken exponent is de exponent van de wortel en de teller is de exponent van de macht, waaruit we die wortel moeten trekken.

Algemeen: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ook nu gaan de algemene regels voor het vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen weer op.
Indien we twee ongelijknamige wortels met elkaar moeten vermenigvuldigen, dan zijn de gebroken exponenten prettig om te gebruiken bv:

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{2}{3}}.\ a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = a^{\frac{17}{12}} = a^{1\frac{5}{12}} .$$

In dit voorbeeld zien we dat de exponent die we vinden bestaat uit een geheel getal en een echte breuk.
We kunnen dit ook schrijven als:

$a^{1+\frac{5}{12}} = a.a^{\frac{5}{12}} = a.a^{\frac{5}{12}} = a\sqrt[12]{a^5}$, zodat we de wortel direct kunnen herleiden.

De gebroken exponenten kunnen zowel positief als negatief zijn. Voor de negatieve exponenten maken we weer dezelfde afspraak als in de vorige les is gedaan.

Zo is: $a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

We hebben echter gezien dat we geen wortelvormen in de noemer van een breuk laten staan, zodat we de vorm $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ nog om moeten werken.

Vermenigvuldigen van teller en noemer met $\sqrt[3]{a}$ levert op: $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$.

Dit kunnen we nu bij de gebroken exponenten eenvoudiger uitwerken als volgt:

$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\,.\,a^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ of korter:

$a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}-1}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$.

We zullen nu enige ingewikkelde opgaven uitwerken.

1.

$$\left[\frac{\sqrt[5]{a^4}\,.\,\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[3]{c^2}}\;.\;\frac{\sqrt[6]{c^5}}{\sqrt[4]{a^3}\,.\,\sqrt[3]{b^2}}\right]^4$$

We gaan deze vorm direct met gebroken exponenten schrijven als volgt:

$$\left[\frac{a^{\frac{4}{5}}.\,b^{\frac{3}{4}}.\,c^{\frac{5}{6}}}{c^{\frac{2}{3}}.\,a^{\frac{3}{4}}.\,b^{\frac{2}{3}}}\right]^4=\left[a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}\,b^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}\right]^4=\left[a^{\frac{16}{20}-\frac{15}{20}}\,b^{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}}\,c^{\frac{5}{6}-\frac{4}{6}}\right]^4=$$

$$=a^{4\times\frac{1}{20}}\,b^{4\times\frac{1}{12}}\,c^{4\times\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{5}}\,b^{\frac{1}{3}}\,c^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{15}}\,b^{\frac{5}{15}}c^{\frac{10}{15}}=\boldsymbol{\sqrt[15]{a^3b^5c^{10}}}\,.$$

2.

$$\left[\sqrt[3]{\left\{2^{-\frac{3}{2}}.3^{-\frac{1}{6}}.\sqrt{2^{-3}a^{\frac{1}{2}}b}\right\}^{-1}}\right]^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\left(8a^{-\frac{1}{3}}.\sqrt[3]{9b^{-4}}\right)}=$$

$$=\left[\left\{2^{-\frac{3}{2}}.3^{-\frac{1}{6}}.\,2^{-\frac{3}{2}}.\,a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\times\left(8a^{-\frac{1}{3}}.9^{\frac{2}{3}}.b^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{2^{-3}.\,3^{-\frac{1}{6}}.\,a^{\frac{1}{4}}.b^{\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left(2^3.a^{-\frac{1}{3}}.\,3^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2^{\frac{3}{2}}.\,3^{\frac{1}{12}}.\,a^{-\frac{1}{8}}.\,b^{-\frac{1}{4}}.\,2^{\frac{3}{2}}.\,a^{-\frac{1}{6}}.3^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=2^3.\,3^{\frac{1}{12}+\frac{1}{3}}.\,a^{-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}}.\,b^{-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}=2^3.3^{\frac{1}{12}+\frac{4}{12}}.\,a^{-\frac{3}{24}-\frac{4}{24}}.\,b^{-\frac{3}{12}-\frac{8}{12}}=$$

$$=2^3.3^{\frac{5}{12}}.\,a^{-\frac{7}{24}}.\,b^{-\frac{11}{12}}=2^3.3^{\frac{5}{12}}.a^{\frac{17}{24}-1}.\,b^{\frac{1}{12}-1}=$$

$$=\frac{2^3.3^{\frac{5}{12}}.\,a^{\frac{17}{24}}.b^{\frac{1}{12}}}{ab}=\frac{2^3.\,3^{\frac{10}{24}}.\,a^{\frac{17}{24}}.b^{\frac{2}{24}}}{ab}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{2^3}{ab}\sqrt[24]{3^{10}a^{17}b^2}}$$

Ter oefening maken de opgaven 331 t/m 335.
Oplossingen inzenden van de opgaven 336 t/m 340.

Overzicht van de theorie.

We zullen nu een kort overzicht geven van de theorie die tot nu toe behandeld is.
We dienen dit goed door te nemen om te controleren of alle voorgaande stof voldoende tot ons doorgedrongen is.

1. Let op de volgorde van bewerkingen nl:
Machtsverheffen, Vermenigvuldigen, Delen, Worteltrekken, Optellen en Aftrekken.
Dit onthouden met:
Mijnheer **V**an **D**am **W**acht **O**p **A**ntwoord.*[6]

2. Staat er voor de haakjes in een algebraïsche bewerking een plusteken, dan mogen de haakjes weggelaten worden zonder dat de vorm hierdoor verandert. Staat er een minteken voor en laten we de haakjes weg, dan veranderen alle tekens binnen de haakjes.

3. Tekenafspraken:

$+ \times + = +$	$\frac{+}{+} = +$
$- \times - = +$	$\frac{-}{-} = +$
$+ \times - = -$	$\frac{+}{-} = -$
$- \times + = -$	$\frac{-}{+} = -$

Algemeen gelden de volgende regels:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. Merkwaardige producten:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

[6] Zie de voetnoot op bladzijde 3. (FV)

5. Wortelvormen:

Definitie: Onder de $\sqrt[n]{a}$ verstaan we het getal dat tot de n^{de} macht gebracht, het getal a oplevert.

Formules: $\sqrt[p]{a^{pq}} = a^q$; $\sqrt[p]{a.b} = \sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}$; $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$; $\sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{a}\right)} = \sqrt[pq]{a}$.

Deze formules gelden zowel links naar rechts als van rechts naar links.

Gelijknamige wortels zijn wortels met dezelfde wortelexponenten.

$\sqrt[5]{a}$; $\sqrt[5]{b}$; $\sqrt[5]{c^3}$.

Wortels zijn gelijksoortig indien alleen de coëfficiënt voor het wortelteken verschillend is bv.

$3\sqrt{a}$; $7a\sqrt{a}$; $8\sqrt{a}$.

Laat nooit wortels in de noemer van een breuk staan, evenmin een breuk onder een wortelteken.
We noemen dit het rationaal maken van de noemer.

6. Worteltrekking uit een vorm van de gedaante $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$.
Controleer of $(a)^2 - \left(b\sqrt{c}\right)^2$ een volkomen kwadraat is. Indien dit niet het geval is, is de vorm niet te vereenvoudigen.

1e methode:
Stel de vorm gelijk aan $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.
Daarna beide vormen kwadrateren.
Dan is $x + y = a$ en $2\sqrt{xy} = b\sqrt{c}$ ‘
Deze laatste twee vormen kwadrateren en aftrekken geeft:
$x - y = \sqrt{a^2 - bc}$ (dit is een volkomen kwadraat).
Hierbij $x + y = a$
Nu zijn x en y op te lossen.

2e methode:
Zorg dat voor het wortelteken onder het wortelteken het getal 2 komt te staan bv.
$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.
Zoek nu twee getallen waarvan de som gelijk is aan 5 en het product gelijk aan 6.
De gevonden getallen geven direct de oplossing voor de getallen x en y uit de vorige methode.

7. Oneigenlijke machten.
Definities: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $a^{n+\frac{p}{q}} = a^n\, \sqrt[q]{a^p}$.

De eigenschappen genoemd onder punt 3 gaan onbeperkt op, dus ook voor negatieve en gebroken exponenten.

Oplossingen inzenden van de opgaven 341 t/m 350.

R.T.

Algebra, Les 36 Nadruk verboden 71

HILVERSUM

36,1. Imaginaire getallen.

In les 26 Algebra hebben we de volgende definitie gegeven.
"Onder de tweedemachtswortel uit een getal verstaan we een ander getal dat tot de tweede macht gebracht het eerste getal oplevert".
Indien we nu de evenmachtswortel uit een negatief getal moeten trekken, dan is dit niet mogelijk, daar er geen getal gevonden kan worden dat in het kwadraat gebracht een negatief getal oplevert.
Evenmachtswortels uit negatieve getallen kunnen dus niet voorgesteld worden door de algebraïsche getallen die we tot nu toe hebben leren kennen.
Zij vormen een nieuw soort getallen die we de onbestaanbare of imaginaire getallen noemen.
Alle andere getallen waarmee we tot nu toe werkten, noemen we de reële getallen.
Het eenvoudigste imaginaire getal is $\sqrt{-1}$

Voor $\sqrt{-1}$ is in de wiskunde een symbool ingevoerd en wel de letter i, dus $i = \sqrt{-1}$.
Zoals we weten wordt de letter i in de techniek gebruikt om er een stroom mee aan te geven.
Om verwarring te voorkomen schrijven we in de techniek voor de imaginaire eenheid $\sqrt{-1}$ de letter j.
Daar we in de wiskunde zo veel mogelijk aansluiting met de techniek willen maken, gebruiken we ook in de wiskunde de letter j, dus geldt:

$$j = \sqrt{-1}$$

In plaats van $\sqrt{-9}$ schrijven we $3 \times \sqrt{-1} = 3j$; $\sqrt{-5} = j\sqrt{5}$ etc.

We dienen er goed op te letten dat imaginaire getallen in wezen onbestaanbare getallen zijn. Het is ook niet mogelijk om reële getallen en imaginaire getallen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Deze getallen blijven dan gescheiden staan bijvoorbeeld: $3 + 4j$; $6 - 5j$.

Een tweeterm bestaande uit een reëel en een imaginair getal noemen we een complex getal.
Imaginaire getallen kunnen echter wel evenals reële getallen bij elkaar worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken.
Zo kunnen we schrijven:

$$\sqrt{-16} + \sqrt{-25} - \sqrt{-9} = 4j + 5j - 3j = 6j.$$

$$\sqrt{-12} - \sqrt{-108} - \sqrt{-3} = 2j\sqrt{3} - 6j\sqrt{3} - j\sqrt{3} = -5j\sqrt{3}.$$

Bij het product van twee imaginaire getallen zouden we de volgende rekenwijze kunnen toepassen.
$j \times j = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = \pm 1$. Dit is echter niet juist, daar de definitie geldt:

$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = j \times j = j^{-2} = -1$ dus is:

$j^2 = -1$; $j^3 = j^2 \times j = -j$; $j^4 = j^2 \times j^2 = -1 \times -1 = +1$.

Daar dus $j^4 = 1$, kunnen we nu iedere macht van j die hoger is dan j^4 herleiden tot één van de vorige vormen, door zo veel mogelijk machten j^4 af te splitsen als mogelijk is.

bv: $j^{47} = j^{44} \times j^3 = (j^4)^{11} \times j^3 = j^3 = -j.$

$j^{18} = (j^4)^4 \times j^2 = -1$; $j^{25} = (j^4)^6 \times j = j.$

Iedere macht van j is dus te herleiden tot één van de waarden $+j$; $-j$; -1 of $+1$, indien we het volgende uit het hoofd leren:

$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = +1$$

Van deze eigenschappen maken we gebruik om de factor j indien die in de noemer van een breuk voorkomt uit de noemer te werken. We dienen namelijk steeds in het oog te houden dat $j = \sqrt{-1}$ en een wortelvorm mogen we niet in de noemer van een breuk laten staan. Door teller en noemer met j te vermenigvuldigen verdwijnt dus de wortelvorm uit de noemer.

bv: $\frac{3}{\sqrt{-4}} = \frac{3}{2j} = \frac{3j}{2j^2} = \frac{3j}{-2} = \frac{3}{2}j.$

$\frac{7}{5j} = \frac{7j}{-5} = -\frac{7}{5}j$; $\frac{4}{\sqrt{-3}} = \frac{4}{j\sqrt{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Indien in een breuk zowel in de teller als in de noemer de factor j voorkomt, dan kunnen we door deze factor j delen evenals we met normale letter of cijferfactoren hebben gedaan. We zullen dit met enige voorbeelden verduidelijken.

$\frac{3j^2}{5j} = \frac{3}{5}j$; $\frac{\sqrt{-5} - \sqrt{-7}}{\sqrt{-3} + \sqrt{-2}} = \frac{j\sqrt{5} - j\sqrt{7}}{j\sqrt{3} + j\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} =$

$= \sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{21} + \sqrt{14}.$

$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}} = \sqrt{\frac{a-b}{-(a-b)}} = \sqrt{-1} = j.$

$\left(\sqrt{-a} + \sqrt{-b}\right)^2 = \left(j\sqrt{a} + j\sqrt{b}\right)^2 = j^2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = -\left(a + 2\sqrt{ab} + b\right).$

In de gehele radiotechniek wordt veelvuldig gebruik gemaakt van de imaginaire eenheid j.
De rekenwijze wordt daar dikwijls de symbolische rekenwijze genoemd omdat we met een symbool j voor $\sqrt{-1}$ werken.

Ter oefening maken de opgaven 351 t/m 355.
Oplossingen inzenden van de opgaven 356 t/m 360.

37,1. Complexe getallen.

Een getal bestaande uit de som of het verschil van een reëel en een imaginair getal heet een complex getal bv. $a + jb$; $a - jb$; $-a + jb$; $-a - jb$.
Indien we twee complexe getallen met elkaar vergelijken, dan zijn twee complexe getallen gelijk, als de reële delen en de imaginaire delen gelijk zijn. We dienen er namelijk goed op te letten dat we met twee verschillende soorten getallen werken die niet bij elkaar genomen kunnen worden. We kunnen dit het beste vergelijken met het volgende voorbeeld:

Indien we drie boeken en 5 schriften hebben, zijn dit verschillende dingen die niet aan elkaar gelijk gemaakt kunnen worden. Een eenvoudiger schrijfwijze bij een optelling of aftrekking van die grootheden is dus niet mogelijk. Zo dienen we ook reële en imaginaire getallen te beschouwen.
Stellen we dus dat $x + jy = 7 + 4j$ dan is dit alleen mogelijk als $x = 7$ en $y = 4$.

Opmerking:
Indien we spreken over het imaginaire deel van een uitdrukking dan bedoelen we de grootheid die het aantal eenheden van j aangeeft, dus de letter j er niet meer bij vermelden.
Zo is het imaginaire deel van $3 + 4j$ gelijk aan 4 en van $7 - 5j$ gelijk aan -5.
Twee complexe getallen met hetzelfde reële deel en met hetzelfde imaginaire deel, maar waarvan de imaginaire delen tegengesteld teken hebben, noemen we twee toegevoegde complexe getallen, bijvoorbeeld $a + jb$ en $a - jb$; $9 - 3j$ en $9 + 3j$; $-7 + 2j$ en $-7 - 2j$ zijn twee-aan-twee toegevoegd complexe getallen.
Twee toegevoegd complexe getallen geven, indien we de algebraïsche bewerkingen er op toepassen, enige merkwaardige resultaten. Beschouwen we eerst de som van twee toegevoegd complexe getallen bv. $(a + jb) + (a - jb) = 2a$ dan zien we dat de uitkomst reëel is.

Voor het verschil vinden we $(a + jb) - (a - jb) = a + jb - a + jb = 2jb$, dus een zuiver imaginaire uitkomst.
Voor het product van twee toegevoegd complexe getallen vinden we:
$(a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 - j^2b^2 = a^2 + b^2$.
We zien dus dat we weer een reële uitkomst vinden en wel de som van de kwadraten van het imaginaire deel en van het reële deel van de oorspronkelijke complexe getallen.
Hiervan maken we gebruik om een complex getal uit de noemer van een breuk te werken, immers we mogen in de noemer van een breuk geen wortelvormen laten. En $j = \sqrt{-1}$.

vb. $\frac{1}{3 - 4j}$ We vermenigvuldigen teller en noemer met het toegevoegd complexe getal, dus met $3 + 4j$ en vinden dan:

$$\frac{1}{3 - 4j} \times \frac{3 + 4j}{3 + 4j} = \frac{3 + 4j}{25}$$

We maken vooral ook in de techniek dikwijls gebruik van de regel:

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2.$$

vb: Herleid de vorm $\frac{2-7j}{6+8j}$ en splits de uitkomst in een reëel deel en in een imaginair deel.

Oplossing:

Teller en noemer vermenigvuldigen met $6-8j$ geeft:

$$\frac{2-7j}{6+8j}\times\frac{6-8j}{6-8j}=\frac{(2-7j)\,(6-8j)}{36+64}=\frac{12-16j-42j+56j^2}{100}=$$

$$=\frac{12-58j-56}{100}=\frac{-44-58j}{100}=\frac{-22-29j}{50}=$$

$$=-\frac{22}{50}-\frac{29}{50}j=-\frac{11}{25}-\frac{29}{50}j\,.$$

Het imaginaire deel is dus $-\mathbf{\frac{29}{50}}$ en het reële deel is $-\mathbf{\frac{11}{25}}$.

vb: Herleid de vorm $\frac{a+jb}{c+jd}$ en splits de uitkomst in een reëel en een imaginair deel.

Oplossing: $\frac{a+jb}{c+jd}\times\frac{c-jd}{c-jd}=\frac{(a+jb)\,(c-jd)}{c^2+d^2}=$

$$=\frac{ac+jbc-jad+bd}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}\,.$$

Uit deze twee voorbeelden blijkt dat we j voor de term plaatsen indien we met letters werken bv. jb; jbc enz. en achter de term indien we met cijfers te doen hebben dus: $3j$; $-12j$ enz.

Opgave: Bepaal a *en* b als gegeven is dat: $3a+2+7j=14-2(b-4)j$

Oplossing:

Indien twee complexe getallen gelijk zijn moeten de reële delen zowel als de imaginaire delen aan elkaar gelijk zijn, dus: $3a+2=14$ of $3a=12$ dus $a=4$ en
$-2(b-4)=7$ of $2b+8=7$ dus $-2b=-1$ en $b=½$.

Opgave: Bepaal x *en* y als gegeven is dat:

$$(2x+5y)+2jy\sqrt{7}=(3y-1)+jx\sqrt{7}.$$

Oplossing: Uit de gegeven gelijkheid volgt:

$$\begin{array}{l|r|c|l} 2x+5=3y-1 & 2x-3y=-6 & 1 & 2x-3y=-6 \\ 2y\sqrt{7}\;=x\sqrt{7} & x-2y=\;\;0 & 2 & \underline{2x-4y=0\quad} \\ & & & \qquad\;\; \boldsymbol{y=-6} \end{array}$$

Dus daar $x=2y$ is $\boldsymbol{x=-12}$

Ter oefening maken de opgaven 361 t/m 365.
Oplossingen inzenden van de opgaven 366 t/m 370.

HILVERSUM

38,1. Complexe getallen (vervolg).

Een complex getal tot een macht verheven, berekenen we op dezelfde manier als met de algebraïsche tweetermen.

We hebben geleerd dat $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en passen dit merkwaardige product bij een complex getal op dezelfde wijze toe aldus: $(a+jb)^2 = a^2 + 2jab + j^2b^2 = a^2 - b^2 + 2jab$.
In de uitkomst zijn de termen die het reële deel vormen bij elkaar geschreven. We schrijven altijd zo veel mogelijk de termen die het reële deel vormen bij elkaar en de termen die het imaginaire deel vormen bij elkaar.

We zullen nu nog enige merkwaardige producten uitwerken van complexe vormen.

$$(a+jb)^2 = a^2 + 2jab + j^2b^2 = a^2 - b^2 + 2jab.$$

$$\begin{aligned}(a+jb)^3 &= a^3 + 3ja^2b + 3j^2ab^2 + j^3b^3 = \\ &= a^3 + 3ja^2b - 3ab^2 - jb^3 = \\ &= a^3 - 3ab^2 + j(3a^2b - b^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-jb)^4 &= a^4 - 4ja^3b + 6j^2a^2b^2 - 4j^3ab^3 + j^4b^4 = \\ &= a^4 - 4ja^3b - 6a^2b^2 + 4jab^3 + b^4 = \\ &= a^4 + b^4 - 6a^2b^2 + j(-4a^3b + 4ab^3).\end{aligned}$$

Indien we complexe vormen die bestaan uit reële of imaginaire getallen, vermeerderd of verminderd met breuken, moeten uitwerken dan moeten we er goed op letten dat we alleen de breuk gaan uitwerken door deze te splitsen in een reëel en een imaginair deel. We wijzen hier uitdrukkelijk op daar de leerling meestal de vorm in zijn geheel onder één noemer gaat brengen.

Vooral in de techniek zal dit bij het uitwerken tot ontzaglijk veel rekenwerk aanleiding geven. In de techniek interesseren we ons alleen voor de complexe vorm als die gesplitst is in een reëel en een imaginair deel.

We zullen dit met een aantal voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld 1: Splits de volgende opgave in een reëel en een imaginair deel.

$$3j - 2 + \frac{7-j}{4+2j} = 3j - 2 + \frac{(7-j)(4-2j)}{(4+2j)(4-2j)} =$$

$$= 3j - 2 + \frac{28 - 14j - 4j - 2}{16+4} = 3j - 2 + \frac{26-18j}{20} =$$

$$= 3j - 2 + \frac{13-9j}{10} = 3j - 2 + \frac{13}{10} - \frac{9}{10}j = \mathbf{-3\frac{3}{10} + 2\frac{1}{10}j.}$$

Voorbeeld 2: idem:

$$7a - 2jb - \frac{3b-4ja}{2a-jb} = 7a - 2jb - \frac{(3b-4ja)\,(2a+jb)}{(2a-jb)\,(2a+jb)} =$$

$$= 7a - 2jb - \frac{6ab + 3jb^2 + 8ja^2 - 4ab}{4a^2 + b^2} =$$

$$= 7a - 2jb - \frac{2ab + j\left(3b^2 + 8a^2\right)}{4a^2 + b^2} =$$

$$= 7a - 2jb - \frac{2ab}{4a^2 + b^2} - j\,\frac{3b^2 + 8a^2}{4a^2 + b^2} =$$

$$= 7a - \frac{2ab}{4a^2 + b^2} - j(2b + \frac{3b^2 + 8a^2}{4a^2 + b^2}).$$

We zullen dit voorbeeld nu ook eens uitwerken op de manier waarop we het niet moeten doen.
We brengen dus alles onder één noemer.

$$7a - 2jb - \frac{3b - 4ja}{2a - jb} = \frac{(7a - 2jb)(2a - jb) - (3b + 4ja)}{2a - jb} =$$

$$= \frac{14a^2 - 7jab - 4jab - 2b^2 - 3b - 4ja}{2a - jb} = \frac{\left(14a^2 - 2b^2 - 3b - 11jab - 4ja\right)(2a + jb)}{4a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{28a^3 - 4ab^2 - 6ab - 22ja^2b - 8ja^2 + 14ja^2b - 2jb^3 - 3jb^2 + 11ab^2 + 4ab}{4a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{28a^3 - 4ab^2 - 6ab + 11ab^2 + 4ab}{4a^2 + b^2} + j\,\frac{-8a^2 - 8a^2 - 2b^3 - 3b^2}{4a^2 + b^2}$$

Brengen we van de uitkomst van de eerste uitwerking van dit voorbeeld het reële en het imaginaire deel onder één noemer dan vinden we:

$$7a - \frac{2ab}{4a^2 + b^2} = \frac{28a^3 + 7ab^2 - 2ab}{4a^2 + b^2}$$

en

$$-2b - \frac{3b^2 + 8a^2}{4a^2 + b^2} = \frac{-8a^2 - 8a^2 - 2b^3 - 3b^2}{4a^2 + b^2}$$

De uitkomsten zijn dus gelijk.
Daar we in de techniek slechts zelden met getallen werken, doch praktisch altijd met letters (als symbolen voor weerstanden, spoelen , condensatoren etc.) komen we dikwijls op vormen terecht zoals in het tweede voorbeeld uitgewerkt, waarbij we er nogmaals op wijzen toch vooral de eerste methode te gebruiken.

Ter oefening maken de opgaven 371 t/m 375.
Oplossingen inzenden van de opgaven 376 t/m 380.

39,1. Vierkantswortel uit een complex getal.

Bij de behandeling van de vierkantswortels uit positieve getallen en bij de behandeling van vierkantswortels uit tweetermen van de gedaante $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}}$ hebben we gezien dat die wortels een positieve en een negatieve waarde kunnen hebben. Dit gaven we aan door voor de wortel of voor de uitkomst van die wortel een plus- en een minteken te plaatsen.

Bij de wortels met complexe vormen is dit niet mogelijk. De complexe vormen immers bestaan uit twee soorten eenheden, de reële en de imaginaire. Bij imaginaire getallen is het moeilijk om door een betekenis van een positief en een negatief imaginair getal te geven. In ieder geval kunnen we er niet dezelfde betekenis aan toe kennen, als bij de reële getallen.

In de verdere opleiding voor radiotechnicus zullen we er nog nader kennis mee maken, doch we zullen hier ermee volstaan dat met een positief of negatief imaginair getal een richting aangegeven wordt.

Indien een vorm $\sqrt{a \pm jb}$ verder te herleiden is, zullen we er dus niet een tweevoudige betekenis aan geven, doch slechts de positieve waarde van de uitkomst als de juiste aannemen. Bij het herleiden van de genoemde vorm gaan we iets anders te werk dan bij de normale oplossingsmethode van een samengestelde wortelvorm.

We dienen namelijk te bedenken dat de vorm $\sqrt{a \pm jb}$ uit een reëel en een imaginair gedeelte bestaat, zodat de uitkomst ook uit een reëel en een imaginair deel zal bestaan. We stellen de vorm dus gelijk aan $\sqrt{x} \pm j\sqrt{y}$.

Als volgt: $\sqrt{a \pm jb} = \sqrt{x} \pm j\sqrt{y}$

Kwadrateren geeft: $a \pm jb = x - y \pm 2j\sqrt{xy}$.
We stellen nu de reële en de imaginaire delen aan elkaar gelijk waaruit volgt:

$x - y = a$ en $2\sqrt{xy} = b$

Nogmaals kwadrateren van beide vormen geeft:

$$\begin{array}{rl} x^2 - 2xy + y^2 &= a^2 \\ 4xy &= b^2 \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 &= a^2 + b^2 \end{array}$$

of $(x + y)^2 = a^2 + b^2$ dus: $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$
verder is:

$$\begin{array}{rl} x - y &= a \qquad + \\ \hline 2x &= a + \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}$$

$x = ½\text{a} + ½\sqrt{a^2 + b^2}$

en: $y = -½a + ½\sqrt{a^2 + b^2}$

we zullen dit met enige uitgewerkte voorbeelden verduidelijken.

<u>Voorbeeld 1:</u> Herleid de vorm $\sqrt{2+2j\sqrt{15}}$

<u>Oplossing:</u> Stel: $\sqrt{2+2j\sqrt{15}} = \sqrt{x} + j\sqrt{y}$
Kwadrateren geeft: $2 + 2j\sqrt{15} = x - y + 3j\sqrt{xy}$
Reële delen en imaginaire delen aan elkaar gelijk stellen:
$x - y = 2$ en $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{15}$
Kwadrateer beide vormen:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ \underline{\quad 4xy \qquad = 60 \quad +} \\ x^2 + 2xy + y^2 = 64 \end{array}$$

of $\quad x + y = 8$
Verder is: $\quad \underline{x - y = 2}$
$\quad 2x \quad = 10$ of $\boldsymbol{x = 5}$

Uit $x + y = 8$ volgt dan dat: $\boldsymbol{y = 3.}$

We vinden dus: $\sqrt{2+2j\sqrt{15}} = \sqrt{5} + j\sqrt{3}$.
Indien we onze uitkomst willen controleren kunnen we dit doen door de gevonden gelijkheid aan beide kanten van het gelijkteken te kwadrateren, als volgt:

$$\left(\sqrt{2+2j\sqrt{15}}\right)^2 = \left(\sqrt{5} + j\sqrt{3}\right)^2$$

$2 + 2j\sqrt{15} = 5 + 2j\sqrt{5}. \quad \sqrt{3} - 3 = 2 + 2j\sqrt{15}.$

We vragen ons nu weer af of het mogelijk is voordat we de vorm gaan berekenen, de vorm te onderzoeken of er inderdaad een mogelijkheid van oplossing aanwezig is. We doen dit weer op dezelfde wijze als bij de normale reële wortelvormen nl. het verschil der kwadraten van het reële deel en het imaginaire deel moet een volkomen kwadraat opleveren. We dienen er echter op te letten dat nu de factor j in de berekening in rekening moet worden gebracht.

Controleren we de vorm $\sqrt{2+2j\sqrt{15}}$ dan vinden we dus $(2)^2 - \left(2j\sqrt{15}\right)^2 = 4 + 60 = 64$ en dit is een volkomen kwadraat. We wijzen er nog even op dat ook bij de complexe wortelvormen de mogelijkheid bestaat door de factor 2 voor het tweede wortelteken te brengen, een snellere oplossing toe te passen.
Men maakt hier echter snel fouten, door de factor j die in de wortelvorm voorkomt.
Wij geven de leerling daarom dan ook de raad om wortels uit complexe tweetermen altijd op de manier die we behandeld hebben uit te werken.

<u>Voorbeeld 2:</u> Herleid de vorm $\sqrt{3 - j\sqrt{7}}$

Oplossing: $(3)^2 - \left(j\sqrt{7}\right)^2 = 9 + 7 = 16$ dus een volkomen kwadraat.
Stel: $\sqrt{3 - j\sqrt{7}} = \sqrt{x} - j\sqrt{y}$. Kwadrateren geeft: $3 - j\sqrt{7} = x - y - 2j\sqrt{xy}$.
Dus: $x - y = 3$ en $2\sqrt{xy} = \sqrt{7}$
Hieruit volgt: $x^2 + 2xy + y^2 = 16$ of $x + y = 4$. Met $x - y = 3$ vinden we: $\boldsymbol{x = 3½}$ **en** $\boldsymbol{y} = ½$
zodat de oplossing wordt: $½\sqrt{14} + ½\, j\sqrt{2}$.

Ter oefening maken de opgaven 381 t/m 385.
Oplossingen inzenden van de opgaven 386 t/m 390.

HILVERSUM

40,1. Enige uitgewerkte voorbeelden.

Gezien de belangrijkheid der complexe getallen voor de radiotechniek willen we nog een aantal vraagstukken als voorbeeld uitwerken. We kunnen er de leerling niet genoeg op wijzen deze stof zeer goed door te werken en te zorgen deze materie volledig onder de knie te krijgen. Immers in het grootste gedeelte der radiotechniek wordt met de complexe getallen gewerkt.

Voorbeeld 1: Herleid: $\frac{(7j-2\sqrt{3})\,(7+2j\sqrt{3})}{\sqrt{-37-28j\sqrt{3}}}$.

Oplossing: We willen eerst de vorm $\sqrt{-37-28j\sqrt{3}}$ herleiden en onderzoeken daarom of deze vorm herleidbaar is.

Dan moet $(-37)^2-\left(28j\sqrt{3}\right)^2$ een volkomen kwadraat zijn:
We vinden $1369+3721=61^2$. De vorm is dus herleidbaar.

Stel: $\sqrt{-37-28j\sqrt{3}}=\sqrt{x}-j\sqrt{y}$.
Reële en imaginaire delen gelijk stellen geeft:

$$x-y=-37 \text{ en } 2\sqrt{xy}=28\sqrt{3}$$

Kwadrateren van beide vormen en optellen geeft:

$$\begin{array}{rl} x^2-2xy+y^2 &= 1369 \\ 4xy &= 2352 \quad + \\ \hline x^2+2xy+y^2 &= 3712 \end{array}$$

$(x+y)^2=61^2$ dus: $x+y=\ \ 61$
Verder was: $\underline{x-y=-37 \quad +}$
Dus: $2x=24$
Of: $\boldsymbol{x=12}$

Dan is $\boldsymbol{y=49}$.

We vinden dus: $\sqrt{-37-28j\sqrt{3}}=\sqrt{12}-j\sqrt{49}=2\sqrt{3}-7j$.

De opgave wordt nu:

$$\frac{(7j-2\sqrt{3})(7+2j\sqrt{3})}{2\sqrt{3}-7j}=-(7+2j\sqrt{3})$$

We zien hier het grote voordeel dat we de teller in factoren hebben laten staan en niet direct hiermee aan het rekenen zijn gegaan. De gehele term
$2j\sqrt{3}-7j$ kan nu namelijk weggedeeld worden.

Voorbeeld 2: Als $x=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+j\,\frac{\sqrt{2+2\sqrt{12}}}{4}$ en

$$y=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+j\,\frac{\sqrt{2+2\sqrt{12}}}{4} \quad \text{is}$$

Wat is dan de waarde van x^3+y^3-xy ?

Oplossing: We zien dat de vormen van x en y toegevoegd complex zijn en we zullen trachten hiervan een nuttig gebruik te maken.
Het gaat er dus om een opgave steeds rustig onder de loep te nemen en niet domweg te gaan rekenen.
We schrijven de vorm $x^3 + y^3$ de vorm als $(x+y)^3$ verminderd met een aantal termen die als het ware bijgevoegd zijn aldus:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3xy(x+y).$$

Nu is: $x + y = \frac{2(3+\sqrt{3})}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} =$ en

$$xy = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{12}}}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3} + 2 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{14 + 10\sqrt{3}}{16} = \frac{7 + 5j\sqrt{3}}{8} =$$

We gaan nu in de opgave deze waarden invullen en vinden dus:

$$x^3 + y^3 - xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - xy =$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{7+5\sqrt{3}}{8}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{7+5\sqrt{3}}{8} =$$

$$= \frac{54 + 30\sqrt{3}}{8} - \frac{36 + 22\sqrt{3}}{16} - \frac{7 + 5\sqrt{3}}{8} =$$

$$= \frac{54 + 30\sqrt{3} - 18 - 11\sqrt{3} - 7 - 5\sqrt{3}}{8} = \frac{29 + 14\sqrt{3}}{8}.$$

Voorbeeld 3: (opgave 389)

Splits de complexe vorm in een reëel en een imaginair deel.

$$\frac{3a + 2jb}{4b - 3ja} + \frac{7a - 2jb}{4b + 3ja} - 4a + 2ja - 3jb + b.$$

Oplossing: We gaan de twee breuken afzonderlijk splitsen in reële en imaginaire delen en nemen daarna van de totale opgave de reële en imaginaire delen bij elkaar.

$$\frac{3a + 2jb}{4b - 3ja} = \frac{(3a + 2jb)(4b + 3ja)}{16b^2 + 9a^2} = \frac{6ab}{16b^2 + 9a^2} + j\frac{9a^2 + 8b^2}{16b^2 + 9a^2}.$$

$$\frac{7a - 2jb}{4b + 3ja} = \frac{(7a - 2jb)(4b - 3ja)}{16b^2 + 9a^2} = \frac{22ab}{16b^2 + 9a^2} - j\frac{21a^2 + 8b^2}{16b^2 + 9a^2}.$$

Voor de totale opgave vinden we dus:

$$\frac{6ab}{16b^2 + 9a^2} - 4a + b + j\left(\frac{12a^2}{16b^2 + 9a^2} + 2a - 3b\right).$$

Het onder één noemer brengen der beide delen brengt geen verdere vereenvoudiging zodat we dit achterwege laten.

Ter oefening maken de opgaven 391 t/m 395.
Oplossingen inzenden van de opgaven 396 t/m 400.

HILVERSUM

41,1. Overzicht van de theorie der imaginaire en complexe getallen.

A. Imaginaire getallen.

De evenmachtswortel uit een negatief getal is niet bestaanbaar of imaginair.
Het eenvoudigste imaginaire getal is $\sqrt{-1}$.
Dit eenvoudigste imaginaire getal wordt in de wiskunde aangegeven door de letter i, in de techniek door de letter j.

$$j = \sqrt{-1}$$

Voor de veelvouden van j geldt:

$$j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = +1$$

Algemeen geldt:

$$j^{4n} = 1$$
$$j^{4n+1} = j$$
$$j^{4n+2} = j^2 = -1$$
$$j^{4n+3} = j^3 = -j$$

B. Complexe getallen:

Een getal bestaande uit de som of het verschil van een reëel en een imaginair getal heet een complex getal bv. het getal $a + jb$.
Hierin kunnen a en b positief of negatief zijn.

Deze complexe getallen zijn gelijk zal zowel de reële delen als de imaginaire delen gelijk zijn.
Zo is $a + jb = c + jd$ als $a = c$ en $b = d$.

Twee complexe getallen met hetzelfde reële deel en met als imaginair deel twee gelijke doch tegengestelde getallen heten toegevoegd complex.
bv. $a + jb$ en $a - jb$.

Eigenschappen van twee toegevoegd complexe getallen.

1. De som van twee toegevoegd complexe getallen is reëel.
   bv. $(a + jb) + (a - jb) = 2a$.
2. Het verschil van twee toegevoegd complexe getallen is imaginair.
   bv. $(a + jb) - (a - jb) = 2jb$.
3. Het product van twee toegevoegd complexe getallen is reëel.
   bv. $(a + jb)\,(a - jb) = a^2 + b^2$.

Aanwijzing: Vermijd onnodig rekenwerk indien we een bepaald antwoord moeten uitdrukken in een reëel en een imaginair deel. Dit is vooral bij techniekvraagstukken later zeer belangrijk. Let vooral op de gemaakte voorbeelden zoals bv. in les 38 voorbeeld 2.

We zullen nu nog een voorbeeld behandelen waaruit blijkt dat er bij de imaginaire en complexe getallen nog vele mogelijkheden zijn die we tegen het einde van de cursus allemaal zullen beschouwen.

Opgave: Wat is $\sqrt[4]{-1}$.

Oplossing: $\sqrt[4]{-1}$ is te schrijven als $\sqrt{j}$.

We stellen nu $\sqrt{j} = \sqrt{x} + j\sqrt{y}$

Kwadrateren geeft: $j = x - y + 2j\sqrt{xy}$

Dus is $x - y = 0$

$2\sqrt{xy} = 1$

Kwadrateren van beide vormen geeft:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ \underline{\quad 4xy \qquad = 1 \quad +} \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{array}$$

$(x + y)^2 = 1$ dus $x + y = 1$

Verder was: $\underline{x - y = 0 \quad +}$

dus: $2x \quad = 1$ en $x = ½$

Hieruit volgt: $y = ½$

Dus is: $\sqrt{j} = \sqrt{½} + j\sqrt{½} = ½\sqrt{2} + j½\sqrt{2}$.

Willen we dit antwoord controleren dan moet:

$\left(½\sqrt{2} + j½\sqrt{2}\right)^2$ gelijk aan j zijn.

We vinden $\left(½\sqrt{2} + j½\sqrt{2}\right)^2 = \left(½\sqrt{2}\right)^2(1 + j)^2 =$
$= ½(1 + 2j - 1) = ½ \times 2j = j$.

We hebben hier dus een waarde gevonden voor $\sqrt[4]{-1}$, doch eigenlijk zijn er vier waarden te vinden die tot de vierde macht gebracht het getal -1 opleveren. Later zullen we dit leren op te lossen.
In het algemeen geldt bij een vergelijking de volgende regel:
Zo hoog als de graad van een vergelijking is, zoveel oplossingen moeten er bestaan. Dus een tweedegraads vergelijking geeft twee oplossingen, een derdegraads vergelijking geeft drie oplossingen etc. Deze oplossingen zijn echter niet altijd allemaal te vinden; het blijkt echter dat met de invoering der complexe getallen alle wortels te bepalen zijn.

Bij wortelvormen geldt als het ware dezelfde regel nl. zo hoog als de graad van een wortelvorm is, zoveel wortels moeten we vinden.

Zo is $\sqrt{9} = \pm 3$. Van een derdemachtswortel bestaan dus drie oplossingen die tot de derde macht gebracht het getal weer opleveren enz.

Oplossingen inzenden van de opgaven 401 t/m 410.

42,1. Grafische voorstelling van een complex getal

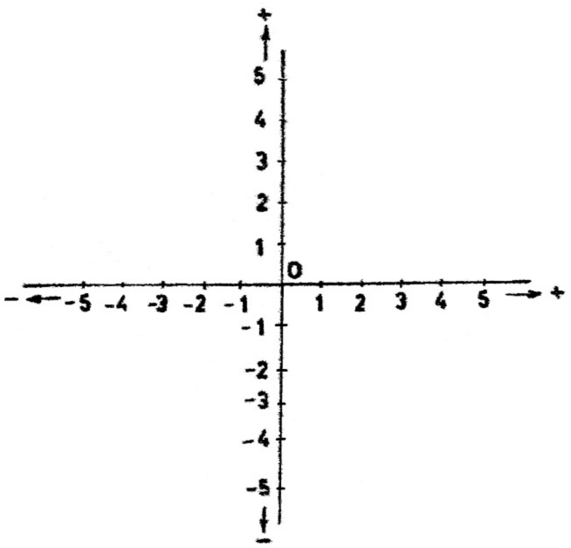

Fig. 42,1.

In de vorige lessen hebben we geleerd om met imaginaire en complexe getallen te rekenen. Het is mogelijk een complex getal ook in een tekening voor te stellen.

De complexe rekenwijze zal aan het eind van de cursus uitvoerig behandeld worden. In verband met de lessen der wisselstroomtheorie worden nu enige hoofdzaken uit de complexe rekenwijze behandeld.

Om een complex getal voor te kunnen stellen, maken we gebruik van een rechthoekig assenkruis, dat bestaat uit twee getallenrechten die loodrecht op elkaar staan.
In het snijpunt van deze getallenrechten, de oorsprong genaamd, plaatsen we de letter O (zie fig. 42,1).

Op de horizontale rechte zetten we vanuit O naar rechts en naar links een bepaalde eenheid uit, rechts positief en links negatief.
Hetzelfde doen we op de verticale rechte, naar boven positief en naar beneden negatief.

Met behulp van dit assenstelsel kunnen we nu punten in het platte vlak ten opzichte van dit assenkruis vastleggen door middel van de afstanden van het punt tot de assen.

De horizontale as heet de x-as en de verticale as de y-as. Stel dat een punt p op een afstand 5 van de x-as en op een afstand 3 van de y-as is gelegen, dan geven we dit aan met een schrijfwijze P(5,3). We kunnen ook zeggen dat de x-waarde, die het in punt P heeft, 5 eenheden is en de y-waarde 3 eenheden. Tussen de haakjes staan dus achtereenvolgens de x- en de y-waarde van het punt aangegeven. Deze waarden heten de coördinaten van het punt. Het rechthoekig assenstelsel wordt dan ook wel het rechthoekig coördinatenstelsel genoemd.

Het platte vlak wordt door het assenkruis in vier kwadranten verdeeld (zie de meetkundelessen).
In fig. 42,2 zijn een aantal punten afgebeeld; de coördinaten zijn achter het punt vermeld.
In latere lessen over de grafieken of grafische algebra gaan we hier verder op in.

Om de complexe getallen voor te kunnen stellen, maken we gebruik van een rechthoekig assenstelsel. Langs de horizontale as plaatsen we nu de reëele getallen en langs de verticale as de imaginaire getallen. Men noemt hier dan ook de horizontale as de reële as en de verticale as de imaginaire as.
Dit geven we aan door bij de horizontale as het cijfer 1 te plaatsen en bij de verticale as de letter j.
Een complex getal bestaat, zoals we weten, uit een reëel deel en een imaginair deel, bv. $a + jb$.
Deze grootheden kunnen we niet bij elkaar optellen, zodat we het punt niet behoeven aan te geven door (a, b), doch de schrijfwijze $a + jb$ kunnen handhaven. In fig. 42,3 is een aantal punten in het complexe vlak aangegeven.

En wel de punten $P(3+4j)$; $Q(-5+3j)$; $R(-3-2j)$ en $S(2-3j)$. Alle complexe getallen zijn dus in het complexe vlak voor te stellen en hiervan wordt in de wisselstroomtheorie een veelvuldig gebruik gemaakt. Indien we een complex getal voor willen stellen, dan doen we dit vaak door boven de letter een horizontaal streepje te plaatsen, bv. $\bar{P}$.

In les 5 der wisselstroomtheorie (pag. 17), zagen we dat de reactantie van de condensator verticaal naar beneden is uitgezet. Door gebruik te maken van de complexe rekenwijze kunnen we nu de reactantie van de condensator voorstellen als $\frac{-j}{\omega C}$. Immers j geeft aan dat we de reactantie langs de imaginaire as moeten zetten. Het minteken geeft aan dat we dit naar beneden toe moeten doen.

Zo leerden we in les 8 der wisselstroomtheorie (pag. 24), dat de reactantie van een spoel verticaal neer boven werd uitgezet. Met behulp der complexe rekenwijze is het weer mogelijk om de reactantie van de spoel voor te stellen als $j\omega L$.

Verder bleek dat bij een serieschakeling bv. van een spoel en een weerstand de wortel uit de som der kwadraten genomen moest worden om de impedantie te verkrijgen. Dit kunnen we nu eenvoudiger doen, we zeggen dan, dat de complexe impedantie van de serieschakeling van een spoel en een weerstand is $\bar{Z} = R + j\omega L$ en van een weerstand en een condensator $\bar{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$.

Het is nl. toch niet mogelijk de reële en imaginaire delen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.

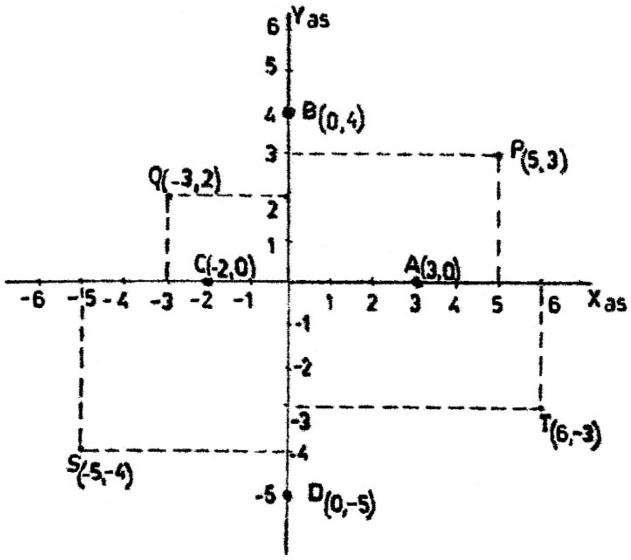

Fig. 42,2.

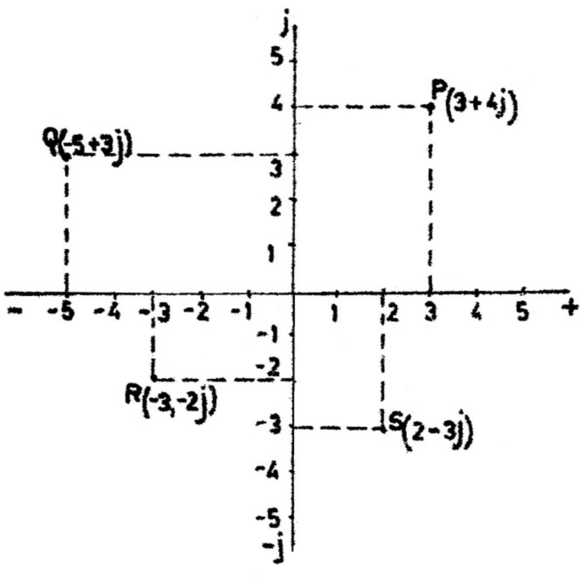

Fig. 42,3.

Ter oefening maken de opgaven 411 t/m 413.
Oplossingen inzenden van de opgaven 414 t/m 416.

HILVERSUM

43,1. Grafische voorstelling van een complex getal (vervolg).

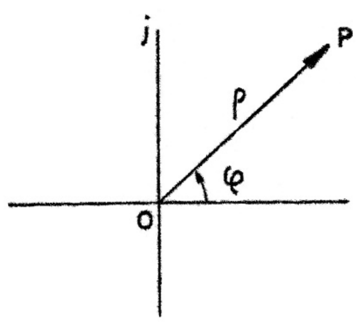

Fig.43,1.

Beschouwen we nogmaals het complexe getal $\bar{P} = a + jb$, dan is het mogelijk dit complex getal op een andere manier vast te leggen (zie fig. 43,1).

Het punt P is nu vastgelegd door de afstand van 0 tot het beschouwde punt. Deze afstand aangegeven door de letter ρ (rho) heet de modulus.

In de wisselstroomtheorie noemt men dit de absolute waarde. Door de modulus of absolute waarde alleen is echter het punt P niet bepaald. Geeft men nl. alleen deze afstand, dan kunnen we met de lengte OP als straal een cirkel beschrijven. Voor alle punten van deze cirkel geldt dan, dat de afstand tot 0 gelijk is aan OP.

Om één bepaald punt in het complexe vlak aan te geven, moeten we dus niet alleen de modulus of absolute waarde weten, doch ook waar deze modulus of absolute moet staan. Deze stand wordt aangegeven door de hoek φ het argument genoemd. Een complex getal is dus bepaald door modulus en argument (ρ en φ).

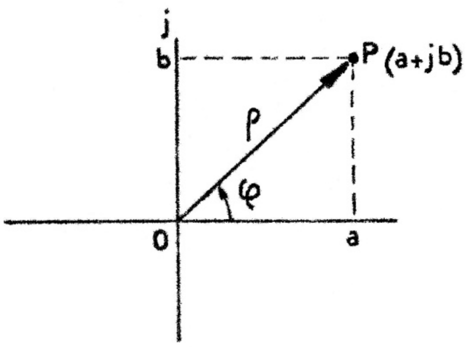

Fig. 43.2.

In fig. 43,2 is het complexe getal $\bar{P}$ aangegeven door de waarden a en b en door de waarden ρ en φ. Willen we nu $\bar{P} = a + jb$ schrijven in de grootheden ρ en φ, dan bedenken we dat $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$, dus $a = \rho\cos\varphi$ en $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$, dus $b = \rho\sin\varphi$.

Ingevuld in $a + jb$ geeft dit:
$\rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi$ of $\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$.

De hoek φ wordt in de wisselstroomtheorie de hoek van faseverschuiving genoemd.

Uit fig. 43,2 zien we tevens dat geldt volgens de stelling van Pythagoras:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Het argument ofwel de hoek van faseverschuiving kunnen we het eenvoudigste bepalen uit de uitdrukking $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Indien we fig. 43,2 beschouwen, dan zien we dat $\tan\varphi$ gevonden wordt door het imaginaire deel te delen door het reële deel. We komen nu dus tot de voor de radiotechniek zo belangrijke samenvatting:

1e De absolute waarde van een complex getal is bepaald door de wortel uit de som van de kwadraten van het reële deel en het imaginaire deel.

2e De tangens van het argument (de hoek van faseverschuiving) wordt bepaald door het imaginaire deel van het complexe getal te delen door het reële deel.

Stel, we hebben een serieschakeling van een spoel en een weerstand. de weerstand beschouwen we als een reële grootheid R. De reactantie van de spoel stellen we voor door $j\omega L$. De impedantie is dan $R + j\omega L$, dus: $\bar{Z} = R + j\omega L$.

De absolute waarde van $\bar{Z}$ (aangegeven door dezelfde letter, doch nu zonder streepje er boven) is $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. De hoek van faseverschuiving vinden we uit $\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$.

We hebben nu dezelfde waarden voor de absolute waarde en het argument gevonden als in les 8, blz 24 van de wisselstroomtheorie, doch veel sneller.

Bij serieschakeling van een condensator en een weerstand kunnen we dus zeggen: $\bar{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$.
Hieruit volgt dan dat: $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ en $\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{\omega CR}$, (zie Wt, les 5, pag. 16).

Uit $\tan\varphi = -\frac{1}{\omega CR}$ volgt t.g.v. het minteken dat de hoek naar beneden moet worden uitgezet. Dit was in de uitdrukking van les 5 , Wt, pag. 16 niet meer te zien. Hieruit volgt alweer een voordeel van het gebruik der complexe rekenwijze.

Wij willen er nog even op wijzen dat voor de reactantie ook vaak de uitdrukking $\frac{1}{j\omega C}$ wordt gebruikt, immers vermenigvuldigen we teller en noemer met j dan vinden we $\frac{j}{j^2\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$.

De schrijfwijze $\frac{1}{j\omega C}$ biedt voordelen, indien we met admittanties moeten werken.
In Wt, les 5, pag. 18 zijn een weerstand en condensator parallel geschakeld. Willen we hiervan de impedantie en de faseverschuiving weten, dan gaan we als volgt te werk:

$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C$, dus $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \frac{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}{R^2}$ of $Z = \sqrt{\frac{R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$.

Verder is $\tan\varphi = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = \omega CR.$

Uit bovenstaand voorbeeld kunnen we tevens leren dat we het reele en imaginaire deel steeds gescheiden moeten houden, willen we de wortel uit de som der kwadraten kunnen nemen.

Bij de serieschakeling van een spoel, weerstand en een condensator kunnen we schrijven dat:

$$\bar{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

De absolute waarde is: $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. (let op, de wortel uit de som van de kwadraten uit het reële en het imaginaire deel, dus:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Dit resultaat hebben we ook gevonden in les 10 van de wisselstroomtheorie (pag. 19).

Indien we in de uitdrukking $\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ het imaginaire deel gelijk aan nul stellen, vinden we uit $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, de waarde voor de resonantiefrequentie.

Ter oefening maken de opgaven 417 t/m 421.
Oplossingen inzenden van de opgaven 422 t/m 428.

44,1. Grafische voorstelling van een complex getal (vervolg).

Bestaat een getal uit meer reële en imaginaire grootheden, dan voegen we de reële getallen bij elkaar en de imaginaire getallen bij elkaar en nemen dan, om de absolute waarde te bepalen, de wortel uit de som der kwadraten van het reële en het imaginaire deel. Voor de tangens van het argument nemen we het imaginaire deel gedeeld door het reële deel.

Voorbeeld: Wat is de absolute waarde en de tangens van het argument van het getal:

$a + jb + c - d + jf - jg$? We schrijven dit getal als:

$(a + c - d) + j(b + f - g)$. De absolute waarde is nu:

$\sqrt{(a + c - d)^2 + (b + f - g)^2}$ en $\tan\varphi = \frac{b+f-g}{a+c-d}$.

We dienen er goed op te letten dat het getal eerst gesplitst moet worden in een reëel en een imaginair deel voordat we modulus en argument bepalen.

Voorbeeld: Wat zijn modulus en argument van $\frac{1}{a+jb}$?

Oplossing: $\frac{1}{a+jb} = \frac{1}{a+jb} \times \frac{a-jb}{a-jb} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}. \quad \tan\varphi = \frac{-\frac{b}{a^2+b^2}}{\frac{a}{a^2+b^2}} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}.$$

Later zullen we methoden leren om de modulus en argument van producten, quotiënten en machten van complexe getallen op een snellere manier op te lossen. Het is hiervoor echter nodig om een groot deel der goniometrie te kennen zodat we dit tot later zullen uitstellen. Daar we er echter in de techniek een groot gemak van hebben, zullen we deze methoden aangeven zonder ze te bewijzen.
Het is dus raadzaam het nu uit het hoofd te leren en zonder meer toe te passen.

Regel 1: Een product van twee complexe getallen geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus het product der moduli der oorspronkelijke complexe getallen en als argument de som der argumenten. (Let er op: niet de som der tangenten, doch de som der hoeken.)

Om een gebruik van de argumenten te kunnen maken, moeten we de goniometrie kennen, zodat we bovenstaande regel en ook de volgende slechts nuttig kunnen gebruiken om de absolute waarde van een complexe uitdrukking te vinden.

Voorbeeld: De modulus van $(a + jb)(c + jd) = \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$.

Regel 2: Een quotiënt van twee complexe getallen geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus het quotiënt der moduli der oorspronkelijke complexe getallen en als argument het verschil der argumenten.

Voorbeeld: De modulus van $\frac{a+jb}{c+jd}$ is $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{c^2+d^2}}$.

Regel 3: Een complex getal tot een macht gebracht geeft als uitkomst een nieuw complex getal met als modulus de modulus van het oorspronkelijke complex getal tot die macht en als argument de macht maal het argument van het oorspronkelijke complexe getal.

Voorbeeld: De modulus van $(a + jb)^n$ is $\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^n$.

Enige uitgewerkte voorbeelden:
Bepaal de modulus van $(3 + 4j)(5 - 2j)$.

Oplossing (volgens de oude methode):
$(3+4j)(5-2j) = 15-6j+20j+8 = 23+14j.$

De modulus is dan: $\sqrt{20^2+14^2} = \sqrt{725} = 5\sqrt{29}$.

Oplossing (volgens regel 1):

De modulus is: $\sqrt{9+16} \times \sqrt{25+4} = \sqrt{25 \times 29} = \mathbf{5\sqrt{29}}.$

Bepaal de modulus van: $\frac{2-7j}{3+5j}$.

Oplossing:

$$\frac{2-7j}{3+5j} = \frac{2-7j}{3+5j} \times \frac{3-5j}{3-5j} = \frac{(2-7j)(3-5j)}{9+25} = \frac{6-10j-21j-35}{34} = \frac{-29-31j}{34} = -\frac{29}{34} - \frac{31}{34}j.$$

De modulus is: $\sqrt{\left(\frac{29}{34}\right)^2 + \left(\frac{31}{34}\right)^2} = \frac{1}{34}\sqrt{29^2+31^2} = \mathbf{\frac{1}{34}\sqrt{1802}}.$

Volgens regel 2 wordt de oplossing:

Modulus $= \frac{\sqrt{4+49}}{\sqrt{9+25}} = \sqrt{\frac{53}{34}} = \frac{1}{34}\sqrt{53 \times 34} = \mathbf{\frac{1}{34}\sqrt{1802}}.$

Bepaal de modulus van de uitdrukking: $\frac{(1-j3)^7}{(2-2j)^5}$.

Uit deze opgave blijkt wel duidelijk dat het praktisch onmogelijk is de modulus te berekenen, indien we geen gebruik zouden maken van de 3 regels. We vinden nu voor de modulus:

$$\frac{\left(\sqrt{1+3}\right)^7}{\left(\sqrt{4+4}\right)^5} = \frac{\left(\sqrt{4}\right)^7}{\left(\sqrt{8}\right)^5} = \frac{(2)^7}{\left(2\sqrt{2}\right)^5} = \frac{2^7}{2^7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Bepaal de impedantie van een parallelschakeling van een weerstand R en een spoel L, terwijl in serie met de parallelschakeling een condensator is opgenomen.

Oplossing:

$$\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R \times j\omega L}{R+j\omega L}.$$

(Opmerking: Voor de parallelschakeling wordt gebruik gemaakt van product gedeeld door de som.)

Onder een noemer gebracht geeft:

$$\bar{Z} = \frac{(R+j\omega L)-R\omega^2 LC}{j\omega C(R+j\omega L)} = \frac{R-R\omega^2 LC+j\omega L}{j\omega C(R+j\omega L)}.$$

$$Z = \sqrt{\frac{(R-R\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}{\omega^2 C^2(R^2+\omega^2 L^2)}} = \boldsymbol{\frac{1}{\omega C}\sqrt{\frac{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}{R^2+\omega^2 L^2}}}.$$

Bepaal de impedantie van een parallelschakeling van een weerstand, een spoel en een condensator.

Oplossing: $\bar{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + \frac{-j}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}, \text{ dus: } Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$ (zie Wt, les 14, pag. 42).

De faseverschuiving vinden we uit:

$$\tan\varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = \boldsymbol{R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}.$$ (Zie Wt. les 14, pag. 42).

Ter oefening maken de opgaven 429 t/m 432.

Oplossingen inzenden van de opgaven 433 t/m 437.

45,1. Vergelijkingen van de tweede graad met één onbekende.

De algemene voorstelling van een vergelijking van de tweede graad is $ax^2 + bx + c = 0$. Hierin is x de onbekende, terwijl a, b en c bekende grootheden voordtellen.

In plaats van over een vergelijking van de tweede graad, spreken we liever over een vierkants-vergelijking. Is de onbekende x, dan zeggen we een vierkantsvergelijking in x.
Zijn de waarden b en c of een van beide gelijk aan nul, dan noemen we dit een onvolledige vierkants-vergelijking. Dit zijn bv. de vergelijkingen: $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 + c = 0$ en $ax^2 = 0$.

Daar de laatste twee vergelijkingen direct door worteltrekking oplosbaar zijn, noemen we deze beide laatste vergelijkingen ook wel zuivere vierkantsvergelijkingen.
De oplossing hiervan gaat als volgt:

Voorbeeld 1: Bepaal x uit de vergelijking $16x^2 - 25 = 0$.
Oplossing:
Brengen we de bekende term naar het andere lid, dan vinden we: $16x^2 = 25$. Delen door 16 geeft: $x^2 = \frac{25}{16}$ waarna door worteltrekking volgt: $x = \pm\sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4}$.

Voorbeeld 2: Idem uit a$x^2 + c = 0$ (dus algemeen).
Oplossing 2: Nu is $ax^2 = -c$ of $x^2 = -\frac{c}{a}$ dus: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. We merken hierbij op dat onder het wortelteken een minteken staat, dit wil echter niet zeggen dat de gehele vorm onder het wortelteken negatief zal zijn. Indien c of a negatief is, wordt de vorm positief, zoals ook blijkt uit voorbeeld 1.

Bij de vorm $ax^2 + bx = 0$ moeten we anders te werk gaan. We ontbinden het eerste lid en vinden $x(ax + b) = 0$. We wijzen nogmaals op de volgende belangrijke regel:

Een product is gelijk aan mul als één van de factoren gelijk is aan nul.

Uit $x(ax + b) = 0$ volgt dus dat oplossingen gevonden kunnen worden als $x = 0$ en $ax + b = 0$.
Dus: $x = -\frac{b}{a}$.

Om aan te geven dat we twee verschillende waarden vinden voor x of, zoals we liever zeggen, twee wortels uit de vierkantsvergelijking, noemen we de wortels x_1 en x_2.

Uit $ax^2 + bx = 0$ volgt dus $x_1 = 0$ en $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Voorbeelden:

1. Los x op uit $2x^2 - 6x = 0$.
Oplossing:
$2x(x - 3) = 0$, dus daar 2 niet gelijk aan nul kan zijn, is: $x_1 = 0$ of $x - 3 = 0$, dus: $x_2 = 3$.

2. $\frac{x^2}{x-3} + \frac{3x}{x-3} = \frac{9x}{x-3}$.
Oplossing:
$\frac{x^2+3x}{x-3} = \frac{9x}{x-3}$, dus $x^2 + 3x = 9x$ of $x^2 + 3x - 9x = 0$, dus: $x^2 - 6x = 0$.
Hieruit volgt $x(x - 6) = 0$, dus: $x_1 = 0$ en $x_2 = 6$. Let er bij dit voorbeeld op dat bij het invullen van de oplossingen in de vergelijkingen de noemer niet gelijk aan nul mag worden.

Evenals we dit bij het oplossen van vergelijkingen met meer onbekenden hebben geleerd, kunnen we de gevonden oplossing controleren door de waarde van x in de oorspronkelijke vergelijking in te vullen. We vestigen voorts nog de aandacht op de volgende belangrijke regel:

De graad van een vergelijking komt overeen met het aantal wortels.

Een tweedegraadsvergelijking moet dus altijd twee oplossingen opleveren.
Zijn de twee wortels die we vinden gelijk, hetgeen dikwijls voor kan komen, dan noemen we deze wortels twee samenvallende wortels.

Hebben we bv. de vergelijking $(x-3)^2 = 0$, dan kunnen we dit schrijven als $(x-3)(x-3) = 0$ en vinden $x_1 = 3$ en $x_2 = 3$. We schrijven ook wel $x = 3\ (2\times)$. Aldus tussen haakjes aangevend, dat de oplossing dubbel telt.

Bij het oplossen van een volledige vierkantsvergelijking maken we vaak een handig gebruik van het ontbinden in factoren. We zullen dit met enige voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld 1:
Los x op uit: $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Oplossing:
Door middel van ontbinding in factoren vinden we: $(x-2)(x-3) = 0$, dus: $x - 2 = 0$ of $x_1 = 2$ en $x - 3 = 0$ of $x_2 = 3$.

Voorbeeld 2:
Los x op uit: $2x^2 + 5x + 2 = 0$.
Oplossing:
$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + x + 2 = 2x(x+2) + 1(x+2) = (2x+1)(x+2) = 0$.
Dus: $2x + 1 = 0$ of $x_1 = -½$ en $x + 2 = 0$ of $x_2 = -2$.

Voorbeeld 3:
Los x op uit: $6x^2 - 5x - 11 = 0$.
Oplossing:
$6x^2 - 5x - 11 = 6x^2 - 11x + 6x - 11 = x(6x - 11) + 1(6x - 11) =$
$= (x+1)(6x-11) = 0$. Dus: $x + 1 = 0$ of $x_1 = -1$ en $6x - 11 = 0$ of $x_2 = \frac{11}{6}$.

Voorbeeld 4:
Los x op uit: $x^2 - 2x + 1 = 0$.
Oplossing:
$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$, dus: $x = 1\ (2\times)$.

Voorbeeld 5:
Los x op uit: $4x^2 + 12x + 9 = 0$.
Oplossing:
$4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2 = 0$, dus: $x = -\frac{3}{2}\ (2\times)$.

Het is echter niet altijd mogelijk om het linkerlid zo eenvoudig in factoren te ontbinden, zodat we een methode gaan zoeken om iedere vierkantsvergelijking op te lossen.
Het is natuurlijk mogelijk dat er in het geheel geen reële waarden voor x te vinden zijn. Er zijn dan echter toch imaginaire of complexe oplossingen.

Ter oefening maken de opgaven 438 t/m 442.
Oplossingen inzenden van de opgaven 443 t/m 447.

R.T.

HILVERSUM

46.1. Oplossing van de algemene vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

Alvorens deze oplossing te geven, gaan we eerst het zogenaamde “kwadraat afsplitsen” bekijken aan de hand van enige voorbeelden. Van de vorm $x^2 + 6x$ beschouwen we $6x$ als dubbelproduct. We kunnen dan schrijven voor $x^2 + 6x$ de vorm $(x + 3)^2$. Indien we de laatste vorm, dus het volkomen kwadraat, uitwerken, dan vinden we $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Hieruit blijkt dat de term 9 er dus bijgevoegd is. Willen beide vormen nu aan elkaar gelijk zijn, dan moeten we het getal 9 er weer aftrekken, dus: $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
We zullen nu enige vormen zonder verdere beschrijving uitwerken:
$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$.
$x^2 - 5x = \left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.
$3x^2 - 7x = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) = 3\left\{\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right\} = 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}$.
$5x^2 - 3x + 4 = 5\left(x^2 - \frac{3}{5}x\right) + 4 = 5\left\{\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100}\right\} + 4 = 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{20} + 4 = 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + 3\frac{11}{20}$.
$2x^2 + 6x + 3 = 2(x^2 + 3x) + 3 = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{2}$.

Keren we nu terug naar de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. We delen beide leden van de vergelijking door a en vinden dan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
Hierdoor is de eerste term een volkomen kwadraat geworden. We hadden de eerste term ook tot een volkomen kwadraat kunnen maken door beide leden met a te vermenigvuldigen. Welke methode men volgt, is niet belangrijk; het resultaat is hetzelfde. Van de vorm $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ splitsen we een kwadraat af als volgt: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.
Brengen we nu de bekende termen naar rechts, dan vinden we:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Worteltrekken aan beide kanten geeft:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Zodat: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

We zien in deze vorm dat er wederom twee oplossingen gevonden worden, nl.:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{en} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

We voegen deze beide oplossingen meestal samen en geven dit aan als:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, waarbij de schrijfwijze $x_{1,2}$ duidt op de beide oplossingen die in één formule zijn verenigd. Daar deze afleiding zeer belangrijk is, zullen we haar nogmaals, doch nu zonder tussenvoegsels geven. De leerling dient deze afleiding precies te kunnen geven.

$ax^2 + bx + c = 0$. Delen door a geeft: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{of} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dus: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

R.T.

92 Aa

Nadruk verboden

De a, b, c – formule.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze formule staat in de wiskunde bekend als de a ,b, c – formule.

Toepassingen:

1. Los x op uit: $5x^2 - 11x - 42 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{+11 \pm \sqrt{121 + 840}}{10} = \frac{+11 \pm \sqrt{961}}{10} = \frac{11 \pm 31}{10}$, dus:

$x_1 = \frac{11 + 31}{10} = \frac{42}{10} = \mathbf{4{,}2}$ en $x_2 = \frac{11 - 31}{10} = \frac{-20}{10} = \mathbf{-2}$.

2. Eveneens uit: $7x^2 + 13x - 2 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14} = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{14} = \frac{-13 \pm 15}{14}$, zodat:

$x_1 = \frac{-13+15}{14} = \frac{2}{14} = \mathbf{\frac{1}{7}}$ en $x_2 = \frac{-13-15}{14} = \frac{-28}{14} = \mathbf{-2}$

3. Eveneens uit: $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6} = \frac{+4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$, zodat:

$x_1 = \mathbf{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}$ en $x_2 = \mathbf{\frac{2-\sqrt{10}}{3}}$.

4. Eveneens uit: $x^2 + (a - b)x - ab = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab}}{2} =$

$= \frac{-(a-b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}{2} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2} = \frac{-(a-b) \pm (a+b)}{2}$, zodat:

$x_1 = \frac{-(a-b) + (a+b)}{2} = \frac{-a+b+a+b}{2} = \frac{2b}{2} = \boldsymbol{b}$ en

$x_2 = \frac{-(a-b) - (a+b)}{2} = \frac{-a+b-a-b}{2} = \frac{-2a}{2} = \boldsymbol{-a}$.

5. Eveneens uit: $x^2 - 2(m - n)x - 4mn = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{2(m-n) \pm \sqrt{4(m-n)^2 + 16mn}}{2} = (m-n) \pm \sqrt{(m-n)^2 + 4mn} =$

$= (m-n) \pm \sqrt{m^2 - 2mn + n^2 + 4mn} = \ (m-n) \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2} = (m-n) \pm \sqrt{(m+n)^2} =$

$= (m-n) \pm (m+n)$, dus: $x_1 = m - n + m + n = \mathbf{2}\boldsymbol{m}$ en $x_2 = m - n - m - n = \mathbf{-2}\boldsymbol{n}.$

6. Eveneens uit: $(b - c)x^2 + (c - a) + (a - b) = 0$.

Oplossing: $x_{1,2} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{c^2 - 2ac + a^2 - 4ab + 4b^2 + 4ac - 4bc}}{2(b-c)} =$

$= \frac{-(c-a) \pm \sqrt{c^2 + 2ac + a^2 - 4b(a+c) + 4b^2}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4b(a+c) + 4b^2}}{2(b-c)} = \frac{-(c-a) \pm \sqrt{(a+c-2b)^2}}{2(b-c)} =$

$= \frac{-(c-a) \pm (a+c-2b)}{2(b-c)}$, dus: $x_1 = \frac{-(c-a) + (a+c+2b)}{2(b-c)} = \frac{-c+a+a+c-2b}{2(b-c)} = \frac{2a-2b}{2(b-c)} = \mathbf{\frac{a-b}{b-c}}$.

en: $x_2 = \frac{-(c-a) - (a+c-2b)}{2(b-c)} = \frac{-c+a+a+c-2b}{2(b-c)} = \frac{2b-2c}{2(b-c)} = \mathbf{1.}$

Ter oefening maken de opgaven 448 t/m 452.

Oplossingen inzenden van de opgaven 453 t/m 457.

HILVERSUM

47,1. Vierkantsvergelijking (vervolg).

In de wiskunde kent men ook nog de zogenaamde p.q-formule. Deze is in wezen hetzelfde als de a. b. c.-formule, alleen geldt bij de p.q.-formule de beperking dat de coëfficiënten van x^2 gelijk aan 1 zijn. De vergelijking wordt dan voorgesteld door:

$$x^2 + px + q = 0$$

De oplossing gaat precies hetzelfde als bij de a.b.c.-formule en luidt:

$$x_{1,2} = 1\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}\,.$$

Daar de a.b.c.-formule meer algemeen is dan de p.q.-formule, werken we praktisch niet met de laatste, daar deze als het ware in de a.b.c.-formule is opgenomen.

47,2. Ontbinding in factoren m.b.v. de a.b.c.-formule.

Stel we moeten de vorm $x^2 - 8x + 12$ in factoren ontbinden, dan weten we dat we twee getallen moete zoeken waarvan de som gelijk is aan -8 en het product gelijk is aan 12. Dit zijn de getallen -6 en -2. De vorm is dan te ontbinden in $(x-6)(x-2)$ (zie Aa, les 10, blz. 19).
We zullen nu deze vorm in factoren ontbinden m.b.v. de a.b.c.-formule.

Deze formule kunnen we alleen maar toepassen als de vorm een vergelijking is, dus ergens aan gelijk is. nu is er een waarde voor x waarvoor de som nul wordt, d.w.z. dan is $x^2 - 8x + 12 = 0$, waaruit we vinden:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2.$$

zodat $x_1 = 4 + 2 = 6$ en $x_2 = 4 - 2 = 2$. Dus $x_1 = 6$ of $x_1 - 6 = 0$ en $x_2 = 2$ of $x_2 - 2 = 0$. Vermenigvuldigen we deze beide gevonden waarden met elkaar, dan blijft dit product gelijk aan 0, zodat $(x_1 - 6)(x_2 - 2) = 0$. We hadden ook gesteld, dat $x^2 - 8x + 12 = 0$ was, zodat we vinden $x^2 - 8x + 12 = (x_1 - 6)(x_2 - 2) = 0$. Laten we de voorwaarde "gelijk aan nul" weg (die werd immers ingevoerd), dan geldt:

$$x^2 - 8x + 12 = (x_1 - 6)(x_2 - 2).$$

Deze methode is uitstekend te gebruiken indien we de ontbinding in factoren niet zo snel kunnen vinden, daar er bv. grote getallen in de vorm voorkomen.

Algemeen kunnen we de ontbinding, die we nu geleerd hebben als volgt weergeven:
Ontbind de vorm $ax^2 + bx + c$, dit wordt dan $a(x - x_1)\,(x - x_2)$, waarbij $x_1\ en\ x_2$ de wortels van de vierkantsvergelijking zijn.

Voorbeeld 1: Ontbind in factoren de vorm $3x^2 + 17x + 10$.
Oplossing: Volgens bovenstaande geldt: $3x^2 + 17x + 10 = 3(x - x_1)\,(x - x_2)$, waarin:

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 120}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{-17 \pm 13}{6},\ \text{dus: } x_1 = \frac{-17+13}{6} = -\frac{2}{3}\ \text{ en }\ x_2 = \frac{-17-13}{6} = -\mathbf{5}.$$

De ontbinding wordt dan $3\left(x + \frac{2}{3}\right)x + 5 = (3x + 2)(x + 5)$.
Men lette er goed op dat we gesteld hebben als ontbinding: x min x_1 en x min x_2.
Daar we vonden dat x_1 en x_2 eveneens negatief waren worden de factoren dus x plus $\frac{2}{3}$ en x plus 5.
Hiermee worden dikwijls fouten gemaakt.

Voorbeeld 2: Ontbind $12x^2 - 40x - 7$.
Oplossing: De ontbinding is: $12(x - x_1)(x - x_{2)}$ waarin $x_1\ en\ x_2$ de wortels zijn van:

$12x^2 - 40x - 7 = 0$. Deze zijn: $x_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 + 32}}{24} = \frac{40 \pm 44}{24}$.

$x_1 = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}$ en $x_2 = \frac{-4}{24} = -\frac{1}{6}$, zodat de ontbinding wordt: $12\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

We willen de factor 12 nu nog in de gevonden factoren werken en doen dit zo, dat de breuken verdwijnen, dus:

$12\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)=2\left(x-\frac{7}{2}\right).6\left(x+\frac{1}{6}\right)=(2x-7)(6x+1)$, zodat we vinden:

$12x^2-40x-7=(2x-7)(6x+1)$.

Met behulp van deze methode van ontbinding in factoren kunnen we nu de moeilijkste ontbindingen maken, hetgeen we met enige uitgewerkte voorbeelden zullen aantonen.

Voorbeeld 3: Ontbind in factoren $x^2+7xc-5xd+12c^2-19cd+4d^2$.

Oplossing: Schrijf de vorm als $x^2(7c-5d)x+12c^2-19cd+4d^2$ en beschouw de vorm als een vierkantsvergelijking in x, zodat de ontbinding wordt $(x-x_1)(x-x_2)$, waarbij x_1 en x_2 de wortels zijn van de vierkantsvergelijking.

$$x^2(7c-5d)x+12c^2-19cd+4d^2=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{-(7c-5d)\pm\sqrt{(7c-5d)^2-4(12c^2-19cd+4d^2)}}{2}=\frac{-(7c-5d)\pm\sqrt{49c^2-70cd+25d^2-48c^2+76cd-16d^2}}{2}=$$

$$=\frac{-(7c-5d)\pm\sqrt{c^2+6cd+9d^2}}{2}=\frac{-(7c-5d)\pm(c+3d)}{2}.$$

$$x_1=\frac{-(7c-5d)+(c+3d)}{2}=\frac{-7c+5d+c+3d}{2}=\frac{-6c+8d}{2}=-3c+4d.$$

$$x_2=\frac{-(7c-5d)-(c+3d)}{2}=\frac{-7c+5d-c-3d}{2}=\frac{-8c+2d}{2}=-4c+d.$$

We vinden nu als ontbinding: $\boldsymbol{(x+3c-4d)(x+4c-d)}$.

Voorbeeld 4: Ontbind $9a^2+3ab+6ac-20b^2+19bc+3c^2$.

Oplossing: Beschouw de vorm als een vierkantsvergelijking in a (of in b of in c), dan is de ontbinding $9(a-a_1)(a-a_2)$.
a_1 *en* a_2 vinden we uit $9a^2+(3b+6c)a-(20b^2-19bc+3c^2)=0$.

$$a_{1,2}=\frac{-(3bc+6c)\pm\sqrt{(3b+6c)^2+36(20b^2-19bc+3c^2)}}{18}=\frac{-3(b+2c)\pm3\sqrt{(b+2c)^2+4(20b^2-19bc+3c^2)}}{18}=$$

$$=\frac{-(b+2C)\pm\sqrt{b^2+4bc+4c^2+80b^2-76bc+12c^2}}{6}=$$

$$=\frac{-(b+2c)\pm\sqrt{81b^2-72bc+16c^2}}{6}=\frac{-(b+2c)\pm(9b-4c)}{6}.$$

$$a_1=\frac{-(b+2c)+(9b-4c)}{6}=\frac{-b-2c+9b-4c}{6}=\frac{8b-6c}{6}=\frac{4b-3c}{3}.$$

$$a_2=\frac{-(b+2c)-(9b-4c)}{6}=\frac{-b-2c-9b+4c}{6}=\frac{-10b+2c}{6}=\frac{-5b+c}{3}.$$

De ontbinding wordt dan:

$$9\left(a-\frac{4b-3c}{3}\right)\left(a-\frac{-5b+c}{3}\right)=\boldsymbol{(3a-4b+3c)(3a+5b-c)}.$$

Ter oefening maken de opgaven 458 t/m 462.
Oplossingen inzenden van de opgaven 463 t/m 467.

48,1. De discriminant van een vierkantsvergelijking.

Bij de oplossing van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ vonden we als wortels:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

De vorm $b^2 - 4ac$ heet de discriminant van de vierkantsvergelijking aangegeven door de letter D.

Als D groter is dan nul, dan wil dit zeggen, dat $\sqrt{b^2 - 4ac}$ te trekken is, dus vinden we twee wortels voor x. Als D gelijk aan nul is, dan zijn de wortels voor x gelijk en als D kleiner dan nul is, dan is $\sqrt{b^2 - 4ac}$ onbestaanbaar, dus zijn er geen wortels voor x.

Samengevat:

$D > 0$	twee ongelijke reële wortels.
$D = 0$	twee gelijke reële wortels.
$D < 0$	geen bestaanbare wortels, doch complexe wortels.

Opgave: Voor welke waarden van m heeft de vergelijking

$x^2 - 2x - 6mx + 14m = 21$ gelijke wortels?

Oplossing: De discriminant van de vergelijking $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(2m + 3) = 0$ moet nul zijn, dus:

$4(1 + 3m)^2 - 28(2m + 3) = 0$ of $(1 + 3m)^2 - 7(2m + 3) = 0$, dus:

$$1 + 6m + 9m^2 - 14m - 21 = 0$$

$$9m^2 - 8m - 20 = 0.$$

$$m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 720}}{18} = \frac{8 \pm \sqrt{784}}{18} = \frac{8 \pm 28}{18}\text{, dus:}$$

$$m_1 = \mathbf{2} \quad \text{en} \quad m_2 = -\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}.$$

We merken nog op dat indien $D < 0$ is, de wortels voor x_1 en x_2 toegevoegd complex zijn.

48,2. Eigenschappen van de wortels x_1 en x_2.

Als oplossing met de a.b.c.-formule hadden we voor de wortels gevonden:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{en} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Tellen we deze wortels bij elkaar op, dan vinden we:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}.$$

Vermenigvuldigen we beide wortels met elkaar, dan vinden we:

$$x_1 . x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\ .$$

Deze uitkomsten zijn zo eenvoudig dat we ze uit het hoofd leren, dus:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Voorbeelden:

1e. Bepaal de som en het product van de wortels van de vergelijking $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Oplossing: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$.

2e. Gegeven de vergelijking $x^2 + mx + 15 = 0$. Een der wortels is 3. Bepaal m en de andere wortel zonder de vergelijking op te lossen.

Oplossing: $x_1 x_2 = 15$. Stel $x_1 = 3$, dan is $x_2 = \frac{15}{3} = 5$.

$x_1 + x_2 = -m = 3 + 5$, dus: $\boldsymbol{m = -8}$.

We hadden m ook op kunnen lossen door de gegeven wortel $x = 3$ in de vergelijking in te vullen. Immers de wortel is een oplossing van de vergelijking $x^2 + mx + 15 = 0$, dus moet aan deze vergelijking voldoen. $x = 3$ ingevuld geeft $9 + 3m + 15 = 0$, dus $3m = 24$ en $m = -8$.
Men kan dus beide methoden volgen.

3e. Bepaal a zodanig, dat de ene wortel van de vergelijking $5x^2 - 9x + a = 0$ het dubbele is van de andere.

Oplossing: $x_1 = 2x_2$ en daar $x_1 + x_2 = \frac{9}{5}$.

$2x_2 + x_2 = 3x_2 = \frac{9}{5}$, dus $x_2 = \frac{3}{5}$.

$x_1 . x_2 = \frac{a}{5}$ of $2x_2 . x_2 = 2{x_2}^2 = \frac{a}{5}$, dus ${x_2}^2 = \frac{a}{10}$, maar $x_2 = \frac{3}{5}$, zodat

$\frac{9}{25} = \frac{a}{10}$ $waaruit\ volgt$: $\boldsymbol{a = \frac{18}{5}}$.

4e. Gegeven de vergelijking $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Gevraagd: Bepaal $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; ${x_1}^2 + {x_2}^2$; ${x_1}^3 + {x_2}^3$ zonder de wortels van de vierkantsvergelijking op te lossen.

Oplossing: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$. ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{9}{4} - 5 = -2\frac{3}{4}$.

${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)({x_1}^2 - x_1 x_2 + {x_2}^2) = (x_1 + x_2)\{({x_1}^2 + 2x_1 x_2 + {x_2}^2) - 3x_1 x_2\} =$

$= (x_1 + x_2)^2\{(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\} = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 =$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 . \frac{5}{2} . \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - \frac{45}{4} = \frac{27-90}{8} = -\boldsymbol{\frac{63}{8}}$.

We hadden deze laatste vorm ook als volgt kunnen oplossen:

${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3{x_1}^2 x_2 - 3x_1 {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.

Dit is dus dezelfde vorm, die we in het vorige gevonden hebben.

Ter oefening maken de opgaven 468 t/m 472.
Oplossingen inzenden van de opgaven 473 t/m 477.

HILVERSUM

49,1. Overzicht van hetgeen geleerd is over de vierkantsvergelijking.

$ax^2 + bx + c = 0$, oplossing $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
$b^2 - 4ac =$ Discriminant D.
$D > 0$ twee ongelijke reële wortels.
$D = 0$ twee gelijke reële wortels.
$D < 0$ twee complexe wortels.
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.
Ontbinding in factoren door: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

We zullen dit onderwerp besluiten met een aantal uitgewerkte voorbeelden aangaande deze stof.

Opgave 1: Bepaal een vergelijking waarvan de wortels 2 meer zijn dan de wortels van de vergelijking $2x^2 - 4x + 5 = 0$ zonder de wortels van de vergelijking op te lossen.

Oplossing: Stel de nieuwe vergelijking $ay^2 + by + c = 0$, dan is:

$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$ en $y_1y_2 = \frac{c}{a}$, verder geldt dat $y_1 = x_1 + 2$ en $y_2 = x_2 + 2$, dus is:

$y_1 + y_2 = x_1 + 2 + x_2 + 2 = x_1 + x_2 + 4 = -\frac{-4}{2} + 4 = 6$ en

$y_1y_2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{5}{2} + 2(2) + 4 =$

$= \frac{5}{2} + 4 + 4 = 10\frac{1}{2}$, dus $-\frac{b}{a} = 6$ en $\frac{c}{a} = 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$. Schrijven we voor:

$-\frac{b}{a} = 6 = \frac{12}{2}$, dan blijkt uit: $-\frac{b}{a} = \frac{12}{2}$ en $\frac{c}{a} = \frac{21}{2}$, dat $a = 2$; $b = -12$ en $c = 21$.

De gevraagde vergelijking wordt dan: $\mathbf{2y^2 - 12y + 21 = 0.}$

Opgave 2: Stel, zonder de wortels van de vergelijking $3x^2 + 5x - 2 = 0$ op te lossen een andere vergelijking samen, waarvan de wortels driemaal zo groot zijn als die van de gegeven vergelijking.

Oplossing: Stel de gevraagde vergelijking $ay^2 + by + c = 0$. Hiervan is: $y_1 = 3x_1$ en $y_2 = 3x_2$.

Nu is: $y_1 + y_2 = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \,.\frac{-5}{3} = -5$.

$y_1y_2 = 3x_1.3x_2 = 9x_1x_2 = 9\,.\frac{-2}{3} = -6$. Hieruit volgt dat:

$y_1 + y_2 = \frac{-b}{a} = -5$ en $y_1y_2 = \frac{c}{a} = -6$.

Dus is: $a = 1$; $b = 5$ en $c = -6$. De vergelijking wordt dan: $\mathbf{y^2 + 5y - 6 = 0.}$

Opmerking: In deze twee opgaven hebben we er voor gezorgd dat de noemers van de breuken gevonden uit $y_1 + y_2$ en uit y_1y_2 gelijk worden. Immers beide noemers geven de waarde voor a.

Opgave 3: Bepaal de vergelijking, waarvan de wortels de som en het product zijn van de omgekeerden der wortels van de vergelijking $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Oplossing: Stel de nieuwe vergelijking $ay^2 + by + c = 0$, dan geldt:

$y_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *en* $y_2 = \frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}$. Nu is: $y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} = \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{4}{2}} = \frac{5}{4}$.

$y_1.y_2 = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).\frac{1}{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{4}{2}\right)^2} = \frac{3}{8}$. Dus is: $-\frac{b}{a} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ en $\frac{c}{a} = \frac{3}{8}$.

Hieruit volgt $a = 8$; $b = -10$ en $c = 3$, zodat de gevraagde vergelijking wordt: $\mathbf{8y^2 - 10y + 3 = 0.}$

Opgave 4: Bepaal de waarden van p, waarvoor de wortels van de vergelijking
$2a^2x^2 + (2abp - 2ab)x + p^2b^2 - b^2 = 0$ gelijk zijn.

Oplossing: Indien de wortels gelijk zijn, is de discriminant van de vierkantsvergelijking gelijk aan 0, dus: $(2abp - 2ab)^2 - 4.2a^2(p^2b^2 - 2pb^2 - b^2) = 0.$

$4a^2b^2(p-1) - 8a^2b^2(p^2 - 2p - 1) = 0.$ $\quad (p-1)^2 - 2(p^2 - 2p - 1) = 0.$

$(p-1)^2 - 2\{(p-1)^2 - 2\} = 0.$ of $(p-1)^2 - 2(p-1)^2 + 4 = 0.$

Dus: $-(p-1)^2 + 4 = 0.$ $\quad (p-1)^2 = 4,$ zodat $p - 1 = \pm 2$. Hieruit volgt:

$p - 1 = +2,$ dus: $\boldsymbol{p = 3}$ en $p - 1 = -2,$ dus: $\boldsymbol{p = -1.}$

Opgave 5: Voor welke waarden van p zijn de wortels van de vierkantsvergelijking
$x^2 + (p^2 - 4)x - (p+1)^2 = 0$ tegengestelde getallen?

Oplossing: De voorwaarde, dat de wortels tegengestelde getallen moeten zijn, wil zeggen, dat de wortels even groot, doch tegengesteld van teken zijn. Dan is: $x_1 + x_2 = 0$, waaruit volgt door:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, dat $\frac{-(p^2-4)}{1} = 0,$ dus: $p^2 - 4 = 0$ of $p = \pm 2.$

Voor $p = +2$ wordt de vergelijking $x^2 + (p^2 - 4)x - (p+1)^2 = 0$ gelijk aan:

$x^2 + (4-4)x - (2+1)^2 = 0,$ dus $x^2 - 9 = 0$ of $x = \pm 3,$ dus:

$x_1 = +3$ en $x_2 = -3$ gelijk en tegengesteld.

Voor $p = -2$ wordt de vergelijking $x^2 + (p^2 - 4)x - (p+1)^2 = 0$ gelijk aan :

$x^2 + (4-4)x - (-2+1)^2 = 0,$ dus $x^2 - 1 = 0$ of $x = \pm 1,$ dus:
$\boldsymbol{x_1 = +1}$ en $\boldsymbol{x_2 = -1}$ gelijk en tegengesteld.

Opgave 6: Onder een aantal personen moet 924 gulden gelijk verdeeld worden, waardoor ieder 20 gulden meer krijgt dan er personen zijn. Hoeveel personen zijn er en hoeveel krijgt ieder?

Oplossing: Stel er zijn x personen, dan krijgt ieder $x + 20$ gulden. Totaal is er dus $x(x+20)$ gulden, waaruit volgt $x(x+20) = 924$ of $x^2 + 20x - 924 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400+3696}}{2} = \frac{-20 \pm \sqrt{4096}}{2} = \frac{-20 \pm 64}{2}.$$

$$x_1 = \frac{-20+64}{2} = \frac{44}{2} = \mathbf{22}$$

$$x_2 = \frac{-20-64}{2} = \frac{-84}{2} = \mathbf{-42.}$$

De oplossing $x_2 = -42$ is wiskundig wel juist, doch kan hier in het vraagstuk niet voldoen, daar er dan een negatief aantal personen zouden zijn.

De enige oplossing die voldoet, is dus $x = 22$. Er zijn 22 personen die ieder een bedrag van 42 gulden ontvangen.

Ter oefening maken de opgaven 476 t/m 484.
Oplossingen inzenden van de opgaven 485 t/m 490.

Grafische voorstellingen

50,1. Coördinaten, assenstelsel.

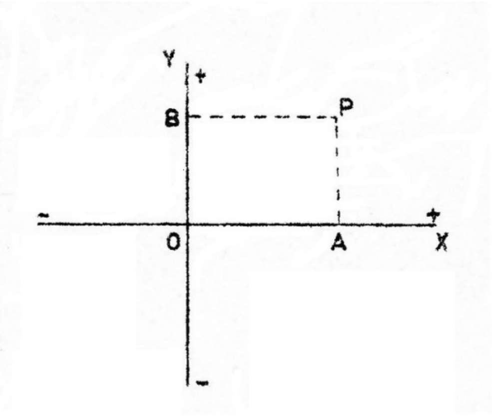

Fig. 50,1.

We denken ons twee vaste onderling loodrechte lijnen, de coördinaat-assen, die elkaar in O, de oorsprong, snijden. De horizontale as heet de X-as, de verticale as de Y-as. Op de assen is een bepaalde eenheid afgezet (zie ook Aa, les 42).

Een punt is bepaald door de afstand van dit punt tot de X-as en de afstand van dit punt tot de Y-as. In fig. 50,1 is het punt p bepaald door de lijnstukken $BP = OA$ en $AP = OB$. Deze lijnstukken heten de coördinaten van het punt p. De afstand OA noemen we de X-coordinaat van p of de abscis; de afstand OB heet de Y-coordinaat van p of de ordinaat.

Een punt in het platte vlak is dus bepaald door zijn abscis en ordinaat, of zoals we ook wel zeggen, door zijn x- en y-waarde. De coördinaten van een punt worden achter de letter, die het punt voorstelt, tussen haakjes vermeld. Is bv. de afstand $OA = a$ en de afstand $OB = b$, dan kunnen we schrijven $P(a, b)$. Een en ander hebben we in Aa, les 42 ter inleiding van de grafische voorstelling van een complex getal reeds behandeld. In fig. 42,2 zijn daar een aantal punten gegeven, terwijl achter die punten de coördinaten zijn vermeld.

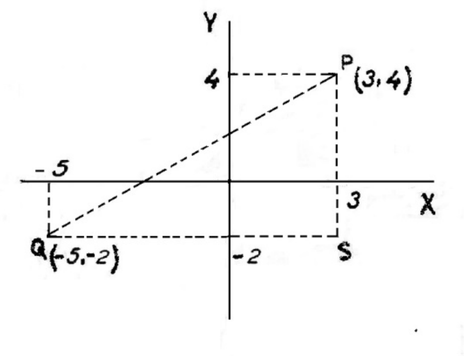

Fig. 50,2.

Willen we de afstand tussen twee punten berekenen, dan maken we hierbij gebruik van de stelling van Pythagoras. In fig. 50,2 zijn twee punten aangegeven nl. $P(3,5)$ en $Q(-5,-2)$.

Gevraagd wordt nu de lengte PQ uit te Rekenen.

We verbinden $P \; met \; Q$ en trekken de horizontale lijk vanuit Q door tot hij het verlengde van de verticale lijn vanuit P in S snijdt.

Uit de figuur 50,2 lezen we nu af, dat $QS = 5 + 3 = 8$ eenheden en $PS = 4 + 2 = 6$ eenheden, zodat $PQ = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ eenheden.

Daar we hier alleen met lengte-eenheden te maken hebben, tellen de tekens van de coördinaten dus niet meer mee. Willen we echter de lijn door de punten P en Q weten, dan vinden we iets heel anders.

Een rechte lijn of een kromme is een verzameling van punten, die alle aan de een of andere voorwaarde moeten voldoen. Zo'n verzameling van punten heet een meetkundige plaats.
In de meetkunde hebben we bv. de bissectrice van een hoek leren kennen als de meetkundige plaats van punten, die alle even ver van de benen van de hoek verwijderd zijn. We geven nu de volgende belangrijke regel:

Een eerstegraadsvergelijking stelt altijd een rechte lijn voor.

Dus geldt omgekeerd eveneens:

Een rechte lijn wordt voorgesteld door een eerstegraadsvergelijking.

Bij de grafische voorstelling maken we altijd gebruik van een assenkruis, waarbij we de assen de X- en de Y-as noemen. De vergelijkingen zullen dan ook altijd in x en y voorgesteld moeten worden. Men kan natuurlijk ook twee andere letters kiezen, maar de wiskunde gebruikt hiervoor altijd de letters x en y. De algemene vergelijking van een rechte lijn zal dus luiden:

$$ax + by + c = 0.$$

Hierin komen drie coëfficiënten voor, nl. $a, b,$ en c. In de meetkunde hebben we echter geleerd dat een rechte lijn is bepaald door twee punten, m.a.w. er zijn slechts twee gegevens nodig om een rechte lijn vast te leggen. De coëfficiënten a, b en c zouden het noodzakelijk maken om drie gegevens te hebben, willen we deze vinden. Dit is niet helemaal juist, daar we door één van die coëfficiënten kunnen delen, dus door a, we vinden dan:

$$x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0.$$

Stellen we nu $\frac{b}{a} = p$ en $\frac{c}{a} = Q$, dan vinden we $x + py + q = 0$, dus te bepalen uit twee gegevens.
In de wiskunde stellen we een rechte lijn meestal anders voor en wel als:

$$y = mx + n.$$

In de grafische voorstellingen noemen we x en y de veranderlijken en de getallen, die er in voorkomen (dus in de lijnvergelijking de waarden m en n) de constanten. Indien we nu x steeds een andere waarde geven, kunnen we door invullen van die waarde, de waarde van y berekenen.
We noemen x dan de onafhankelijke veranderlijke of onafhankelijke variabele en y de afhankelijke veranderlijke of afhankelijke variabele.

We hadden natuurlijk ook y diverse waarden kunnen geven en de bijbehorende waarden van x uit kunnen rekenen, dan is y de onafhankelijke variabele en x de afhankelijke variabele. Er zijn natuurlijk oneindig veel waarden voor x en y, die tegelijkertijd aan de vergelijking $y = mx + n$ voldoen, hetgeen overeenkomt met de definitie van de rechte lijn als meetkundige plaats.

Willen we nu de lijn door de punten $P(3, 4)$ en $Q(-5, -2)$ van fig. 50,2 opstellen, dan schrijven we de lijn als $y = mx + n$.
Daar het punt P op deze lijn moet liggen, moeten de coördinaten van dit punt er aan voldoen, zodat we hiervoor als voorwaarde vinden $4 = 3m + n$. Het punt Q moet eveneens op de lijn liggen, dus ook de coordinaten van Q moeten er aan voldoen, zodat we vinden $-2 = -5m + n$. We vinden dus twee vergelijkingen met twee onbekenden, die we kunnen oplossen als volgt:

$$\begin{array}{rl} 4 = & 3m + n \\ \underline{-2 =} & \underline{-5m + n \ \ -} \\ 6 = & 8m \qquad \text{dus: } m = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \end{array}$$

Ingevuld in $4 = 3m + n$ geeft : $4 = \frac{9}{4} + n, dus\ n = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$.
De lijn door de punten $P\ en\ Q$ wordt dan:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}.$$

Vermenigvuldigen we de vorm met 4 en brengen we alle termen naar links, dan vinden we:

$$4y - 3x - 7 = 0,$$

Dus de lijn geschreven in de vorm $ax + by + c = 0$.
We zullen ons echter altijd bedienen van de schrijfwijze voor de rechte lijn door:

$$y = mx + n.$$

Ter oefening maken de opgaven 488 t/m 492.
Oplossingen inzenden van de opgaven 439 t/m 497.

HILVERSUM

51,1. De rechte lijn.

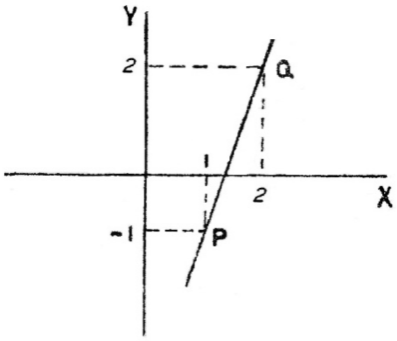

Fig. 51,1.

In de vorige les hebben we geleerd om de vergelijking van een rechte lijn op te stellen als er twee punten van de lijn gegeven waren.

We zullen nu gaan bekijken hoe we een rechte lijn gaan tekenen als de vergelijking van de rechte lijn gegeven is. Als wordt gevraagd de lijn $y = 3x - 4$ te tekenen, dan hebben we aan twee punten voldoende, daar een rechte lijn geheel bepaald is door twee punten.

We nemen bv. voor x de waarde 1, dan is $y = 3 - 4 = -1$. We tekenen in fig. 51,1 het punt $P(1, -1)$. Nemen we nu de waarde $x = 2$, dan is $y = 6 - 4 = 2$.

We tekenen het punt $Q(2, 2)$. Daarna trekken we de lijn door de punten P en Q en vinden aldus de gevraagde grafische voorstelling van de lijn voorgesteld door de vergelijking $y = 3x - 4$.

Om dus een lijn te tekenen kunnen we willekeurige waarden voor x (of voor y) aannemen en de bijbehorende van y (of van x) uitrekenen. Aangezien we zo vrij in onze keuze zijn, kiezen we twee "listige" waarden, nl: $x = 0$, dan is $y = -4$ en $y = 0$, dan is $x = \frac{4}{3}$. We vinden dan de snijpunten van de lijn met de coördinaatassen. Deze oplossingsmethode gaat dan veel en veel sneller. Moeten we dus een lijn tekenen, waarvan de vergelijking gegeven is, dan bepalen we altijd de snijpunten met de coördinaatassen door achtereenvolgens $x = 0$ en $y = 0$ te stellen.

Beschouwen we nogmaals de algemene vergelijking van de rechte lijn $y = mn + n$ en willen we deze tekenen, dan stellen we dus $x = 0$, waaruit volgt $y = n$. Hieruit blijkt:

<u>n is het stuk, dat de lijn afsnijdt van de y-as.</u>

Dit stuk n kan natuurlijk zowel positief als negatief zijn.

Beschouwen we nu een lijn, die door de oorsprong gaat, dan is $n = 0$. De vergelijking van de lijn wordt dan $y = mx$. We zien onmiddellijk dat deze lijn door 0 moet gaan, daar we voor $x = 0$ vinden $y = 0$, dus de coördinaten van $0(0, 0)$ voldoen er aan.

In fig. 51,2 is de lijn $y = mx$ getekend. Op de lijn $y = mx$ nemen we een punt P (stel met coördinaten a en b, dus $P(a, b)$. Daar we verondersteld hebben dat het punt P op de lijn ligt, moeten de coördinaten van het punt aan de lijnvergelijking voldoen, zodat geldt: $b = ma$ of $m = \frac{b}{a}$.

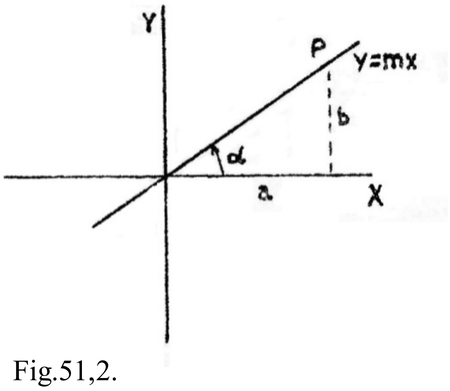

Fig.51,2.

Verder zien we uit de figuur dat $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ zodat: $m = \tan\alpha$.

Hieruit blijkt dat m als het ware de richting van de lijn aangeeft, vandaar dat m dan ook de <u>richtingscoëfficiënt</u> van de lijn wordt genoemd.

We willen echter de hoek α zuiver definiëren. Hiervoor maken we dezelfde afspraak als bij de goniometrie. De hoek α is de hoek, gevormd tussen de lijn en de positieve x-richting, waarbij we de richting nemen tegen de wijzers van de klok (juist als bij de goniometrie). Is bv. de hoek die de lijn maakt groter dan 90°, dan weten we uit de goniometrie dat $\tan\alpha$

negatief is , zodat dan de richtingscoëfficiënt negatief is.
In fig. 51,3 is de lijn $y = -\, mx$ getekend.

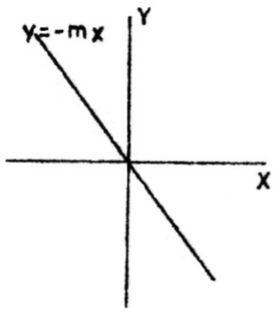

Fig. 51,3.

Een lijn evenwijdig met de X-as getekend, zal dus een hoek maken met de X-as die gelijk is aan 0° of 180°.

We weten dat $\tan 0° = 0$ en $\tan 180° = 0$, zodat bij een lijn evenwijdig aan de X-as geldt, dat $m = 0$.
De algemene vergelijking van een lijn evenwijdig aan de X-as is dus:

$$y = n.$$

Loopt een lijn evenwijdig aan de Y-as, dan is de hoek die deze lijn met de X-as maakt gelijk aan 90°. We weten nu dat $\tan 90° = \infty$ dus $m = \infty$. Zouden we dit in de lijnvergelijking invullen, dan vinden we $y = \infty$, hieruit kunnen we echter de plaats van deze rechte niet vinden.

We zullen hiervoor dan ook een andere methode volgen. In fig. 51,4 is een lijn getekend evenwijdig met de Y-as.

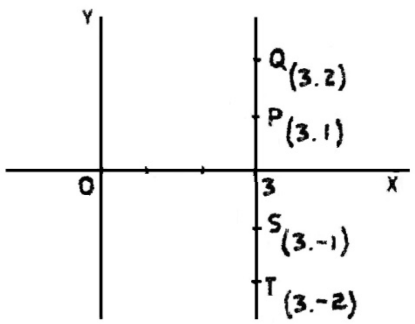

Fig. 51,4.

Op deze lijn is een aantal punten P, Q, S en T getekend.

Al deze punten hebben tot abscis de waarde 3. Voor alle geldt dus $x = 3$. De lijn door deze punten kunnen we zien als de meetkundige plaats van punten, die alle een abscis 3 hebben; de lijn wordt dan ook voorgesteld als $x = 3$.

Algemeen kunnen we dus een lijn evenwijdig aan de Y-as voorstellen als:

$$x = p.$$

Samengevat weten we dus nu:

Algemene voorstelling van een lijn: $y = mx + n$.
m is de richtingscoëfficiënt van de lijn en is gelijk aan $\tan \alpha$.
n is het stuk, dat de lijn afsnijdt van de Y-as.
Een lijn evenwijdig aan de X-as is $y = n$.
Een lijn evenwijdig aan de Y-as is $x = p$.

Ter oefening maken de opgaven 498 t/m 502.
Oplossingen inzenden van de opgaven 503 t/m 507.

52,1. Snijdende lijnen.

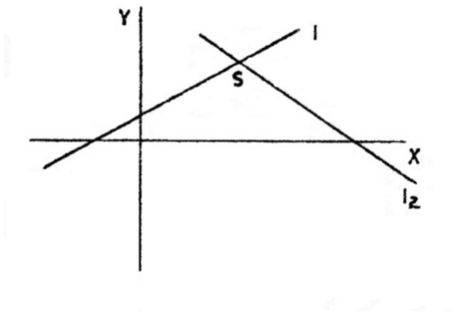

Fig. 52,1.

In fig. 52,1 zijn twee elkaar snijdende lijnen l_1 en l_2 getekend. We willen nu de coördinaten van het snijpunt S van deze twee lijnen berekenen. Zoals we gezien hebben, is een lijn een verzameling van punten, dat wil zeggen, indien we de lijn voorstellen door een vergelijking in x en y, bv. als $y = mx + n$, zijn er oneindig veel waarden voor x en y, die aan deze vergelijking voldoen. Er zijn dus oneindig veel waarden van x en y, die aan de vergelijking van de lijn l_1 voldoen en eveneens oneindig veel, die aan de vergelijking van de lijn l_2 voldoen.

Er is echter slechts een waarde voor x en y, die aan beide vergelijkingen tegelijkertijd voldoet nl. de x- en y-waarde van S, dus de coördinaten van het snijpunt.

Het oplossen van deze coördinaten betekent dus niets anders als het oplossen van x en y uit twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Veronderstellen we dat de lijn l_1 voorgesteld wordt door de vergelijking $y = 2x + 3$ en de lijn l_2 door de vergelijking $y = -3x + 8$, dan vinden we de coördinaten van S als volgt:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 3 \\ \underline{y} &\underline{= -3x + 8 \quad -} \\ 0 &= 5x - 5, \text{ dus: } x = 1. \end{aligned}$$

$x = 1$ ingevuld in de vergelijking $y = 2x + 3$ geeft $y = 5$. We kunnen dus zeggen dat de x-waarde van S gelijk is aan 1 en de y-waarde gelijk is aan 5 of $S(1,5)$.

Voorbeeld:

Teken de lijnen $2x - 3y = 5$ en $x - 4y + 3 = 0$ en bepaal de coördinaten van het snijpunt.

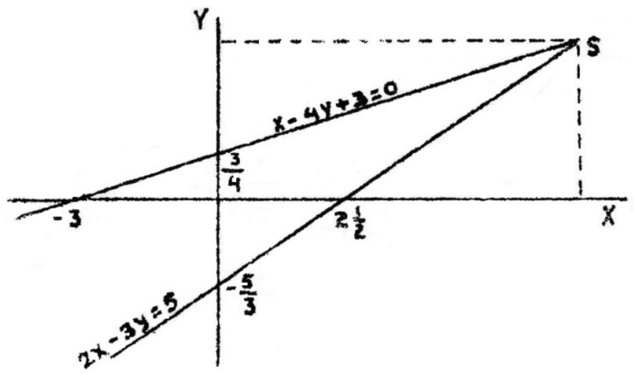

Fig. 52,2.

Oplossing:

We tekenen eerst de lijn $2x - 3y = 5$ (zie fig. 52,2) en stellen daartoe $x = 0$. Hierbij vinden we $y = -\frac{5}{3}$.
Daarna stellen we $y = 0$, waarbij behoort $x = 2\frac{1}{2}$.
De lijn is nu te tekenen daar we twee punten van de lijn $x - 4y + 3 = 0$ vinden we voor $y = 0$ de waarde $x = -3$ en voor $x = 0$: $y = \frac{3}{4}$.
De coördinaten van het snijpunt S vinden we door x en y op te lossen uit

$$\begin{array}{r|c|r|l} 2x - 3y = 5 & 1 & 2x - 3y = 5 & 5y = 11 \to \; y = \frac{11}{5} \\ x - 4y = -3 & 2 & 2x - 8y = -6 & \end{array}$$

$y = \frac{11}{5}$ in $x - 4y = -3$ ingevuld geeft: $x = -3 + \frac{44}{5} = 5\frac{4}{5}$ dus: $S\left(5\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{5}\right)$.

Wordt nu gevraagd de coördinaten van het snijpunt te vinden van 2 lijnen, gegeven door de vergelijking $2y - 3x = 7$ en $4y - 6x = 9$ en trachten we de vergelijking op te lossen, dan vinden we:

$$\begin{array}{r|c|r} 2y - 3x = 7 & 2 & 4y - 6x = 14 \\ 4y - 6x = 9 & 1 & \underline{4y - 6x = 9 \; -} \\ & & 0 = 5 \end{array}$$

Hieruit blijkt dat er geen waarden te vinden zijn voor x en y, die aan beide vergelijkingen tegelijkertijd voldoen. Beschouwen we beide vergelijkingen nog eens nader, dan is de vergelijking $2y - 3x = 7$ Te schrijven als $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{2}$ en de vergelijking $4y - 6x = 9$ als $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Uit beide vergelijkingen zien we dat de richtingscoëfficiënten gelijk zijn en wel $\frac{3}{2}$.

Het stuk dat de lijnen van de y-as afsnijden, is ongelijk. Hieruit volgt dat de beide lijnen evenwijdig lopen (zie fig. 52,2).

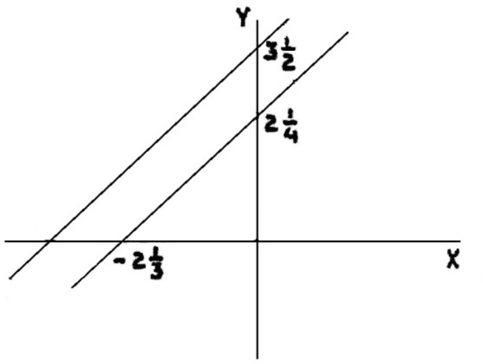

Fig. 52,3.

In Aa, les 22,2 hebben we deze vergelijkingen reeds leren kennen als strijdige vergelijkingen. We konden dus geen oplossing vinden die aan beide vergelijkingen tegelijkertijd voldeden. We zien nu dat dit inderdaad juist is, omdat deze evenwijdig lijnen voorstellen die en dus geen snijpunt bezitten. (Eigenlijk wel, nl. in het oneindige, dus voor $x = \infty$ en $y = \infty$, maar daar gaan we hier niet verder op in.) We zien dus, dat indien twee lijnen evenwijdig lopen, hun richtingscoëfficiënt gelijk is, terwijl het stuk, dat ze van de Y-as afsnijden ongelijk is. stellen we de lijnen voor door $y = m_{1x} + n_1$ en $y_2 = m_2x + n_2$, dan lopen de lijnen evenwijdig als:

$$m_1 = m_2 \quad \text{en} \quad n_1 \neq n_2.$$

Beschouwen we nu de vergelijkingen:

$y - 2x = 3\ en\ 2y - 4x = 6$ en lossen we deze op, dan vinden we:

$$\begin{array}{r|c|r} y - \ 2x = 3 & 2 & 2y - 4x = 6 \\ 2y - \ 4x = 6 & 1 & \underline{2y - 4x = 6 \; -} \\ & & 0 = 0. \end{array}$$

Hieruit volgt, dat er oneindig veel waarden voor $x\ en\ y$ te vinden zijn, die tegelijkertijd aan beide vergelijkingen voldoen. We zouden kunnen zeggen, er zijn oneindig veel snijpunten. Dit kan alleen maar voorkomen als de lijnen samenvallen. In Aa, les 22,2 hebben we dit stelsel vergelijkingen afhankelijk genoemd. Stellen we de lijnen weer voor als $y = m_1x + n_1$ en $y_2 = m_2x + n_2$ dan vallen de lijnen samen als $m_1 = m_2$ en $n_1 = n_2$.

<u>Samenvatting:</u> (l_1 en l_2 stellen lijnvergelijkingen voor)

l_1 snijdt l_2	als $m_1 \neq m_2$.
$l_1\ //\ l_2$	als $m_1 = m_2$ en $n_1 \neq n_2$.
l_1 valt samen met l_2	als $m_1 = m_2$ en $n_1 = n_2$.

<u>Opmerking:</u> We wijzen er uitdrukkelijk op, dat genoemde voorwaarden alleen opgaan, indien de vergelijkingen in de vorm $y = mx + n$ zijn gebracht, dus de coëfficiënt van y is gelijk gemaakt aan 1, terwijl y aan een kant van het = -teken is gebracht.

Ter oefening maken de opgaven 508 t/m 512.
Oplossingen inzenden van de opgaven 513 t/m 517.

HILVERSUM

53,1. De kwadratische functies.

De vorm $ax^2 + bx + c$ is afhankelijk van de waarde van x. Men zegt dan kortweg, dat de vorm afhankelijk is van x, of ook de vorm $ax^2 + bx + c$ is een functie van x.

Een functie, die in de veranderlijke x van de 1e graad is, heet een functie van de eerste graad of een eerstegraadsfunctie. Is de veranderlijke x van de tweede graad, dan heet de functie een tweedegraadsfunctie of kwadratische functie. Is x van de derde graad, dan een derdegraadsfunctie enz.

Daar de waarde van $ax^2 + bx + c$ voor iedere waarde van x, bij constante waarden van a, b en c een ander getal aangeeft, stelt men de functie meestal gelijk aan y, zodat:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Daar de waarde van y afhankelijk is van de waarde van x, noemt men y de afhankelijke veranderlijke of afhankelijke variabele en x de onafhankelijke veranderlijke of onafhankelijke variabele.

Nemen we als voorbeeld de functie $y = 2x^2 - 3x + 4$, dan kunnen we net zo veel waarden uitrekenen als we willen. Bij iedere waarde van x, die we aannemen, behoort een waarde van y, die we met die x-waarde dienen te berekenen, bv:

$x = -3$	dan is	$y = 18 + 9 + 4 = 31$
$x = -2$	dan is	$y = 8 + 6 + 4 = 18$
$x = -1$	dan is	$y = 2 + 3 + 4 = 9$
$x = 0$	dan is	$y = 0 - 0 + 4 = 4$
$x = +1$	dan is	$y = 2 - 3 + 4 = 3$
$x = +2$	dan is	$y = 8 - 6 + 4 = 6$
$x = +3$	dan is	$y = 18 - 9 + 4 = 13$

We kunnen natuurlijk oneindig veel waarden nemen voor x en de daarbij behorende y-waarden uitrekenen. We zien dat we steeds een stelsel waarden van x en y vinden. Het is dus mogelijk deze waarden in een grafiek weer te geven. Iedere functie, die gegeven is in de variabele x en y, kan grafisch worden voorgesteld, zoals we ook reeds in de vorige lessen hebben gezien.

We gaan nu eens enige kwadratische functies beschouwen en zien wat we uit de diverse voorstellingen kunnen concluderen. Nemen we als eerste voorbeeld de functie $y = x^2$.
De waarde voor y zal voor geen enkele reële waarde van x negatief worden. De kleinste waarde, die y kan bereiken is dus de waarde, die wordt gevonden voor $x = 0$. Voor iedere andere waarde van x is y positief. De functie $y = x^2$ heeft dus een kleinste of minimumwaarde 0, die wordt bereikt voor $x = 0$.

Beschouwen we nu de functie $y = x^2 + 5$.
Deze functie zal dus nooit kleiner worden dan 5, met andere woorden: de minimumwaarde is gelijk aan 5, dit minimum wordt gevonden voor $x = 0$. Zo heeft de functie $y = x^2 - 3$ een minimumwaarde -3, die wordt gevonden voor $x = 0$.

Algemeen: De functie $y = x^2 + c$ heeft een minimumwaarde, die gelijk is aan c, hetgeen wordt bereikt voor $x = 0$.

Voorbeeld 1: Bepaal de minimumwaarde van de functie $y = (x - 2)^2 + 3$ en voor welke waarde van x treedt dit minimum op.

Oplossing: de waarde van $(x - 2)^2$ is voor iedere waarde van x positief. Het minimum zal dus optreden als $(x - 2)^2$ gelijk is aan 0, dus het minimum treedt op als $\boldsymbol{x = 2}$.
De waarde van het minimum is dan gelijk aan **3.**

Voorbeeld 2: Idem, van de functie $y = (x+3)^2$.

Oplossing: Daar $(x+3)^2$ altijd positief is voor iedere waarde van x, zal het minimum optreden voor $\boldsymbol{x = -3}$. Het minimum is gelijk aan 0.

De functie $y = 3x^2$ heeft een minimumwaarde 0, die optreedt voor $x = 0$.
De functie $y = 3(x-1)^2$ heeft een minimumwaarde 0, die optreedt voor $x = 1$ enz.

We hebben nu steeds functies bekeken die een coëfficiënt voor x^2 hebben, die positief is. Beschouwen we nu de functies die een negatieve coëfficiënt voor de x^2 hebben, bv. de functies $y = -x^2$.

Deze functie is voor geen enkele reële waarde van x positief. De functie $y = -x^2$ is nul voor $x = 0$, voor iedere andere waarde van x is de functie negatief.

De functie bezit dus een grootste of maximumwaarde. Het maximum van de functie $y = -x^2$ is gelijk aan nul en treedt op voor $x = 0$.

De functie $y = -x^2 + 3$ is nooit groter dan 3, dus heeft een maximumwaarde 3, die optreedt voor $x = 0$.
De functie $y = -2x^2 - 7$ heeft een maximumwaarde -7, die optreedt voor $x = 0$.
De functie $y = -(x-3)^2$ heeft een maximumwaarde 0, die optreedt voor $x = 3$.
De functie $y = -(x+7)^2 + 3$ heeft een maximumwaarde 3, die optreedt voor $x = -7$.

De leerling dient deze voorbeelden zelf te controleren op de juistheid hiervan.

De maximum- en minimumwaarden worden tezamen wel uiterste waarden of extreme waarden genoemd.

Algemeen kunnen we zeggen:

De functie $y = a(x-m)^2 + n$ heeft een uiterste waarde, die bereikt wordt voor $x = m$. Als a groter is dan 0, dan is deze uiterste waarde een minimum. Is a kleiner dan 0, dan is deze uiterste waarde een maximum.

Voorbeeld: Bepaal de uiterste waarde en de waarde waarvoor deze uiterste waarde optreedt van de functie $y = 2x^2 + 4x + 5$.

Oplossing: We schrijven de functie in de vorm $y = a(x-m)^2 + n$. Daar $a = +2$, dus groter dan nul is, bezit de functie een minimum.

$$2x^2 + 4x + 5 = 2(x^2 + 2x) + 5 = 2[(x+1)^2 - 1] + 5 = 2(x+1)^2 - 2 + 5 = 2(x+1)^2 + 3.$$

De functie bezit een minimum, dat gelijk is aan $\mathbf{+3}$. Het minimum treedt op voor $\boldsymbol{x = -1}$.

Ter oefening maken de opgaven 518 t/m 523.
Oplossingen inzenden van de opgaven 524 t/m 528.

HILVERSUM

54,1. De kwadratische functies (vervolg).

Hetgeen we in les 53 met een voorbeeld hebben behandeld zullen we nu algemeen bekijken. Gegeven de functie $y = ax^2 + bx + c$.

We vinden nu: $y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c =$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

> De functie $y = ax^2 + bx + c$ heeft een uiterste waarde, die optreedt voor $x = \frac{b}{2a}$, de uiterste waarde is $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Als $a > 0$ is, is deze uiterste waarde een minimum, is $a < 0$, dan is deze uiterste waarde een maximum.

We merken op, dat de waarde van x waarvoor de uiterste waarde optreedt, nl. $x = -\frac{b}{2a}$ te schrijven is als $\frac{-\frac{b}{a}}{2}$. De waarde $-\frac{b}{a}$ stelt juist de som van de wortels van een vierkantsvergelijking voor, we hebben immers uit het hoofd moeten leren $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ zodat we kunnen onthouden, dat de uiterste waarde optreedt voor: $\boxed{x = \frac{x_1+x_2}{2}.}$ (We komen hier later nogmaals op terug.)

De uiterste waarde zelf is $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.
De waarde $b^2 - 4ac$ was de discriminant van de vierkantsvergelijking (zie ook Aa, les 48).
Dus de uiterste waarde van de functie is $-\frac{D}{4a}$.
Samenvattend vinden we:

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \rightarrow \text{minimum} \\ \\ a < 0 \rightarrow \text{maximum} \end{array}\right\} \text{treedt op voor } x = \frac{x_1+x_2}{2}$$
Grootte van de uiterste waarde is $-\frac{D}{4a}$.

Voorbeeld 1: Bepaal de uiterste waarde van de functie $y = -3x^2 + 2x - 5$.
Voor welke waarde van x treedt de uiterste waarde op?

Oplossing: $a = -3$, dus< 0, de functie bezit een maximum. Het maximum treedt op voor:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{-\frac{2}{-3}}{2} = \frac{1}{3}$. De grootte van het maximum is:

$-\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{4 - 60}{-12} = -\frac{-56}{-12} = -\frac{56}{12} = -\frac{14}{3}$.

Voorbeeld 2: Bepaal de uiterste waarde van de functie $y = 2x^2 - 5x + 7$.
Voor welke waarde van x treedt de uiterste waarde op?

Oplossing: $a = 2$, dus > 0, de functie bezit een minimum. Het minimum treedt op voor:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{4}$, terwijl de grootte hiervan is:

$-\frac{D}{4a} = -\frac{25 - 56}{8} = \frac{31}{8}$.

54,2. Nulwaarden van de kwadratische functies.

Beschouwen we nogmaals de functie $y = ax^2 + bx + c$, dan heeft deze functie voor y de waarde nul als $y = ax^2 + bx + c = 0$, dit is dus de vierkantsvergelijking die we behandeld hebben in les 46 van de algebra. Hieruit blijkt, dat de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ dus slechts een onderdeel is van de functie $y = ax^2 + bx + c$ en wel voor $y = 0$. De oplossing gaat verder normaal zoals we dit in les 46 hebben geleerd. We zullen deze les besluiten met enkele uitgewerkte voorbeelden.

Voorbeeld 1: Gegeven de functie $y = 3x^2 + 6x + p$. Hoe groot is p, opdat de functie positief is voor iedere waarde van x?

Oplossing: $y = 3x^2 + 6x + p = 3(x^2 + 2x) + p = 3[(x+1)^2 - 1] + p = 3(x+1)^2 - 3 + p$.

Daar $(x+1)^2$ altijd positief is voor iedere waarde van x, is het afhankelijk van de waarde van p of de functie positief of negatief is. Als $p = 3$, dan is de vorm $-3 + p = 0$, zodat dan voor iedere waarde van x de functie positief is. Echter indien p groter is dan 3, is de vorm $-3 + p$ groter dan 0, dus is de functie ook voor iedere waarde van x positief. Het antwoord luidt dus: de functie is positief als p groter of gelijk is aan 3.

Voorbeeld 2: De functie $y = ax^2 + (b - 2a)x + b^2 - a - 1$ heeft voor $x = 3$ de maximumwaarde 25. Bereken a en b.

Oplossing: De maximumwaarde van een functie vinden we uit de formule: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

In het voorbeeld wordt dit: $x = -\frac{b-2a}{2a}$. Gegeven is echter, dat dit maximum optreedt voor $x = 3$, dus is $x = -\frac{b-2a}{2a} = 3$ of $-b + 2a = 6a$, zodat $b = -4a$. De grootte van het maximum vinden we uit de formule $-\frac{D}{4a}$, zodat $25 = \frac{(b-2a)^2 - 4a(b^2 - a - 1)}{4a}$. We hadden reeds gevonden: $b = -4a$, hetgeen we invullen, dus: $25 = \frac{(-4a-2a)^2 - 4a(16a^2 - a - 1)}{4a} = -\frac{(-6a)^2 - 4a(6a^2 - a - 1)}{4a} =$ $= \frac{36a^2 - 4a(16a^2 - a - 1)}{4a}$. Delen we teller en noemer door $4a$, dan wordt dit: $25 = -[9a - (16a^2 - a - 1)] = -9a + 16a^2 - a - 1 = 16a^2 - 10a - 1$. Na herleiding op nul vinden we: $16a^2 - 10a - 26 = 0$ of $8a^2 - 5a - 13 = 0$. Hieruit volgt: $a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 416}}{16} =$ $\frac{5 \pm \sqrt{441}}{16} = \frac{5 \pm 21}{16}$, dus $a_1 = \frac{5+21}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$ en $a_2 = \frac{5-21}{16} = \frac{-16}{16} = 1$. Daar er gegeven is, dat de functie een maximum heeft, voldoet alleen de negatieve waarde van a, dus $a = -1$. Verder was: $b = -4a$, dus $b = 4$.

Voorbeeld 3: Bereken a, b en c uit $y = ax^2 + bx + c$ als gegeven is, dat $y = 0$ voor $x = 8$ en voor $x = 6$, terwijl de functie een uiterste waarde heeft die gelijk is aan -12.

Oplossing: Voor $x = 6$ en $y = 0$ vinden we $0 = 36a + 6b + c$. . . . .(1).

De uiterste waarde treedt op voor $x = 6$, dus $6 = \frac{-b}{2a}$ of $b = -12a$ . . . .(2).

De uiterste waarde bedraagt -12 zodat $-12 = \frac{-b^2 - 4ac}{4a}$ of $48a = b^2 - 4ac$. . . . .(3).

In de vergelijking (1) en (3) vullen we $b = -12a$ in, dus:

in (1): $36a - 72a + c = 0$ of $c = -36a$. . . . . (4).

in (3): $48a = 144a^2 - 4ac$ of $12 = 36a - c$. . . . . (5).

We delen aan beide kanten door a, doch a is ongelijk aan nul, daar de functie anders lineair zou zijn. Vullen we nu (4) in, in (5) dan is: $12 = 36a + 36a = 72a$, dus $a = \frac{1}{6}$.

Uit (2) volgt dan: $b = -12a = -2$. Uit (4) volgt: $c = -36a = -6$.

Ter oefening maken de opgaven 529 t/m 534.

Oplossingen inzenden van de opgaven 535 t/m 539.

55,1. Grafische voorstellingen van tweedegraadsfuncties.

De tweedegraadsfuncties of tweedegraadskrommen kunnen we beschouwen als de snijkrommen van een plat vlak, met een kegel. De krommen worden dan ook vaak kegelsneden genoemd. De tweedegraadskrommen zijn:
1. cirkel, 2. Ellips, 3. de hyperbool, 4. de parabool.

Deze krommen zijn alle tweedegraads in x of in y of zowel in x als in y.
We kunnen niet te ver op deze materie ingaan, aangezien dit niet in het bestek van deze cursus valt. Een uitgebreide behandeling van de tweedegraadskrommen behoort tot het vak van de analytische meetkunde. We zullen de krommen genoemd onder 1, 2 en 3 uiterst eenvoudig behandelen, terwijl we de kromme genoemd onder 4, dus de parabool, intensiever zullen beschouwen.

1. De cirkel.

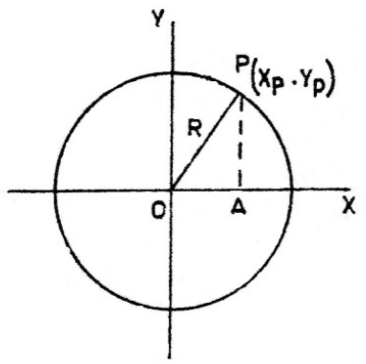

Fig. 55,1.

In de meetkunde hebben we de definitie van de cirkel geleerd. Deze luidde:
Een cirkel is de meetkundige plaats van punten, die alle even ver van een bepaald punt, het middelpunt verwijderd zijn.

Nemen we het middelpunt van een cirkel met straal R in de oorsprong van het assenkruis, dan geldt voor een willekeurig punt P van de cirkel, dat:
$x_p{}^2 + y_p{}^2 = R^2$.
Voor elk punt van de cirkel geldt dus algemeen:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Deze formule stelt nu de eenvoudigste vergelijking van een cirkel voor.

2. De ellips.

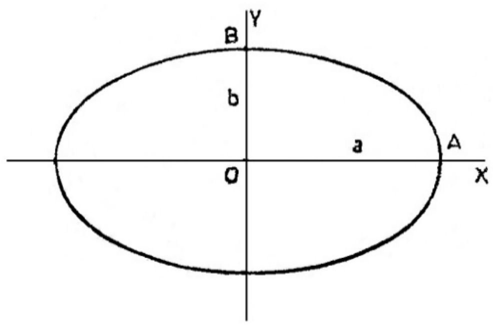

Fig. 55,2.

Voor de ellips geldt als eenvoudigste vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a en b zijn halve assen van de ellips, nl. $OA = a; OB = b$. Een afleiding hiervan zullen we niet geven.

3. De hyperbool.

Een vergelijking van de gedaante:

$$Y = \frac{P}{X} \text{ of } xy = p$$

stelt een bijzondere hyperbool voor, de gelijkzijdige hyperbool genaamd. Beschouwen we de gelijkzijdige hyperbool in de gedaante:
$y = \frac{p}{x}$, dan zien we dat we voor steeds groter wordende waarden voor x, steeds kleiner wordende waarden voor y vinden. De kromme nadert dus steeds dichter tot de X-as en zal deze in het oneindige gaan raken. De X-as is dus in het oneindige de raaklijn aan de kromme. Zo'n lijn, die in het oneindige aan een kromme raakt, heet een asymptoot van de kromme. Schrijft men de hyperbool in de vorm $x = \frac{p}{y}$, hetgeen ook mogelijk is, dan is de Y-as eveneens een asymptoot. De kromme bestaat dus uit 2 takken, in tegenstelling tot de cirkel, ellips en parabool.
De krommen: cirkel, ellips en parabool bestaan uit een onafgebroken doorlopende lijn, dit noemt men continu functies. De kromme, die de hyperbool voorstelt, is geen doorlopende lijn, dit is een discontinu functie.

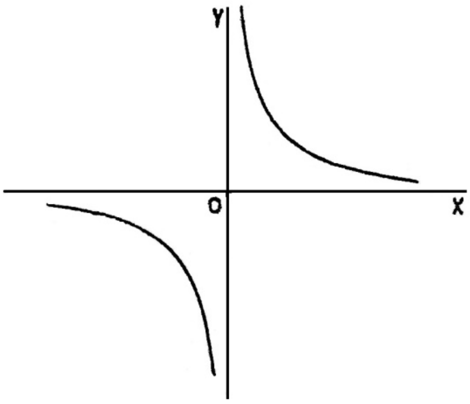

Fig. 55,3.

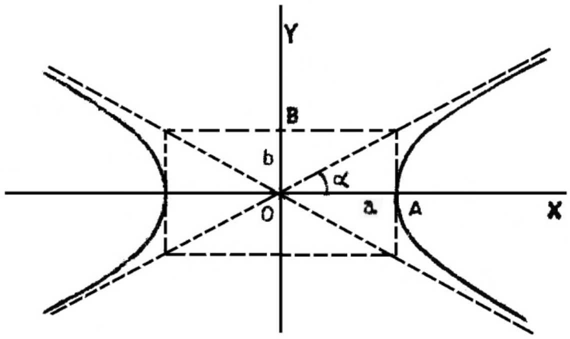

Fig.55,4.

Normaal heeft een hyperbool de X- en Y-as niet tot asymptoten. In fig. 55,4 is een normale hyperbool getekend. De vergelijking hiervan is $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hierin is $OA = a$ en $OB = b$. Uit de figuur blijkt dat de asymptoten van de hyperbool, die gestippeld getekend zijn door de oorsprong van het assenkruis gaan. De richtingscoëfficiënt van de asymptoten vinden we uit $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ of $\tan\alpha = -\frac{b}{a}$. De vergelijkingen der asymptoten zijn dus: $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$.

Bij het tekenen van een kromme kunnen we het eenvoudigste bij een gegeven vergelijking verschillende waarden van x aannemen en de daarbij behorende waarden van y uitrekenen. De punten zetten we dan uit bv. op millimeterpapier. Bij krommen die hoger zijn dan de tweede graad dienen we altijd zo te werk te gaan.

<u>Voorbeeld:</u> Teken de kromme $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

<u>Oplossing:</u> We nemen verschillende punten en verzamelen deze in een tabel. We wijzen erop dat de x-waarden zijn aangenomen en de y-waarden zijn uitgerekend (zie fig. 55,5).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-41	-20	-5	0	1	4	15	34	85

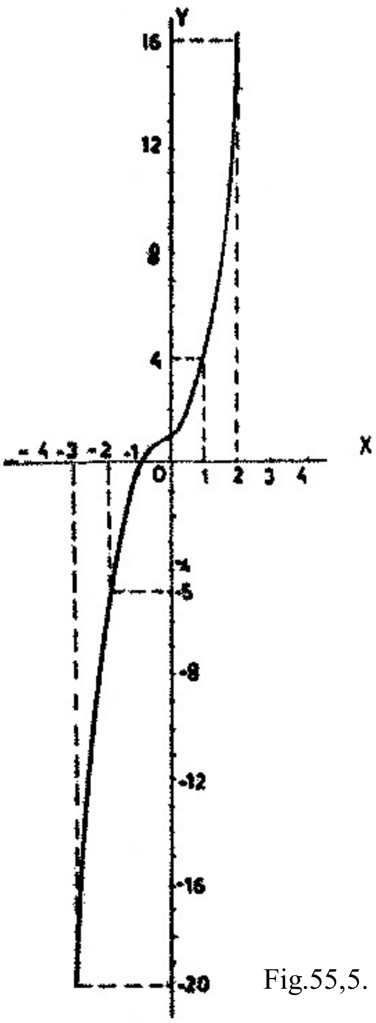

Fig.55,5.

In het algemeen zullen we dus voor het tekenen van krommen, de hierboven aangegeven methode gebruiken. Alleen bij de parabool, die we in de volgende les zullen behandelen gaan we anders te werk. Het is echter prettig de standaardvormen voor de cirkel, ellips en hyperbool, die in deze les gegeven zijn te herkennen.

Ter oefening maken de opgaven 540 t/m 543.
Oplossingen inzenden van de opgaven 544 t/m 550.

56,1. De parabool.

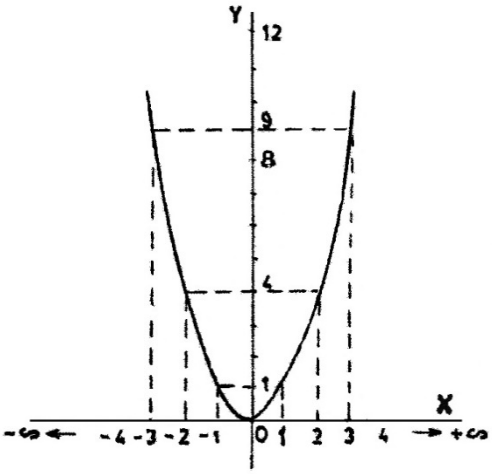

Fig. 56,1.

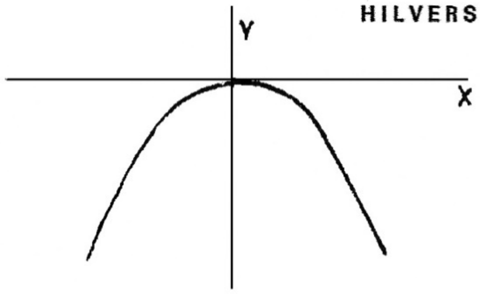

Fig. 56,2.

Indien bij een kromme in de variabelen x *en* y een van de variabelen voorkomt tot de eerste graad en de andere variabele tot de tweede graad, dan stelt de kromme een parabool voor. Beschouwen we allereerst de kromme $y = x^2$. Voor verschillende waarden van x vinden we:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+16$	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	$+16$	$+\infty$

Eigenlijk geldt voor $x = -\infty$ *en* $x = +\infty$, dat $y = \infty^2$. Hieruit volgt dat y sneller naar het oneindige gaat dan x (fig. 56,1). Uit de figuur blijkt dat de Y-as de symmetrie-as is van de parabool, d.w.z. indien we de parabool uitknippen en omvouwen om de Y-as, dan zal het deel van de parabool links van de Y-as samenvallen met het deel rechts van de Y-as. Een parabool bezit altijd één symmetrie-as. Een cirkel bezit oneindig veel symmetrie-assen, nl. iedere middellijn die we trekken.
Een ellips bevat twee symmetrie-assen (zie fig. 55,2), evenals de hyperbool (zie fig. 55,4).
De symmetrie-assen zijn in de getekende figuren de X-as en de Y-as. Een parabool wijkt dus van deze tweedegraadskrommen af, daar deze slechts één symmetrie-as bezit. Hieruit volgt dat we bij een Y-waarde twee x-waarden vinden, dit blijkt ook duidelijk als we de functie $y = x^2$ bekijken, immers twee x-waarden, die even groot zijn, doch tegengesteld teken bezitten, leveren eenzelfde y-waarde op. Uit fig. 56,1 kunnen we het minimum van de functie aflezen, het minimum is 0, en treedt op voor

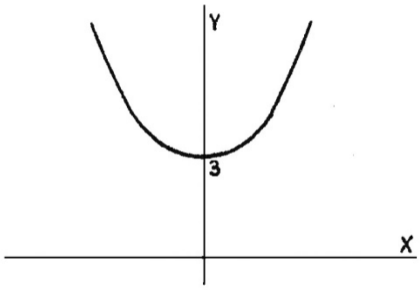

Fig. 56,3.

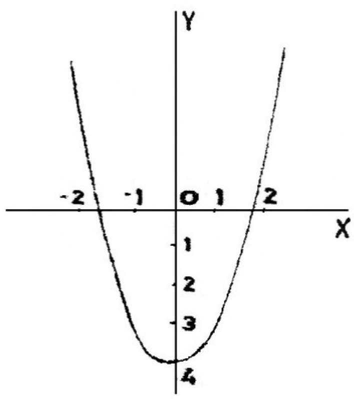

Fig. 56,4.

$x = 0$. Het punt 0 heet de <u>top</u> van de parabool. De top is altijd de minimum- of maximumwaarde van de parabool. Beschouwen we nu de functie $y = -x^2$ dan bezit deze functie een maximum (zie fig. 56,2). Deze parabool is dus t.o.v. de parabool $y = x^2$ gespiegeld t.o.v. de X-as.
De functie $y = x^2 + 3$ is weergegeven in fig. 56,3. De y-waarden zijn alle een stuk 3 groter dan de y-waarden van fig. 56,1. De functie bereikt haar minimum voor $x = 0$. De minimumwaarde is 3.

Beschouwen we de functie $y = x^2 - 4$, die getekend is in fig. 56,4, dan blijkt dat de parabool de X-as snijdt in twee punten. Voor deze punten geld dat $y = 0$, dus kunnen we de snijpunten van de parabool eenvoudig oplossen, deze zijn te vinden uit $x^2 - 4 = 0$, dus $x = \pm 2$. Verder zien we, dat voor $x - 0$, $y = -4$. Uit de 2 functies getekend in de figuren 56,3 en 56,4 blijkt, dat de parabool de X-as snijdt indien voor $y = 0$ de vergelijking in x oplosbaar is, dus 2 reële oplossingen heeft.

Beschouwen we nu als voorbeeld de functie $y = x^2 - 5x + 6$, dan gaan we als volgt te werk (zie fig. 56,5). We bepalen eerst de snijpunten met de assen, dus: voor $x = 0$ is $y = +6$ voor $y = 0$ is $x^2 - 5x + 6 = 0$ of $(x - 2)(x - 3) = 0$, zodat $x = 2$ en $x = 3$. Daar de parabool een symmetrische functie is, ligt de symmetrie-as juist tussen de punten 2 en 3 in, dus gaat door het punt 2½.
Om uit te rekenen waar de top van de parabool ligt, vullen we de waarde $x = 2½$ in, in de vergelijking $y = x^2 - 5x + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + 6 = -6\frac{1}{4} + 6 = -\frac{1}{4}$. Uit de figuur kunnen we nu aflezen: de parabool bezit een minimumwaarde. Deze minimumwaarde is $-\frac{1}{4}$ en treedt op voor $x = 2½$.

Bekijken we nu nog de parabool $y = x^2 + 3x - 2$ (fig. 56,6). We bepalen weer eerst de snijpunten met de assen. Voor $x = 0$ is $y = -2$. Voor $y = 0$ is $-x^2 + 3x - 2 = 0$ of $x^2 - 3x + 2 = 0$, dit kan ontbonden worden volgens $(x - 2)(x - 1) = 0$, zodat $x_1 = 1$ en $x_2 = 2$. De symmetrie-as ligt weer tussen $x = 1\ en\ x = 2$, deze ligt op $x = 1½$ (zie fig. 56,6 gestippeld getekend). Uit de negatieve coëfficiënt van x^2 blijkt, dat de parabool een maximum bezit. Dit maximum treedt dus op voor $x = 1½$. Vullen we deze waarde van x in, in de functie, dan vinden we de grootte van het maximum, dus: $y = -\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(1\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = -\frac{9}{4} + \frac{18}{4} - 2 = +\frac{9}{4} - 2 = +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

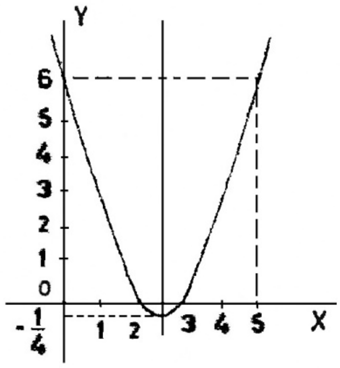

Fig. 56,5.

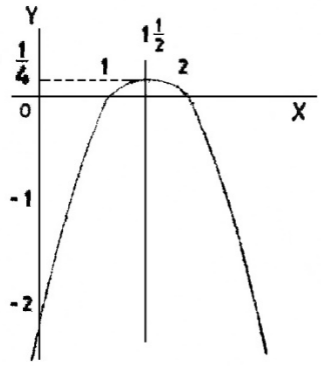

Fig. 56,6.

Ter oefening maken de opgaven 551 t/m 555.
Oplossingen inzenden van de opgaven 556 t/m 560.

57,1. De parabool (vervolg).

In deze les zullen we het reeds behandelde over de parabool algemeen bekijken. De algemene vergelijking is $y = ax^2 + bx + c$. We gaan het onderzoek in gedeelten uitvoeren:

1. Heeft de parabool een maximum of minimum, dus is: $a < 0$ of is $a > 0$?
2. Bepaal het snijpunt met de Y-as; substitueer $x = 0$, dan is $y = c$, dus het snijpunt met de Y-as is (0, c).
3. Bepaal de snijpunten met de X-as, substitueer $y = 0$, dan is $ax^2 + bx + c = 0$, waaruit: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $(x_1, 0)$ en $(x_2, 0)$ zijn dan de snijpunten van de parabool met de X-as.
4. Bepaal de symmetrie-as. deze vinden we uit: $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.
5. Bepaal de top, dus het maximum of minimum. Deze waarde vinden we het eenvoudigste door de waarde onder 4 gevonden is in te vullen in de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ of d.m.v. de formule $\frac{-D}{4a}$. De top wordt dus: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$.

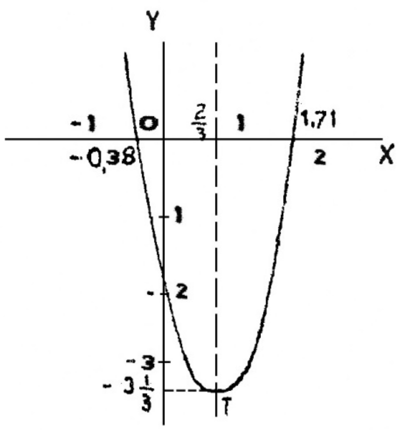

Fig. 57,1.

Indien we al deze punten in het assenkruis hebben getekend, kunnen we de parabool door deze punten tekenen. We zullen het bovenstaande aan de hand van een voorbeeld doornemen.
Teken de parabool $y = 3x^2 - 4x - 2$, (zie fig. 57,1).

1. De parabool heeft een minimum.
2. $x = 0 \rightarrow Y = -2$, dus het snijpunt met de Y-as $(0, -2)$.
3. $y = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x - 2 = 0$.

$x_{1,\ 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{6}$.

$x_{1,\ 2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$.

$x_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{3} \approx \frac{2 + 3{,}14}{3} = \frac{5{,}14}{3} \approx \mathbf{1{,}71}.$

$x_2 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \approx \frac{2 - 3{,}14}{3} = \frac{-1{,}14}{3} = \mathbf{-0{,}38}.$

4. De symmetrie-as is $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{6} = \frac{2}{3}$. Dus de snijpunten met de X-as zijn: **(1,71; 0) en (-0,38; 0).**
5. $y = 3x^2 - 4x - 2 = 3 \,.\, \frac{4}{9} - 4 \,.\, \frac{2}{3} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2 = -3\frac{1}{3}$. De coördinaten van de top zijn: $\left(\frac{2}{3}, \mathbf{-3\frac{1}{3}}\right)$.

Wanneer we het onder punt 3 genoemde nog eens nader bekijken, dan zien we, dat de vierkantsvergelijking, die we geleerd hebben als $ax^2 + bx + c = 0$, dus slechts een voorstelling is van de snijpunten van de X-as met de parabool.

Indien de discriminant groter dan nul is, vonden we twee reële wortels, dat wil dus zeggen, dat de parabool de X-as snijdt; is de discriminant gelijk aan nul, dan vonden we slechts één wortel, dat wil zeggen de parabool raakt aan de X-as; is de discriminant kleiner dan nul, dan vonden we geen reële wortels, d.w.z. de parabool snijdt de X-as niet. De top ligt dan bij een parabool met een minimumwaarde boven de X-as en bij een parabool met een maximumwaarde onder de X-as.
De verschillende gevallen zijn in fig. 57,2 getekend.

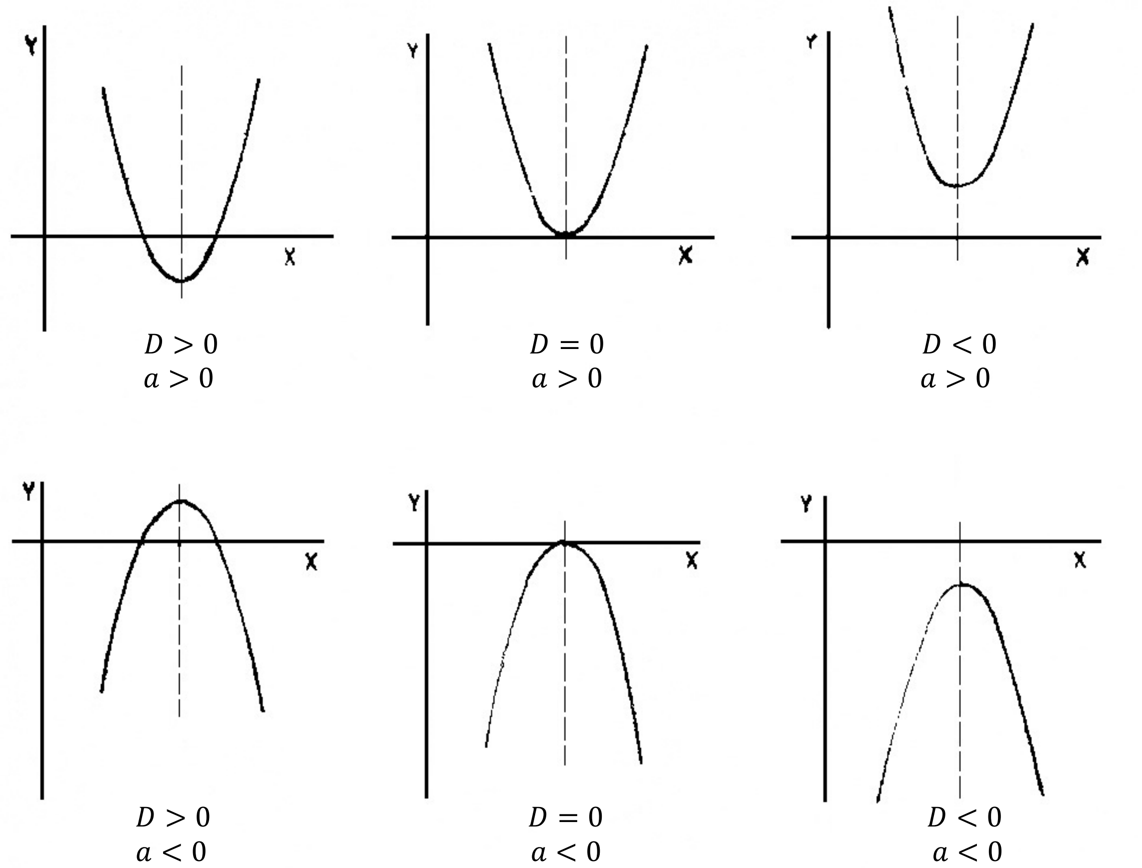

Fig. 57,2.

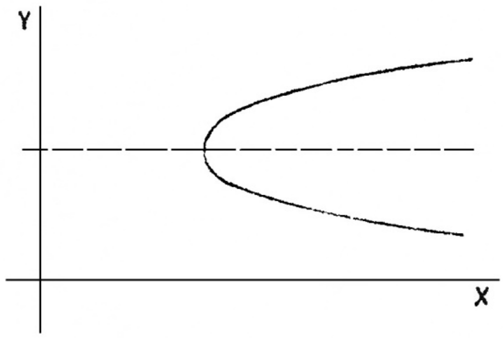

Fig. 57,3.

Hiermede is de betekenis van de discriminant veel duidelijker tot uiting gekomen.

Wij hebben in het begin van les 56 de parabool gedefinieerd als volgt: een de variabelen komt slechts tot de eerste graad voor en de andere variabele tot de tweede graad. Het is dus ook mogelijk de parabool voor te stellen als $x = ay^2 + by + c$. Het verschil tussen deze parabool en de reeds behandelde parabool is, dat de symmetrie-as nu evenwijdig loopt met de X-as in plaats van met de Y-as, zie fig. 57,3. Het tekenen van deze parabool gaat volgens dezelfde regels als we in deze les hebben geleerd, indien we x vervangen door y en y vervangen door x. De figuur is over 90° gedraaid.

<u>Opmerking:</u> Indien de symmetrie-as niet evenwijdig loopt met een van de coördinaatassen, dan is de vergelijking van de parabool totaal anders. We zullen hier echter niet verder op ingaan, alleen wijzen we er dus uitdrukkelijk op dat het behandelde alleen geldt voor parabolen, waarvan de symmetrie-as evenwijdig loopt met een der coördinaatassen.

Ter oefening maken de opgaven 561 t/m 564.
Oplossingen inleveren van de opgaven 565 t/m 570.

58,1. Logaritmen

Beschouwen we de gelijkheid $a^b = c$, dan kunnen we als a en b gegeven zijn, c oplossen. Deze bewerking kennen we reeds onder de naam machtsverheffen. Zijn b en c gegeven, dan kunnen we a oplossen. Deze bewerkingen hebben we leren kennen als worteltrekken.

Zijn nu echter a en c gegeven en moeten we b bepalen, dan dienen we hiervoor een nieuwe bewerking te leren. Deze heet logaritmen nemen.

Voor deze bewerkingsmethode bedienen we ons van de volgende definitie:

Onder de logaritme van een getal verstaat men de exponent van de macht, waartoe men een ander getal moet verheffen om het oorspronkelijke getal te verkrijgen.

We zullen deze definitie, die men goed uit het hoofd moet leren, verduidelijken met enige voorbeelden.

Beschouwen we de macht $10^2 = 100$, dan kunnen we dit m.b.v. de logaritmen schrijven als:

$$\log_{10} 100 = 2$$ *[7]

Het getal 10, dat rechts onder het woord log staat, dat als afkorting van logaritme geschreven wordt, noemen we het grondtal van de logaritme. Lezen we nu nogmaals de definitie, dan vinden we:

Onder de logaritme van een getal (in het voorbeeld het getal 100) verstaat men de exponent van de macht (het getal 2), waartoe men een getal (het grondtal, dus het getal 10 in het voorbeeld) moet verheffen om het oorspronkelijke getal (het getal 100) weer te verkrijgen.

Zo is dus $\log_{10} 1000 = 3$ omdat $10^3 = 1000$ is en $\log_5 625 = 4$ omdat $5^4 = 625$ is.

Nemen we nu algemeen aan dat $a^b = c$, dan is dit volgens de definitie van de logaritmen te schrijven als: $\log_a c = b$.

Uit $a^b = c$ en $\log_a c = b$ kunnen we, indien we $b = \log_a c$ in de exponent van $a^b = c$ invullen, schrijven:

$$a^{\log_a c} = c.$$

Indien dus het grondtal van de logaritme in de exponent van de macht hetzelfde is als het grondtal van de macht, dan is de uitkomst direct op te schrijven.

$8^{\log_8 3} = 3;\quad 7^{\log_7 2} = 2;\quad 10^{\log_{10} 5} = 5$ enz.

Beschouwen we nogmaals het voorbeeld $\log_5 625$: dit is te schrijven als $\log_5 5^4 = 4$.
We proberen dus steeds de exponent van het getal onder de logaritme te vinden van het grondtal, dat hetzelfde is als het grondtal van de logaritme.

[7] Het grondtal van de logaritme wordt in Nederlandse boeken links boven de log geplaatst. Echter internationaal wordt het grondtal voor de logaritme tegenwoordig rechts onder de log geplaatst, wat ook een beter gevoel geeft omdat het een "grondtal" is. Misschien even wennen dus: $\mathbf{{}^{10}\log 100 = 2}$ betekent hetzelfde als $\mathbf{\log_{10} 100 = 2}$. Hierin is 10 het grondtal van de logaritme . (Bron: wisnet.nl)
Om redenen van de tekstverwerker zal hier de hedendaagse internationale schrijfwijze worden toegepast. (FV)

$\log_8 4 = \log_8 2^2$; nu is $2 = \sqrt[3]{8}$ of $2 = 8^{\frac{1}{3}}$, zodat:

$\log_8 2^2 = \log_8 \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$.

$\log_{27} 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; $\log_9 \frac{1}{3} = \log_9 3^{-1} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}$.

$\log_{64} 8 = \log_{64} (64)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; $\log_9 \sqrt{3} = \log_9 3^{\frac{1}{2}} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

De getallen, waarvan we nu de logaritmen voor een gegeven grondtal hebben getrokken moeten bij deze methode altijd te schrijven zijn als een macht van het grondtal. Lukt dit niet, dan kunnen we de logaritme niet trekken uit dat getal. Wel is het natuurlijk mogelijk om met benadering de uitkomst aan te geven.

De logaritmen uit alle getallen bij grondtal 10 zijn verzameld in zogenaamde logaritmentafels. Deze tafels zijn uitgevoerd in een bepaald aantal decimalen, meestal vier of vijf.
Er bestaan logaritmentafels die nog verder gaan. Wij zullen ons echter beperken tot de vijfdecimalige tafels en zullen gebruik maken van "Noordhoff's Schaaltafel" in vijf decimalen*[8].

Zoals we reeds gezegd hebben, zijn de logaritmentafels steeds gebaseerd op het grondtal 10. Willen we nu bij ieder willekeurig grondtal de logaritmen van een getal bepalen, dan zouden we dus oneindig veel tafels nodig hebben. Dit is praktisch niet uitvoerbaar.

In een der volgende lessen zullen we dan ook een formule leren om de logaritmen met een bepaald grondtal om te werken tot logaritmen met ieder gewenst grondtal, dus ook tot logaritmen met grondtal 10. Wij maken er nog op attent, dat men niet verplicht is bovengenoemde tafel aan te schaffen. Indien men reeds een logaritmentafel bezit, kan men deze zonder meer gebruiken.
Het verdient dan echter aanbeveling om bij correcties aan te geven welke tafel gebruikt is en hoeveel decimalen deze tafel heeft.

Wij zullen met de voorbeelden en met de opgaven met antwoorden steeds gebruik maken van bovengenoemde tafel.

Ter oefening maken de opgaven 571 t/m 575.
Oplossingen inzenden van de opgaven 576 t/m 580.

[8] Een logaritmetafel (voor 1995 logaritmentafel, nog eerder logarithmentafel) is een tabel met "standaardlogaritmen", een geschikt gekozen set waarden van logaritmen, waarmee veel voorkomende berekeningen gedaan kunnen worden. Een logaritmetafel was tot circa 1980 een veelgebruikt hulpmiddel bij berekeningen, voordat er hulpmiddelen zoals rekenmachines en later spreadsheets ter beschikking kwamen. (bron: Wikipedia) F.V.

HILVERSUM

58,1. Eigenschappen van de logaritmen.

Eigenschap I: De logaritme van een product is gelijk aan de som van de logaritmen van de factoren.

$$\log_g ab = \log_g a + \log_g b\,.$$

Bewijs: Passen we op bovenstaande regel de definitie van de logaritmen toe, dan is:

$$g^{\log_g a + \log_g b} = ab.$$

We beschouwen dus $\log_g a + \log_g b$ als een antwoord.
Voor $g^{\log_g a + \log_g b}$ kunnen we schrijven: $g^{\log_g a} \,.\, g^{\log_g b}$. Nu is $g^{\log_g a} = a$ en $g^{\log_g b} = b$ (zie definitie vorige les).

Hiermee vinden we dus, dat: $g^{\log_g a + \log_g b} = g^{\log_g a} \,.\, g^{\log_g b} = ab$, hetgeen te bewijzen was.

Opmerking: Voor het grondtal hebben we in deze eigenschap de letter g gebruikt. We zullen dit bij de eigenschappen altijd doen. De regels gelden dus voor ieder grondtal.

De eigenschap I geldt ook voor een gedurig product, bv:

$\log_g a.b.c.d = \log_g a + \log_g b + \log_g c + \log_g d.$

Het bewijs gaat op dezelfde manier als hierboven aangegeven.

Eigenschap II: De logaritme van een quotiënt is gelijk aan het verschil van de logaritmen van deeltal en deler.

$$\log_g \frac{a}{b} = \log_g a - \log_g b.$$

Bewijs: Passen we op bovenstaande regel de definitie van de logaritmen toe, dan is:

$$g^{\log_g a - \log_g b} = \frac{a}{b}.$$

Voor $g^{\log_g a - \log_g b}$ kunnen we schrijven: $\frac{g^{\log_g a}}{g^{\log_g b}}$ volgens de regel:

Indien twee machten met hetzelfde grondtal op elkaar gedeeld moeten worden vinden we als uitkomst een nieuwe macht met hetzelfde grondtal en met als exponent het verschil der oorspronkelijke exponenten.
Nu is verder: $g^{\log_g a} = a$ en $g^{\log_g b} = b$ waarmee het gestelde bewezen is.

Voorbeeld 1: Bereken x uit de volgende gelijkheid:

$$\log x = \log 16 + \log 4 - \log 8.$$

Oplossing: Volgens eigenschap I en II kunnen we voor het rechterlid van de gelijkheid schrijven:

$\log x = \log \frac{16 \times 4}{8} = \log 8$. Als $\log x = \log 8$ moet dus $x = 8$ zijn.

Voorbeeld 2: Vereenvoudig de volgende vorm (grondtal 10):

$$\log 60 - \log 24 + \log 4 - \frac{5 \log 5}{\log 0{,}01} \times \frac{10^{\log 4}}{\log 25}\,.$$

Oplossing: Voor de eerste drie termen kunnen we schrijven:

$\log 60 - \log 24 + \log 4 = \log \frac{60 \times 4}{24} = \log \frac{240}{24} = \log 10 = 1.$

Werken we de vorm nu verder uit, dan vinden we:

$-\frac{5 \log 5}{\log 10^{-2}} \times \frac{10^{\log_{10} 4}}{\log 25} = 1 - \frac{5 \log 5}{-2} \times \frac{4}{\log 5 \times 5} = 1 - \frac{5 \log 5}{-2} \times \frac{4}{\log 5 + \log 5} =$

$= 1 - \frac{5 \log 5}{-2} \times \frac{4}{2 \log 5} = 1 + \frac{5 \times 4}{2 \times 2} = 1 + 5 = 6.$

Eigenschap III: De logaritme van een macht is gelijk aan de machtsexponent vermenigvuldigd met de logaritme van het grondtal van de macht.

$$\log_g a^n = n \log_g a.$$

Bewijs: $\log_g a^n = \log_g \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \ldots \times a}_{n \text{ factoren}}$

$$\underbrace{\log_g a + \log_g a + \log_g a + \ldots \ldots + \log_g a}_{n \text{ termen}} = n \log_g a.$$

Eigenschap IV: De logaritme van een wortel is gelijk aan de logaritme van het getal onder het wortelteken gedeeld door de wortelexponent.

$$\log_g \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_g a.$$

Bewijs: Deze eigenschap is geheel gelijk aan de voorgaande eigenschap, eigenschap III, immers:

$$\log_g \sqrt[n]{a} = \log_g a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_g a.$$

We zullen deze les nu nog met enige samengestelde voorbeelden besluiten.

Voorbeeld 3: Vereenvoudig de volgende vorm:

$$\log 4 - \frac{\log 7}{\log 10^{-3}} \times \frac{10^{\log 3}}{2 \log \sqrt{7}} + 2 \log 7 - 3 \log 2 + \log 40 - \log 98.$$

Opmerking: Bij deze opgave is het grondtal weggelaten; dit is de gewoonte als men het grondtal 10 kiest.

Oplossing: $\log 4 + 2 \log 7 - 3 \log 2 + \log 40 - \log 98 = \log 4 + \log 49 - \log 8 + \log 40 - \log 98 =$

$= \log \frac{4 \times 49 \times 40}{8 \times 98} = \log 10 = 1.$ $\qquad \frac{\log 7}{\log 10^{-3}} \times \frac{10^{\log 3}}{2 \log \sqrt{7}} = \frac{\log 7}{-3} \times \frac{3}{\log 7} = -1.$

Voor deze vorm stond nog een negatief teken, zodat we vinden: $1 - (-1) = \mathbf{2}$.

Voorbeeld 4: Los x op uit de volgende vergelijking:

$$\log x = 2 \log 7 - 3 \log 5 + \log 25 - \log 14.$$

Oplossing: $\log x = \log \frac{7^2 \times 25}{5^3 \times 14} = \log \frac{7^2 \times 5^2}{5^3 \times 2 \times 7} = \log \frac{7}{10}$. Dus $x = \mathbf{\frac{7}{10}}$.

Opmerking: Uit de voorbeelden blijkt duidelijk, dat we de vormen onder de logaritmen zo compact mogelijk trachten te schrijven. Het grondtal wordt meestal weggelaten, indien niet anders vermeld is, beschouwen we de vormen voor het grondtal 10.

Ter oefening maken de opgaven 581 t/m 585.
Oplossingen inzenden van de opgaven 586 t/m 590.

60,1. Eigenschappen van de logaritmen (vervolg).

Eigenschap V: De logaritme van een getal bij een bepaald grondtal is gelijk aan de logaritme van dat getal met ieder willekeurig grondtal gedeeld door de logaritme van het oorspronkelijk grondtal met hetzelfde willekeurige grondtal:

$$\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a}.$$

Voor het nieuwe grondtal hebben we de letter x aangegeven, waarmee wordt aangegeven dat ieder grondtal juist is.

Bewijs: Stel $\log_a b = p$. Passen we hierop de definitie toe, dan is $a^p = b$.

Nemen we nu aan beide kanten van deze laatste gelijkheid de logaritme, dan is $\log a^p = \log b$. Uit deze laatste blijkt duidelijk, dat we vrij zijn in de keuze van ons grondtal. Meestal zullen we het grondtal 10 of de letter g nemen.

We kunnen nu voor $\log a^p$ schrijven $p \log a$ zodat:

$$p \log a = \log b \;\text{ of }\; p = \frac{\log b}{\log a}.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Deze regel heet de regel van het veranderen van grondtal.

Voorbeeld 1: Los x op uit de volgende vorm:

$$\log_3 5 \times \log_7 2 \times \log_2 3 \times \log_5 7.$$

Oplossing: We kunnen de vorm schrijven met behulp van eigenschap V:

$$\frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 2}{\log 7} \times \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 7}{\log 5} = 1.$$

Voorbeeld 2: Los x op uit de volgende vorm:

$$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} 5} \times \log_5 \frac{x}{125} + 5^{\log_5 14 - \log_5 7} = 0.$$

Oplossing: $\frac{\log_{10} x}{\log_{10} 5} \times (\log_5 x - \log_5 125) + 5^{\log_5 \frac{14}{7}} = 0.$

$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} 5}$ is ook te schrijven als $\log_5 x$ (zie eigenschap V), zodat we vinden $\log_{10} 5$.

$\log_5 x \times (\log_5 x - \log_5 5^3) + 5^{\log_5 2} = 0.$

$\log_5 x \times \left(\log_5 x - 3^{\log_5 5}\right) + 2 = 0$ of $\log_5 x(\log_5 x - 3) + 2 = 0$, dus:

$(\log_5 x)^2 - 3^{\log_5 x} + 2 = 0.$

Stel $\log_5 x = y$, dan vinden we $y^2 - 3y + 2 = 0$. Dit is te ontbinden in $(y-2)(y-1) = 0$, dus: $y = 1$ of $y = 2$.

$\log_5 x = 1$, hieruit volgt $x = 5$.

We vinden voor $y = 2$:

$\log_5 x = 2$, dus $x = 25$.

We maken erop attent, dat men voor het examen niet alleen de 5 omblokte eigenschappen uit het hoofd moet leren, doch tevens de bewijzen hiervan. Vooral op het mondelinge gedeelte van het examen bestaat de mogelijkheid dat een van deze bewijzen gevraagd wordt.

We zullen deze les verder besteden met het uitwerken van een aantal vraagstukken. Indien de cursist voldoende routine heeft gekregen is het mogelijk de opgaven zo kort mogelijk te maken. Een van de voornaamste aspecten is om de eigenschappen I en II zoveel mogelijk van rechts naar links te gebruiken. We zullen dit met een voorbeeld aantonen.

Voorbeeld 3: Bereken: $\log\frac{75}{49}+\log\frac{81}{125}+\log\frac{343}{243}+\log\frac{50}{7}$, (bij grondtal 10).

Oplossing: $\log 75-\log 49+\log 81-\log 125+\log 343-\log 243+\log 50-\log 7=$

$=\log 5^2.3-\log 7^2+\log 3^4-\log 5^3+\log 7^3-\log 3^5+\log 5^2.2-\log 7=$

$=2\log 5+\log 3-2\log 7+4\log 3-3\log 5+3\log 7-5\log 3+2\log 5+\log 2-\log 7=$

$=\log 5+\log 2=\log 10=1$.

Nemen we nu hetzelfde voorbeeld als volgt:

$\log\frac{75}{49}+\log\frac{81}{125}+\log\frac{343}{243}+\log\frac{50}{7}=\log\frac{75}{49}\times\frac{81}{125}\times\frac{343}{243}\times\frac{50}{7}=\log 10=1$.

Uit dit voorbeeld blijkt overduidelijk het voordeel van de laatste methode.

Voorbeeld 4: Los $x\ en\ y$ opuit het stelsel vergelijkingen $x+y=5$.

$(\log_5 x+\log_5 y-\log_5 3)\,.\log_2 5=1$.

Oplossing: $\log_5 x+\log_5 y-\log_5 3=\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{\frac{\log_5 5}{\log_5 2}}=\frac{\log_5 2}{\log_5 5}=\log_5 2$,

dan is: $\log_5 x+\log_5 y=\log_5 2+\log_5 3=\log_5 6$.

Verder is: $\log_5 x+\log_5 y=\log_5 xy$, zodat: $\log_5 xy=\log_5 6$ of $xy=6$.

We hebben dus nu het stelsel vergelijkingen teruggebracht tot:

$x+y=5$
$xy=6$.

Uit $x+y=5$ volgt $y=5-x$. Dit ingevuld in $xy=6$ geeft:

$x(5-x)=6$ of $5x-x^2=6$, dus: $x^2-5x+6=0$.

Na ontbinding in factoren is dit: $(x-2)(x-3)=0$. Dus: $x=2$ en $x=3$.

Bij $x=2$ geldt $y=3$, bij $x=3$ geldt $y=2$.

$x=2$ of $x=3$
$y=3$ of $y=2$.

Voorbeeld 5: Bereken x uit: $9^{\log_9 2}\times(\log_7 49)^2(\log 3x-3\log x)=8\log 48$.

Oplossing:

$2\times(\log_7 7^2)^2(\log 3x-\log x^3)=8\log 48$

$2\times 2^2\log\frac{3x}{x^3}=8\log 48$

$8\log\frac{3}{x^2}=8\log 48$

$\frac{3}{x^2}=48$. $x^2=\frac{1}{16}$. $x_1=\frac{1}{4}\ en\ x_2=-\frac{1}{4}$.

De tweede wortel $\left(x_2=-\frac{1}{4}\right)$ vervalt omdat de logaritme uit een negatief getal niet mogelijk is.

Ter oefening maken de opgaven 591 t/m 595.

Oplossingen inzenden van de opgaven 596 t/m 600.

61,1. Logaritmenstelsels.

Er zijn twee logaritmenstelsels in gebruik, namelijk het Neperse logaritmenstelsel of ook wel natuurlijke logaritmen genoemd en het Briggse logaritmenstelsel.

Het Neperse logaritmenstelsel is genoemd naar de ontdekker van de logaritmen Neper.
Dit stelsel is gebaseerd op het onmeetbare getal ε, dat we ook reeds in de wisselstroomtheorie bij de in- en uitschakelverschijnselen hebben leren kennen.

Het Briggse stelsel heeft als grondtal het getal 10. Dit stelsel wordt wel de gewone logaritmen genoemd. Wij zullen ons in hoofdzaak beperken tot het Briggse logaritmenstelsel. Het typische is, dat de Briggse logaritmen uitsluitend gebruikt wordt voor de lagere wiskunde, zodra men zich echter met de hogere wiskunde gaat bezighouden werkt men uitsluitend met de Neperse logaritmen.
Hoewel de principes der beide stelsels natuurlijk volkomen identiek zijn, blijkt dat men in de hogere wiskunde met de Briggse logaritmen moeilijk uit de weg kan.

Wij zullen in de loop van de lessen over de logaritmen toch het een en ander behandelen van de natuurlijke logaritmen in verband met het grote voordeel dat deze logaritmen biedt in de techniek.

61,2. Het Briggse logaritmenstelsel.

Berekenen we voor een bepaald grondtal de logaritmen van de getallen dan verkrijgen we een logaritmenstelsel voor dat grondtal.

Alle getallen zijn echter niet geschikt om tot grondtal van een logaritmenstelsel gekozen te worden. kiezen we bv. het getal 1 als grondtal, dan is het niet mogelijk hiermee een stelsel op te bouwen. Immers tot welke macht we het getal 1 ook verheffen, steeds krijgen we als antwoord het getal 1 weer. Hieruit zou volgen, dat het getal 1 oneindig veel logaritmen zou hebben, terwijl andere getallen er geen zouden hebben. Verder zijn ook de negatieve getallen ongeschikt als grondtal.
Beschouwen we als voorbeeld eens de vorm:

$$\log_{-3} 9 = 2,\ \text{daar } (-3)^2 = 9 \text{ is en verder de vorm}$$
$$\log_{-3} 27 = x,\ \text{dan zou } (-3)^x - 27 \text{ zijn.}$$

Nu is er voor x geen getal te vinden waarvoor -3 tot die macht 27 zou opleveren.

Ieder positief getal ongelijk aan 1 kan als grondtal van een logaritmestelsel gekozen worden. Beperken we ons nu tot het Briggse logaritmestelsel, dat het getal 10 als grondtal gekozen heeft en schrijven we voor een aantal machten van 10 de logaritme hieruit op, dan zien we dat:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Log}_{10} 1 = 0 & \text{omdat } 10^0 = 1 \\
\mathrm{Log}_{10} 10 = 1 & \text{omdat } 10^1 = 10 \\
\mathrm{Log}_{10} 100 = 2 & \text{omdat } 10^2 = 100 \\
\mathrm{Log}_{10} 1000 = 3 & \text{omdat } 10^3 = 1000 \\
\quad \vdots & \\
\log_{10} 10^6 = 6 & \text{omdat } 10^6 = 10^6 \text{ enz.}
\end{array}$$

Hieruit volgt dat hoe groter het getal wordt, waaruit de logaritmen genomen moeten worden des te groter wordt het antwoord. Hieruit volgt:

$$\log_{10} \infty = \infty \qquad \text{omdat } 10^{\infty} = \infty.$$

Beschouwen we nu de logaritme uit getallen kleiner dan 1, dan moet de uitkomst kleiner dan 0, dus een negatief getal zijn. Zo is:

$$\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$$
$$\log_{10} 0{,}01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$$
$$\log_{10} 0{,}001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$$
$$\log_{10} 10^{-4} = -4 \text{ enz.}$$

Hieruit volgt, dat des te kleiner het getal wordt waaruit de logaritmen genomen moet worden, des te groter negatief wordt het antwoord. Is het getal uiteindelijk zo klein mogelijk geworden, d.w.z. gelijk aan 0, dan is $\log_{10} \infty = -\infty$. We kunnen dit als volt aantonen.

Stel $\log_{10} 0 = x$, dan is $10^x = 0$. Wil 10^x kleiner dan 1 worden, dan moet x in ieder geval negatief zijn, immers $10^0 = 1$.

Stel $x = -y$, dan is $10^{-y} = \frac{1}{10^y} = 0$, en dit is zo als $y = \infty$, dus: $x = -\infty$.
Hieruit volgt de volgende zeer belangrijke regel:

De logaritme uit een negatief getal is onbestaanbaar.

Komen we in dit verband hiermee terug op de uitspraak dat het grondtal van de logaritme nooit negatief kan zijn, dan is dit nu ook aan te tonen net behulp van de regel van het veranderen van het grondtal.

$$\log_{-3} 27 = \frac{\log 27}{\log -3}.$$

De noemer is onbestaanbaar.

Samenvattend kunnen we dus algemeen zeggen:
Het getal waaruit de logaritme getrokken moet worden kan lopen van 0 tot $+\infty$, de logaritmen uit deze getallen loopt van $-\infty$ tot $+\infty$. In fig. 61,1 is de grafische voorstelling getekend van de logaritme van een aantal getallen. Voor de tekening is als grondtal van de logaritmen het getal 2 genomen, daar anders de tekening te onoverzichtelijk zou worden.

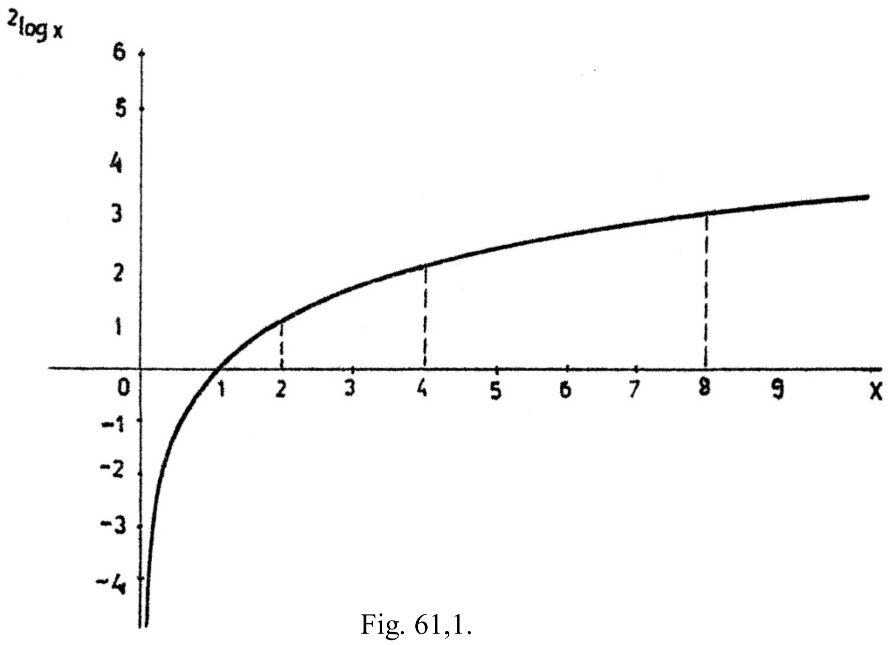

Fig. 61,1.

Oplossingen inzenden van de opgaven 601 t/m 605.

62,1. Logaritmische en exponentiële functies.

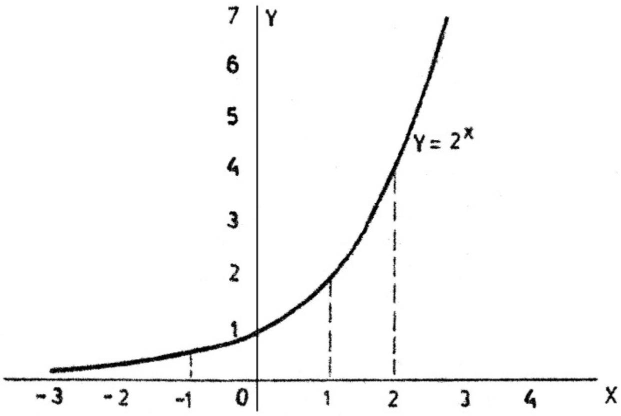

Fig. 62,1. De exponentiële functie $y = 2^x$.

Nemen we een logaritmische vorm algemeen geschreven aan als $y = \log_a x$, waarbij we ook een algemeen grondtal hebben aangenomen, dan geldt dus als voorwaarde: $a > 0 \; en \; x \geq 0$ ($\geq$ betekent groter of hoogstens gelijk aan 0).

We noemen nu $y = \log_a x$ de logaritmische functie van y. Nu kunnen we voor $y = \log_a x$ schrijven $x = a^y$.

We zeggen dan dat x de exponentiële functie van y is. In de vorige les hebben we de logaritmische functie $y = \log_2 x$ getekend.
De exponentiële functie luidt $y = 2^x$, die uiteraard dezelfde figuur geeft als y in fig. 61,1.
In fig. 62,1 is deze exponentiële functie $y = 2^x$ getekend. Vooral de exponentiële functies worden in de techniek veel gebruikt.
In verband hiermee herinneren we aan de Neperse logaritmen met grondtal ε.
ε is een onmeetbaar getal, juist als het geval π, hetgeen ook een onmeetbaar getal is. $\varepsilon \approx 2{,}7$.
De exponentiële functie $y = \varepsilon^x$ heeft dezelfde vorm als in fig. 62,1 getekend is.

Wij beperken ons nu verder tot de Briggse logaritmen, dus met grondtal 10. Dit grondtal zullen we er niet steeds weer bijschrijven en spreken af, dat indien het grondtal niet vermeld staat, hierbij het grondtal het getal 10 gedacht moet worden.

62,2. Logaritmische vergelijkingen.

Onder de logaritmische vergelijking verstaat men een vergelijking waarin de logaritme van een onbekende vorm voorkomt. De oplossing van deze vergelijking berust op het principe:

Als twee logaritmen gelijk zijn, dan zijn ook de daarbij behorende getallen gelijk.

In formule als: $\log x = \log a$, dan is $x = a$.

Heeft men een logaritmische vergelijking opgelost, dan moet men altijd nagaan of voor de gevonden wortels de vormen waarvan in de opgave de logaritme wordt genomen, positief zijn.
Is dit niet het geval, dan zijn de wortels ingevoerd bij de bewerking.

Voorbeeld 1: Los x op uit de volgende vergelijking.
$$2\log(3x^2 + 106x - 5) = \log(x+1)^2 + 4.$$

Oplossing:
$$\log(3x^2 + 106x - 5)^2 = \log(x+1)^2 + \log 10^4 .$$
$$\log(3x^2 + 106x - 5)^2 = \log 10^4(x+1)^2 \text{ dus:}$$
$$(3x^2 + 106x - 5)^2 = 10^4(x+1)^2.$$

Hieruit volgt: $3x^2 + 106x - 5 = \pm 10^2(x+1)$.

We nemen eerst de positieve oplossing:

$$3x^2 + 106x - 5 = 10^2(x+1)$$
$$3x^2 + 106x - 5 = 100x + 100$$
$$3x^2 + 6x - 105 = 0$$
$$3x^2 + 21x - 15x - 105 = 0$$
$3x(x+7) - 15(x+7) = 0$, dus:
$(3x-15)(x+7) = 0$, hieruit volgt $x_1 = 5,\ x_2 = -7$.

Substitueren we deze oplossingen in de opgaven, dan vinden we voor x_1:

$2\log(75 + 530 - 5) = \log(5+1)^2 + 4$ of $2\log 600 = \log 36 + 4$, dus:
$\log 600^2 = \log 36 + \log 10^4 = \log 36.10^4$, zodat:
$\log 600^2 = 36.10^4$ en dit is inderdaad juist.

Voor x_2 vinden we:
$$2\log(147 - 742 - 5) = \log(-7+1)^2 + 4.$$
$2\log(-600) = \log 36 + 4$, dus: $x_2 = -7$ voldoet niet.

Nemen we nu nog de negatieve oplossing:
$$3x^2 + 106x - 5 = -10^2(x-1)$$
$$3x^2 + 106x - 5 = -10x - 100$$
$$3x^2 + 206x + 95 = 0.$$
Deze vergelijking levert geen mooie wortels, ze zijn ongeveer gelijk aan $x_3 = -½$ en $x_4 = -68$.
De oplossing $x_3 = -½$ voldoet niet, $x_4 \approx -68$ wel.

<u>Voorbeeld 2:</u> Los x op uit de vergelijking:
$$\frac{1}{\log_{x+6} x} + \log_x(x-1) = 2 + \frac{1}{\log_2 x}.$$

<u>Oplossing:</u>
$$\frac{1}{\frac{\log x}{\log\ (x+6)}} + \frac{\log(x-1)}{\log x} = 2 + \frac{1}{\frac{\log x}{\log 2}} =$$
$$= \frac{\log\ (x+6)}{\log x} + \frac{\log\ (x-1)}{\log x} - \frac{\log 2}{\log x} = 2$$
$$\log(x+6) + \log(x-1) - \log 2 = 2\log x$$
of: $\frac{\log\ (x+6)\ (x-1)}{2} = \log x^2$, hieruit volgt: $\frac{(x+6)\ (x-1)}{2} = x^2$.

Dus: $(x+6)(x-1) = 2x^2$; $x^2 + 5x - 6 = 2x^2$ of $x^2 - 5x + 6 = 0$, dit is te ontbinden in:
$(x-2)(x-3) = 0$, zodat: $x_1 = 2$ en $x_2 = 3$.

<u>Voorbeeld 3:</u> Bereken x uit:
$\log\log x = (40 - 2\log x) + 1$ (grondtal 2)

<u>Oplossing:</u> $\log_2 \log_2 x = \log_2(40 - 2\log x) + \log_2 2 =$
$= \log_2 \log_2 x = \log_2 2\,(40 - 2\log_2 x)$, dus:
$$\log_2 x = 2(40 - 2\log_2 x)$$
of: $\log_2 x = 80 - 4\log_2 x$.

Hieruit volgt: $5\log_2 x = 80$ of $\log_2 x = 16$ en $x = 2^{16}$.

Ter oefening maken de opgaven 606 t/m 608.
Oplossingen inzenden van de opgaven 609 t/m 612.

63,1. Exponentiële vergelijkingen.

Onder een exponentiële vergelijking verstaat men een vergelijking waarin de onbekende in de exponent van de macht voorkomt.

De oplossing van deze soort vergelijking berust op het volgende principe:

> Als twee machten van eenzelfde getal gelijk zijn, dan zijn ook hun exponenten gelijk, uitgezonderd als het grondtal 1 of 0 is.

Is het grondtal gelijk aan 1, dan is de uitkomst altijd gelijk aan 1, zodat iedere waarde in de exponent juist zou zijn. Ditzelfde geldt voor het grondtal 0, immers 0 tot een bepaalde macht is gelijk aan nul. In formulevorm zouden we de omblokte regel aldus voor kunnen stellen:

als $x^a = x^b$, dan is $a = b$.

We zullen nu een en ander met enkele uitgewerkte voorbeelden verduidelijken.

Voorbeeld 1: Los x op uit de vergelijking $5^{x^2-7x+9} = \frac{1}{5}$.

Oplossing: $5^{x^2-7x+9} = 5^{-1}$, dus: $x^2 - 7x + 9 = -1$. Hieruit volgt:
$x^2 - 7x + 10 = 0$. Ontbinden in factoren geeft: $(x-5)(x-2) = 0$, zodat:
$x_1 = 5$ en $x_2 = 2$. Beide oplossingen voldoen.

Voorbeeld 2: Los x op uit: $3^x - 4 \,.\, 3^{x-2} = 45$.

Oplossing: $3^x - 4 \,.\, \frac{3^x}{3^2} = 5 \,.\, 3^2$.

$3^x - \frac{4}{9} \,.\, 3^x = 5 \,.\, 3^2$ of $\frac{5}{9} 3^x = 5 \,.\, 3^2$,

dus: $3^x = \frac{9}{5} \,.\, 5 \,.\, 3^2 = 3^4$, hieruit volgt: $x = 4$.

Voorbeeld 3: los x op uit $(3x-5)^{2x-7} = (3x-5)^{3x-8}$.
Oplossing: Aan deze vergelijking wordt voldaan als de exponenten gelijk zijn, dus als:
$2x - 7 = 3x - 8$, dus: $x = 1$.
Is echter het grondtal gelijk aan 1, dan vinden we ook en oplossing, d.w.z. als $3x - 5 = 1$.
Hieruit volgt $3x = 6$, dus: $x = 2$.
Verder vinden we nog een oplossing als het grondtal gelijk is aan 0, dus als $3x - 5 = 0$.
Hieruit volgt: $3x = 5$, dus: $x = 1\frac{2}{3}$. We vinden dus drie oplossingen.

Als dus in het grondtal van de macht de onbekende voorkomt, dienen we als oplossingen het grondtal respectievelijk gelijk aan 0 en gelijk aan 1 te stellen.
Zijn de beide leden van een exponentiële vergelijking niet te herleiden tot machten van eenzelfde grondtal, dan, dan maken we gebruik van logaritmen.
Enkele voorbeelden zullen dit duidelijk maken.

Voorbeeld 4: Los x op uit $100^{(\log x - 1)^2} = x$.
Oplossing: Neem aan beide kanten van het =-teken de logaritmen, dus:
$100^{(\log x - 1)^2} = \log x$
$(\mathrm{Log}\, x - 1)^2 \log 100 = \log x$.

Daar bij grondtal 10, $\log 100 = 2$, vinden we:

$2(\log x - 1)^2 = \log x$

of: $2(\log x)^2 - 4\log x + 2 = \log x$.

Op nul herleid, geeft dit: $2(\log x)^2 - 5\log x + 2 = 0$. Ontbinden in factoren:

$2\log^2 x - 4\log x - \log x + 2 = 0$

$2\log x(\log x - 2) - 1(\log x - 2) = 0$

$(2\log x - 1)(\log x - 2) = 0$,

dus: $2\log x - 1 = 0$ of: $\log x - 2 = 0$

$2\log x = 1$ $\quad$ $\log x = 2$

$\log x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{x = 100}$

$x = \sqrt{10}$. Beide oplossingen voldoen.

<u>Voorbeeld 5:</u> Los x op uit: $x^{5 + \log x} = 0{,}0001$.

<u>Oplossing:</u> Neem aan beide kanten van het =-teken de logaritmen.

$\log x^{5 + \log x} = \log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4$.

$(5 + \log x)\log x = -4$

$\log^2 x + 5\log x + 4 = 0$

Ontbinden in factoren geeft:

$(\log x + 4)(\log x + 1) = 0$,

dus: $\log x + 4 = 0$ of: $\log x + 1 = 0$

$\log x = -4$ $\quad$ $\log x = -1$

$x = 10^{-4}$ $\quad$ $x = 10^{-1}$. Beide oplossingen voldoen.

<u>Voorbeeld 6:</u> Los x op uit: $7^{x^2 - 2} - 3 \,.\, 7^{2x^2 - 6} + 98 = 0$.

<u>Oplossing:</u> De vorm is te schrijven als:

$$\frac{7^{x^2}}{7^2} - 3 .\frac{7^{2x^2}}{7^6} + 2 \,.\, 7^2 = 0$$

Stel: $7^{x^2} = y$, dan is $7^{2x^2} = y^2$.

We vinden nu:

$$\frac{y}{7^2} - 3 \,.\, \frac{y^2}{7^6} + 2 \,.\, 7^2 = 0$$

$$7^4 y - 3 \,.\, y^2 + 2 \,.\, 7^8 = 0$$

of: $$3y^2 - 7^4 y - 2 \,.\, 7^8 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{7^4 \pm \sqrt{7^8 + 24 \,.\, 7^8}}{6} = \frac{7^4 \pm 5 \,.\, 7^4}{6}$$

$$y_1 = \frac{7^4 - 5 \,.\, 7^4}{6} = \frac{6 \,.\, 7^4}{6} = \boldsymbol{7^4};$$

$$y_2 = \frac{7^4 - 5 \,.\, 7^4}{6} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \,.\, \boldsymbol{7^4}.$$

y_2 is negatief, zodat: $7^{x^2} = -\frac{2}{3}\, 7^4$.

Er is geen oplossing voor x te vinden, die voldoet.

Beschouwen we nu verder de oplossing $y = 7^4$, dan is $7^{x^2} = 7^4$ of $x^2 = 4$, dus $x = \pm\, 2$.

Voor $x = \pm\, 2$ en $x = -2$ wordt x^2 altijd $+4$, zodat beide oplossingen voldoen.

Ter oefening maken de opgaven 613 t/m 615.

Oplossingen inzenden van de opgaven 616 t/m 620.

Het rekenen met logaritmen

64,1. Het bepalen van de wijzer.

In les 61 hebben we gezien dat in het Briggse logaritmenstelsel met grondtal 10 geldt:

$\log_{10} 1 = 0$ $\log_{10} 100 = 2$ $\log_{10} 10000 = 4$
$\log_{10} 10 = 1$ $\log_{10} 1000 = 3$ $\log_{10} 10^5 = 5$
$\log_{10} 10^6 = 6$ enz.

Hieruit kunnen we dus afleiden dat de logaritme uit een getal gelegen tussen 1 en 10, dus van de getallen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, en 9 gelegen is tussen 0 en 1. De logaritme uit een getal gelegen tussen 10 en 100 is dus gelegen tussen 1 en 2, van een getal tussen 100 en 1000, tussen 2 en 3 enz.
Het getal dat voor de komma komt te staan, heet de wijzer; het getal dat achter de komma komt te staan, heet de mantisse.

De wijzer moet men zelf bepalen, terwijl de mantissen in tabellen in de logaritmentafels verzameld zijn. Deze mantissen zijn onmeetbare decimale breuken, uitgerekend in 4, 5 of meer decimalen afhankelijk van de tafel die men gebruikt. Bij de behandeling van dit onderwerp zullen we weer gebruik maken van Noordhoff's School-tafel (5 decimalen), vijftiende en latere druk*[9].

Om nu de wijzer eenvoudig te bepalen maken we voor getallen groter dan 1 gebruik van de volgende regel:

Van de getallen groter dan 1 is de wijzer positief en 1minder
dan het aantal cijfers voor de komma van het getal.

Zo is:

$\log 375 = 2,.\ .\ .\ .\ .$ $\log 24{,}34 = 1,.\ .\ .\ .\ .$
$\log 37{,}5 = 1,.\ .\ .\ .\ .$ $\log 18234{,}267 = 4,.\ .\ .\ .\ .$
$\log 3{,}75 = 0,.\ .\ .\ .\ .$ $\log 1{,}23456 = 0,.\ .\ .\ .\ .$

Beschouwen we nu de getallen gelegen tussen 0 en 1, dan is:

$\log 0{,}1 = -1$ $\log 0{,}001 = -3$
$\log 0{,}01 = -2$ $\log 0{,}0001 = -4$

Hieruit blijkt dat de wijzer (dus de getallen $-1, -2, -3, -4,$ enz.) overeenstemt met het aantal nullen dat in het getal voorkomt. De algemene regel luidt als volgt:

Van de logaritme van een decimale breuk gelegen tussen 0 en 1 is de wijzer negatief en bestaat uit zoveel eenheden als er nullen aan de linkerkant van de breuk staan, waarbij de nul, voor de komma meegerekend moet worden.

We kunnen dit als volgt verduidelijken met enige voorbeelden:

$$\log 0{,}35 = \log \frac{3{,}5}{10} = \log 3{,}5 - \log 10 = 0,.\ .\ .\ .\ . \qquad -1$$

$$\log 0{,}035 = \log \frac{3{,}5}{100} = \log 3{,}5 - \log 100 = 0,.\ .\ .\ .\ . \qquad -2$$

$$\log 0{,}000017 = \log \frac{1{,}7}{10^5} = \log 1{,}7 - \log 10^5 = 0,.\ .\ .\ .\ . \quad -5$$

Indien we nu de logaritme van een getal moeten bepalen, bepalen we eerst de wijzer en daarna zoeken we in de logaritmetafel de mantisse op.

64,2. Het bepalen van de mantisse.

In de logaritmetafel zijn de logaritmen van alle getallen van vier cijfers opgenomen. De wijzer staat in de tafel niet vermeld, men kan deze zelf direct bepalen.

[9] De hedendaagse moderne pocket calculators berekenen deze logaritmen tot 9 decimalen. (FV)

In de tafel zal men dus steeds alleen de mantisse kunnen vinden.

Daar de logaritmen slechts langzaam toenemen, heeft men in de tafel de eerste 2 cijfers van de mantisse dik gedrukt en deze niet meer herhaald. Daar waar een “sterretje” gedrukt staat, begint het volgende dikgedrukte getal van 2 cijfers reeds te gelden.

We zullen nu de logaritmen van enige getallen gaan opzoeken. Bepalen we bv. de logaritme uit het getal 32,4 dan zien we twee cijfers voor de komma, dus de wijzer is 1.

Zoeken we nu de mantisse in de tafel op, dan zoeken we in de voorste dikgedrukte rij getallen het getal 324 op (we letten dus verder niet meer op de komma, daar deze reeds door de wijzer verder vastgelegd is). We vinden nu achter het getal 324 als mantisse de waarde 51055, dit is dus 0,51055.

Samengevat vinden we dus:

$$\log 32{,}4 = 1{,}51055.$$

We kunnen nu makkelijk de volgende waarden aflezen.
$\log 32{,}41 = 1{,}51068$; $\log 32{,}42 = 1{,}5081$; $\log 32{,}43 = 1{,}5095$ enz.

We zullen nu met het getal 32,43 enige logaritmen bepalen door alleen de komma in het getal te verplaatsen. De cursist ziet dan duidelijk dat de mantisse dezelfde blijft, doch de wijzer verandert.
$\log 3243 = 3{,}51095$; $\log 324{,}3 = 2{,}51095$; $\log 32{,}43 = 1{,}51095$; $\log 3{,}243 = 0{,}51095$;
$\log 0{,}3243 = 0{,}51095 - 1$; $\log 0{,}03243 = 0{,}51095 - 2$; $\log 0{,}000003243 = 0{,}51095 - 6$;
$\log 324300000 = 8{,}51095$.

In de in deze lessen besproken tafel staan de logaritmen van de getallen 1 tot en met 100 rechtstreeks aangegeven met wijzer en al. Dit is echter niet noodzakelijk. Dient men de logaritmen te bepalen uit een getal dat uit minder dan 3 cijfers bestaat, dan voegt men enige nullen achter de cijfers totdat het aantal cijfers drie wordt, immers de wijzer verandert hierdoor niet. Bepalen we bv. log 12, dan kunnen we zeggen: we zoeken de logaritmen uit het getal 12,0. De wijzer is 1.
Dus $\log 12 = 1{,}07918$. Zo zien we bv. in de tafel $\log 2 = 0{,}30103$.
$\log 20 = 1{,}30103$; $\log 200 = 2{,}30103$ enz.

Het is dus eigenlijk overbodig de logaritmen van de getallen van 1 tot en met 100 apart te vermelden. De logaritmen van de getallen vanaf 100 tot en met het getal 1000,9 kunnen we rechtstreeks in de tafel opzoeken. In de volgende les zullen we nu leren de logaritme te bepalen uit getallen die uit 5 cijfers bestaan.

Ter oefening maken de opgaven 621 en 622.
Oplossingen inzenden van de opgaven 623 t/m 625.

65,1. Het bepalen van de logaritme uit een getal van 5 cijfers.

Om de logaritme te bepalen uit een getal van 5 cijfers, bv. uit het getal 32476 gaan we als volgt te werk:

De wijzer is 4.
Van $\log 32470$ is de mantisse 0,51148.
Van $\log 32480$ is de mantisse 0,51162

Het verschil tussen beide mantissen is:

$$0{,}51162 - 0{,}51148 = 0{,}00014.$$

Het verschil tussen 32470 en 32480 is 10 eenheden, het verschil tussen de mantissen van deze getallen is 0,00014.
Het bedrag, waarmee de mantisse toeneemt als het getal met één eenheid vermeerdert, is dus 0,000014. Het getal, waaruit we de logaritme moeten bepalen, was 32476. Dus zes eenheden groter dan het getal 32470. Dan is de mantisse van dit getal $6 \times 0{,}000014 = 0{,}000084$ groter dan de mantisse van het getal 32470. Daar we de logaritme bepalen in 5 decimalen, wordt de 4 van het getal 0,000084 weggelaten, zoals we reeds afspraken bij de goniometrie.
We vinden dus:

$$\log 32476 = 4{,}51148 + 0{,}00008 = 4{,}5156.$$

Deze bewerking staat bekend onder de naam <u>interpoleren.</u>
Het interpoleren berust op de stelling:

<u>De aangroeiingen van de logaritmen zijn evenredig met de aangroeiingen der getallen.</u>

Deze stelling is echter niet geheel juist. Immers, zouden de getallen en de logaritmen van die getallen recht evenredig met elkaar aangroeien, dan zou de grafische voorstelling van de logaritmen een rechte zijn.

Maar in les 61, fig. 61,1 hebben we gezien, dat dit geen rechte lijn is. De fout is echter zeer gering en komt praktisch in de eerste cijfers van de mantisse niet tot uiting.
De fout die we maken, is dus zeer gering.

Uit een en ander volgt verder onmiddellijk, dat we er geen belangstelling voor hebben om de logaritmen van de getallen groter dan 5 cijfers te bepalen. Ronden we de getallen af tot op 5 decimalen dan is de fout die we maken, slechts zeer gering.

We hebben nu in een voorbeeld laten zien hoe we de logaritmen kunnen bepalen uit een getal van 5 cijfers.

Om ons nu veel rekenwerk te besparen zijn in de meeste logaritmentafels zogenaamde interpolatietabellen opgenomen. Deze interpolatietabellen staan vermeld in de kolommen achteraan de pagina onder het hoofd: P.P.

Beschouwen we nogmaals ons voorbeeld 32476.
De wijzer is 4. De logaritme van 32476 is dus 4,51148. Die van $\log 32480$ is 4,51162. Het verschil is 0,00014. Het getal 14, dus zonder de nullen staat nu boven de interpolatiekolom.

Zoeken we nu in deze tabel naar de waarde voor de vijfde decimaal, het getal 6, dan zien we dat dit 8,4 is, juist als we berekend hadden.
We schrijven een en ander als volgt op:

$$\begin{array}{rl} \log 32470 = & 4{,}51148 \\ \underline{\qquad 6 =} & \underline{\qquad\quad 8}+ \\ \log 32476 = & 4{,}51156. \end{array}$$

(direct afgerond dus….)

We zullen nu nog enige logaritmen op bovenstaande manier als voorbeeld opzoeken zonder uitgebreide verklaringen.

De cursist dient goed te oefenen op de opgaven die met antwoord vermeld staan.
Het opzoeken van logaritmen is een kwestie van veel routine. Ook is het raadzaam en veelal noodzakelijk in de andere lessen opgaven met veel rekenwerk met behulp van logaritmen op te lossen.
We zullen dit in een der volgende lessen laten zien.

<u>Voorbeeld 1:</u> Bepaal $\log 157{,}38$.

<u>Oplossing:</u> $\log 157{,}30 = 2{,}24378$
Het interpolatiegetal (dus het verschil met het volgende getal) is $(403 - 378) = 25$.
8 geeft aan 20,0 dus:

$$\begin{array}{rl} \log 157{,}30 = & 2{,}24378 \\ 8 = & 20\ + \\ \hline \log 175{,}38 = & 2{,}24398. \end{array}$$

<u>Voorbeeld 2:</u> Bepaal $\log 8{,}7343$.

<u>Oplossing:</u>
Interpolatietabel 5 geeft voor:

$$\begin{array}{rl} \log 8{,}7340 = & 0{,}94121 \\ 3 = & 1{,}5\ + \\ \hline \log 8{,}7343 = & 0{,}941225. \end{array}$$

Afgerond op 5 decimalen is dus $\log 8{,}7343 = 0{,}94123$.

<u>Voorbeeld 3:</u> Bepaal $\log 0{,}0012048$.

<u>Oplossing:</u>
Interpolatietabel 36 geeft voor:

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}0012040 = & 0{,}08063 \quad -3 \\ 8 = & 28{,}8\ + \\ \hline \log 0{,}0012048 = & 0{,}08092 \quad -3. \end{array}$$

<u>Voorbeeld 4:</u> Bepaal $\log 0{,}016412$.

<u>Oplossing:</u>
Interpolatietabel 26 geeft voor:

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}016410 = & 0{,}21511 \quad -2 \\ 2 = & 5{,}2\ + \\ \hline \log 0{,}016412 = & 0{,}21516 \quad -2. \end{array}$$

<u>Voorbeeld 5:</u> Bepaal $\log 32{,}547$.

<u>Oplossing:</u>
Interpolatietabel 13 geeft voor:

$$\begin{array}{rl} \log 32{,}54 = & 1.51242 \\ 7 = & 9\ + \\ \hline & 1{,}51251 \end{array}$$

Bij afronding volgen we dus de volgende regel:

Een getal kleiner dan 5, dus een der getallen 0, 1, 3, of 4 wordt verwaarloosd, een getal groter dan 5 en het getal 5, dus de getallen 5, 6, 7, 8 en 9 worden naar boven afgerond.

Oplossingen inzenden van de opgaven 626 t/m 630.

R.T.

HILVERSUM

66,1. Het terugzoeken.

In deze les zullen we behandelen hoe we omgekeerd het getal bepalen waarvan de logaritme is gegeven.

Het getal dat we moeten bepalen, stellen we gelijk aan x. Gevraagd wordt het getal x te bepalen als gegeven is:

$$\log x = 2{,}12189.$$

In de tafel zoeken we de mantissen op, die met het getal 12 beginnen en zoeken bij deze laatste mantisse in de volgende drie cijfers naar de cijfers 189. Deze groep bevindt zich in de kolom waarboven het cijfer 4 staat en in de rij, waarvoor het getal 132 staat. De mantisse 12189 behoort dus bij het getal 1324. De wijzer van de logaritme is 2, zodat het aantal cijfers voor de komma 3 moet bedragen.

Het te zoeken getal is dus: 132,4.

Het kan nu voorkomen dat de te zoeken mantisse niet in de tafel voorkomt. We zullen dit weer aan de hand van een voorbeeld behandelen.

Gevraagd wordt het getal x te bepalen als is gegeven:

$$\log x = 1{,}34762.$$

In de tafel zoeken we de mantisse, die met de cijfers 34 begint en bij deze mantissen zoeken we het getal 34672. Dit getal komt echter niet in de tafel voor. Wel de getallen 34753 en 34772, waartussen het getal 34762 is gelegen.

Voor 2,34762 vinden we als bijbehorend getal 22,26 (let op de wijzer) en voor 2,34772 vinden we het bijbehorende getal 22,27. Het getal x ligt dus tussen beide in.

Nu is het verschil tussen 2,34772 en 2,34753 gelijk aan 0,00019. Dit is dus het verschil tussen de mantissen die wel in de tafel voorkomen.

In de tafel staat nu onder de kolom aangegeven met de letters P.P. (afkorting van Pro Parte = per deel) kolommetjes, waaruit we de opvolgende cijfers kunnen aflezen. In ons voorbeeld was het verschil 0,00019. Het getal 19 staat dan boven een der zogenaamde interpolatiekolommen vermeld. Welk verschil men ook tussen twee opeenvolgende mantissen op een bepaalde pagina uitrekent, steeds zal dit verschil het hoofd vormen van een kolom in de interpolatietabel.

We nemen nu het verschil tussen het gegeven getal en de mantisse die juist iets kleiner is dan het gegeven getal en vinden:
$0{,}34762 - 0{,}34753 = 0{,}00009$. Het getal 9 zoeken we op in de interpolatiekolom onder het cijfer 19. Het dichtstbij zijnde getal is dan 9,5. Bij dit getal hoort het cijfer 5 die vooraan is aangegeven.
Het te zoeken getal x wordt dan , indien we nu ook de wijzer in rekening brengen $x = 22{,}265$.

We zullen in deze les een aantal voorbeelden uitwerken, waarbij het noodzakelijk is deze voorbeelden geheel na te werken voordat men aan de opgaven begint. Logaritmen opzoeken is een kwestie van veel routine.

Voorbeeld 1: Bepaal het getal x als gegeven is:
$$\log x = 0{,}46278 - 2$$
Oplossing: We vinden dat de mantisse 0,46378 gelegen is tussen de mantissen 0,46270 en 0,46285. We nemen dus de interpolatietabel aangegeven met het cijfer 15. Het verschil tussen de gegeven mantisse en de mantisse die kleiner is, is $0{,}46278 - 0{,}46270 = 0{,}00008$. In de interpolatietabel 15 ligt het getal 7,5 het dichtste bij het getal 8. Hierbij behoort het getal 5.

Met inachtneming van de wijzer -2 vinden we, dat $\boldsymbol{x = 0{,}029025}$.

Voorbeeld 2: Bepaal het getal x, als gegeven is:
$\log x = 5{,}78643.$

Oplossing: De mantisse is gelegen tussen de mantissen 0,78640 en 0,79647.
Het verschil is 0,00007. We zoeken dus in de interpolatietabel genoemd onder het cijfer 70.
Het verschil der gegeven mantisse en de mantisse die kleiner is, bedraagt:
$0{,}78643 - 0{,}78640 = 0{,}00003.$
In de interpolatietabel is het dichtste bij 3 gelegen getal 2,8.
Hierbij is het getal 4 gegeven.
We vinden met inachtneming van de wijzer dat:
$\boldsymbol{x = 611540}$

Voorbeeld 3: Bepaal het getal x als gegeven is:
$\log x = 0{,}00927.$

Oplossing: De mantisse 0,00927 is gelegen tussen de mantissen 0,00903 en 0,00945.
Het verschil hiervan is:
$0{,}00945 - 0{,}00903 = 0{,}00042.$
We nemen dus de interpolatietabel onder het getal 42.
Verder is:
$0{,}00927 - 0{,}00903 = 0{,}00024.$
In de interpolatietabel onder 42 vinden we het getal 25,2 dat het dichtste bij 24 is gelegen.
We vinden dus met inachtneming van de wijzer dat:
$\boldsymbol{x = 1{,}0216}.$

Voorbeeld 4: Bepaal het getal x als gegeven is:
$\log x = 2{,}68009.$

Oplossing: Indien we in de tafel de mantisse 0,68009 zoeken, dan kunnen we deze niet vinden.
Bij de mantissen die beginnen met het getal 67 vinden we de laatste drie mantissen aangegeven met een sterretje. Dit sterretje geeft aan, dat het aan het getal van drie cijfers voorafgaande getal van 2 cijfers 1 hoger genomen moet worden, dus niet 0,67006; 0,67015 en 0,67024, doch 0,68006; 0,68015 en 0,68024.

We vinden dus, dat de mantisse 0,68009 gelegen is tussen de mantissen 0,68006 en 0,68015. Het verschil van deze beiden is 0,00009. We zoeken nu in de interpolatiekolom 9 naar het getal 3, dat te vinden is uit:
$0{,}68009 - 0{,}6806 = 0{,}00003.$
Het getal 2,7 is het dichtste bij het getal 3 gelegen.
We vinden hier voor de kolom eveneens het getal 3.
Met inachtneming van de wijzer vinden we:
$\boldsymbol{x = 478{,}73}.$

Oplossingen inzenden van de opgaven 631 t/m 635.

67,1. Toepassingen van het rekenen met logaritmen.

1. Bereken de vorm: $\dfrac{33{,}245 \times 1{,}0783 \times 249{,}56}{215{,}83 \times 2{,}7429} =$

Oplossing: We kunnen bovenstaande vorm met behulp van de logaritmen uitrekenen tot op 5 decimalen nauwkeurig. We stellen de vorm gelijk aan x en schrijven:

$\log x = \log 33{,}245 + \log 1{,}0783 + \log 249{,}56 - (\log 215{,}83 + \log 2{,}7429)$.
We vinden:

$$
\begin{array}{llll}
\log 33{,}245 = & 1{,}52173 & \log 215{,}83 = & 2{,}23411 \\
\log 1.0783 = & 0{,}03274 & \log 2{,}7429 = & \underline{0{,}43821} \\
\log 249{,}56 = & \underline{2{,}39717}\ + & & 2{,}67232 \\
 & 3{,}95164 & & \\
 & \underline{2{,}67232}\ - & & \\
\log x = & 1{,}27932 & \boldsymbol{x = 19{,}025}. &
\end{array}
$$

2. Bereken de vorm: $\dfrac{25{,}178^2 \times 0{,}1342^3}{36{,}53^4}$.

Oplossing: Stel de vorm gelijk aan x, dan geldt:
$\log x = 2\log 25{,}178 + 3\log 0{,}1342 - 4\log 36{,}53$

$$
\begin{array}{lll}
2\log 25{,}178 = 2 \times 1{,}39097 & = & 2{,}78194 \\
3\log 0{,}1342 = 3 \times (0{,}12775 - 1) & = & \underline{0{,}38325 - 3}\ + \\
 & & 3{,}16519 - 3 \\
4\log 36{,}53 = 4 \times 1{,}56265 & = & \underline{6{,}25060\qquad}\ -
\end{array}
$$

Deze aftrekking is zo niet uitvoerbaar. We schrijven dan:

$$
\begin{array}{lll}
 & & 7{,}16519 - 7 \\
 & & \underline{6{,}25060\qquad} \\
\log x & = & 0{,}91459 - 7 \qquad x = 0{,}00000082147 = \mathbf{82147.10^{-11}}.
\end{array}
$$

3. Bereken: $\sqrt[25]{(13{,}457)^8}$.

Oplossing: Stel de vorm gelijk aan x, dan geldt:

$\log x = \log \sqrt[25]{(13{,}457)^8} = \log(13{,}457)^{\frac{8}{25}} = \frac{8}{25}\log 13{,}457$.

$\frac{8}{25}\log 13{,}457 = \frac{8}{25} \times 1{,}12895 = 0{,}36146$, dus: $\boldsymbol{x = 2{,}2986.}$

We hebben op de normale manier $\frac{8}{25} \times 1{,}12895$ uitgerekend. Het was echter ook mogelijk geweest deze vorm weer met logaritmen op te lossen. We zullen dit in het volgende voorbeeld laten zien.

4. Bereken: $\sqrt[483]{(12{,}53)^{217}}$

Oplossing: Stel de vorm gelijk aan x, dan geldt:

$$\log x = \frac{217}{483}\log 12{,}53 = \frac{217}{483} \times 1{,}09795.$$

Nemen we nu nogmaals aan beide zijden van de gelijkheid de logaritmen, dan vinden we:

$$
\begin{array}{llll}
\log\log x = \log 217 + \log 1{,}09785 - \log 483 & & & \\
\log 217 = & 2{,}33646 & & \\
\log 1{,}09795 = & \underline{0{,}04060}\ + & & \\
 & 2{,}37706 & \longrightarrow & 3{,}37706 - 1 \\
\log 483 = & \underline{2{,}68395}\ - & \longrightarrow & \underline{2{,}68395\qquad}\ - \\
 & \log\log x = & & 0{,}69311 - 1
\end{array}
$$

$\log x = 0{,}49330 \qquad \boldsymbol{x = 3{,}1139}$

67,2. Vraagstukken met negatieve getallen.

We hebben in een der vorige lessen over de logaritmen geleerd dat een negatief getal geen logaritme kan hebben. Daar echter een vorm, zoals in een der voorgaande voorbeelden is behandeld, ook negatief kan zijn, dienen we een middel te zoeken om deze opgaven toch met behulp van logaritmen op te lossen.
We zullen dit weer met enige voorbeelden duidelijk maken.

Voorbeeld 1: Bereken $\frac{(-31{,}24)^3 \,.\, (15{,}825)^2}{(-12{,}234)^2}$.

Oplossing: Stel de vorm gelijk aan x, dan geldt:

$$x = -\frac{31{,}24^3 \times 15{,}825^2}{12{,}234^2}$$

of: $$-x = \frac{31{,}24^3 \times 15{,}825^2}{12{,}234^2}.$$

Dus: $\log(-x) = 3\log 31{,}24 + 2\log 15{,}825 - 2\log 12{,}234$.

$$\begin{array}{rl}
3\log 31{,}24 = 3 \times 1{,}49471 = & 4{,}68413 \\
2\log 15{,}825 = 2 \times 1{,}19923 = & \underline{2{,}39846} + \\
 & 7{,}08259 \\
2\log 12{,}234 = 2 \times 1{,}08757 = & \underline{2{,}17514} - \\
\log(-x) = & 4{,}90745 .
\end{array}$$

$\boldsymbol{-x = 80808}$
$\boldsymbol{x = -80808}$ **.**

Voorbeeld 2: Bereken $x = -\frac{(-23{,}5)^5 \times (1{,}76)^4}{(-234{,}5)^3}$.

Oplossing: $x = -\frac{23{,}5^5 \times 1{,}76^4}{234{,}5^3}$.

$\log(-x) = 5\log 23{,}5 + 4\log 1{,}76 - 3\log 234{,}5$.

$$\begin{array}{rl}
5\log 23{,}5 = 5 \times 1{,}37107 = & 6{,}85535 \\
4\log 1{,}76 = 4 \times 0{,}24551 = & \underline{0{,}98204} + \\
 & 7{,}83739 \\
3\log 234{,}5 = 3 \times 2{,}37014 = & \underline{7{,}11042} - \\
\log(-x) = & 0{,}72697
\end{array}$$

$\boldsymbol{-x = 5{,}333}$
$\boldsymbol{x = -5{,}333}$

Oplossingen inzenden van de opgaven 636 t/m 640.

68,1. Complexe getallen.

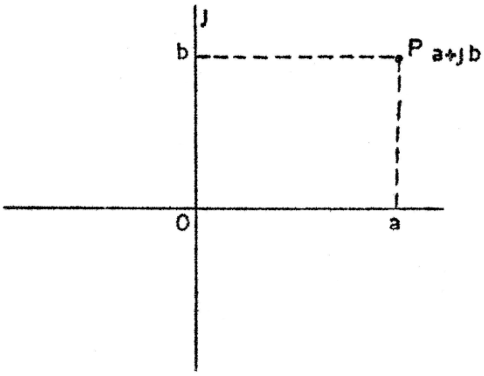

Fig. 68,1.

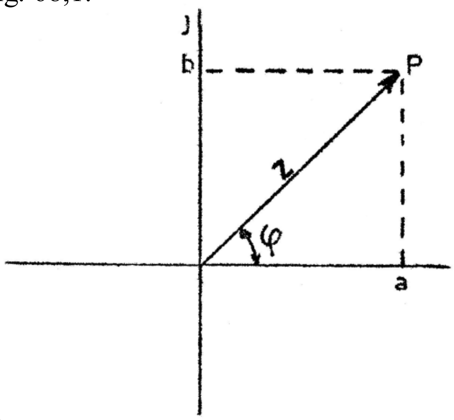

Fig. 68,2.

In fig. 68,1 hebben we een complex getal P getekend. We hebben geleerd dat we dit getal kunnen schrijven als $a + jb$. Het punt P is het beeldpunt van het complexe getal $a + jb$.
In Aa. Les 43 is aangetoond dat we dit complexe getal ook op een andere manier aan kunnen geven en wel met behulp van modulus Z en argument φ (fig. 68,2).
Uit dit figuur volgt:

$\cos\varphi = \frac{a}{z}$ dus: $a = Z\cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{b}{z}$ dus: $b = Z\sin\varphi$

Hieruit volgt:

$a + jb = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

We voeren dus twee nieuwe symbolen in nl:

$Z = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

De absolute waarde of modulus Z is dus bepaald door de wortel uit de som van de kwadraten van het reële en het imaginaire deel.

Uit bovenstaande volgt dat ieder complex getal te schrijven is in de vorm:
$\bar{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Plaatsen we boven een letter een streepje dan is dit de aanduiding voor een complex getal; de absolute waarde van het complexe getal wordt aangegeven door dezelfde letter zonder streepje of door absoluut-strepen te plaatsen dus als $|\bar{Z}|$.
Beschouwen we bv. de serieschakeling van een spoel en een weerstand, dan hebben we gezien dat de complexe impedantie ts schrijven is als: $\bar{Z} = R + j\omega L$.
Dit kunnen we dus ook schrijven als: $\bar{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Hierin is:

$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ en $\tan\varphi = \frac{\omega L}{R}$.

68,2. Het product van twee complexe getallen.

Stel deze complexe getallen zijn: $\overline{Z_1} = Z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ en $\overline{Z_2} = Z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$
Het product wordt: $\overline{Z_1}\,.\,\overline{Z_2} = Z_1Z_2(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\,.\,(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) =$

$= Z_1Z_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$

$= Z_1Z_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

In woorden: <u>Indien we twee complexe getallen met elkaar vermenigvuldigen vinden we als uitkomst een nieuw complex getal waarvan de modulus gelijk is aan het product der moduli der oorspronkelijke complexe getallen en waarvan het argument gelijk is aan de som der argumenten der oorspronkelijke complexe getallen.</u>

<u>Opgave 1:</u> Gegeven de twee complexe getallen $\overline{Z_1} = 3 + 4j$ en $\overline{Z_2} = 12 - 5j$.
Gevraagd: de modulus en $\tan\varphi$ van het product van $\overline{Z_1}$ en $\overline{Z_2}$.
<u>Oplossing:</u> De absolute waarde van het product is: $Z = Z_1 Z_2$ dus:
$Z = \sqrt{9+16}.\sqrt{144+25} = 5.13 = 65.$
Het argument van het product is gelijk aan de som van de argumenten van $\overline{Z_1}$ en $\overline{Z_2}$ dus $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Daar we echter niet met de hoek φ kunnen werken, omdat alleen $\tan\varphi$ bekend is, nemen we de tangens, dus:

$\tan\varphi = \tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tan\varphi_1 + \tan\varphi_2}{1 - \tan\varphi_1\,.\,\tan\varphi_2}$. Nu is $\tan\varphi_1 = \frac{4}{3}$ en $\tan\varphi_2 = -\frac{5}{12}$.

Dus: $\tan\varphi = \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{4}{3}.\frac{5}{12}} = \mathbf{\frac{33}{56}}$.

<u>Opgave 2:</u> Van twee complexe getallen is gegeven dat het product der moduli gelijk is aan 16, de argumenten zijn resp. $30°\ en\ 45°$. Bepaal het reële en het imaginaire deel van het product van die twee complexe getallen.
<u>Oplossing:</u> Het product is $\bar{Z} = 16\{\cos(45+30) + j sin(45+30)\}$. Het reële deel is dus:
$16\cos(45+30) = 16(\cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30) = 16\left(½\sqrt{2}\,.\sqrt{3} - ½\sqrt{2}\,.\,½\right) =$
$= \mathbf{4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}$. Het imaginaire deel is:
$16\sin(45+30°) = 16(\sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30) = 16\left(½\sqrt{2}\,.\,½\sqrt{3} + ½\sqrt{2}\,.\,½\right) =$
$= \mathbf{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}}$.

<u>68,3. Het quotiënt van twee complexe getallen.</u>

Stel de twee complexe getallen weer $\overline{Z_1}\ en\ \overline{Z_2}$ dan is het quotiënt:
$\bar{Z} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{Z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{Z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)}$. Teller en noemer vermenigvuldigen met $\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2$ dus met het toegevoegd complex getal van de noemer geeft: $\bar{Z} = \frac{Z_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2)}{Z_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2)} =$

$= \frac{Z_1\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\}}{Z_2(cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2)}$ $(cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2) = 1$ zodat:

$\bar{Z} = \frac{Z_1}{Z_2}\{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\}$

In woorden: <u>Indien we twee complexe getallen op elkaar delen vinden we als uitkomst een nieuw complex getal, waarvan de modulus gelijk is aan het quotient der moduli der oorspronkelijk getallen en waarvan het argument gelijk is aan het verschil der argumenten der oorspronkelijke complexe getallen.</u>

<u>Voorbeeld:</u> Bepaal modulus en argument van het complexe getal $\bar{Z} = \frac{2+5j}{5-6j}$.

<u>Oplossing:</u> $Z = \sqrt{\frac{29}{61}}$; $\varphi_Z = \varphi_{teller} - \varphi_{noemer}$ dus $\tan\varphi_Z = \tan(\varphi_{teller} - \varphi_{noemer}) =$

$\frac{\tan\varphi_{teller} - \tan\varphi_{noemer}}{1 + \tan\varphi_{teller}\,.\,\tan\varphi_{noemer}}$ $= \tan\varphi_{teller} = \frac{5}{2}$; $\tan\varphi_{noemer} = -\frac{6}{5}$, dit ingevuld geeft:

$\tan\varphi_Z = \frac{\frac{5}{2} - \frac{6}{5}}{1 - \frac{5}{2}.\frac{6}{5}} = \mathbf{\frac{37}{20}}$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 641 t/m 645.

69,1. Een complex getal tot een macht gebracht.

Noemen we het complexe getal weer $\bar{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, dan is:
$\bar{Z}^n = Z^n(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n$.
$\bar{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)(\cos\varphi + j\sin\varphi). \ . \ . \ . \ .(\cos\varphi + j\sin\varphi)$
We moeten dus n factoren $(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ met elkaar vermenigvuldigen. Volgens de regels van het vermenigvuldigen die we in de vorige les hebben behandeld, dienen we dus de argumenten op te tellen. We vinden dan:
$\bar{Z}^n = Z^n(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = Z^n(\cos\ n\,\varphi + j\sin n\,\varphi)$. Dit geldt voor n zowel geheel als gebroken, positief of negatief.

In woorden: Een complex getal tot een macht gebracht, geeft als uitkomst een nieuw complex getal waarvan de modulus gelijk is aan de modulus van het oorspronkelijke getal tot die macht gebracht en waarvan het argument gelijk is aan het product van de macht maal het argument van het oorspronkelijke complexe getal.

Voorbeeld: Gegeven het complexe getal $\bar{Z} = 3(\cos 30° + j\sin 30°)$.
Gevraagd: $\bar{Z}^3$
Oplossing: $\bar{Z}^3 = 3^3(\cos 30° + j\sin 30°)^3 = 27(\cos 90° + j\sin 90°) = 27j$.

We willen dit controleren door $(\cos 30° + j\sin 30°)^3$ uit te rekenen. We kunnen hiervoor schrijven:
$\left(½\sqrt{3} + ½j\right)^3 = \left(½\sqrt{3}\right)^3 + 3\left(½\sqrt{3}\right)^2 .(½j) + 3\left(½\sqrt{3}\right)(½j)^2 + (½j)^3 =$
$= \frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{9}{8}j - \frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}j = j$. Hetgeen dus klopt met onze vorige berekening.

69,2. De stelling van De Moivre.*[10]

Uit het vorige behandelde vonden we de stelling:

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\,\varphi + j\sin n\,\varphi.$$

Deze stelling is bekend als de stelling van De Moivre. Met deze stelling zullen we enige voorbeelden maken.
Voorbeeld 1: Stel in de stelling van De Moivre dat $n = 2$. We vinden dan:
$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + j\sin 2\varphi$. Uitwerken van het linkerlid geeft de gelijkheid:
$cos^2\varphi - sin^2\varphi + 2j\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + j\sin 2\varphi$. Stellen we nu de reële delen aan elkaar gelijk, evenals de imaginaire delen dan vinden we: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ en $\cos 2\varphi = cos^2\varphi - sin^2\varphi$.
Deze formules hebben we in de goniometrie reeds leren kennen bij de dubbele hoekformules.

In de techniek komen bv. vormen voor als $sin^3\omega t$ en $cos^3\omega t$ die dan uitgewerkt dienen te worden, zodanig dat deze vormen zonder machten geschreven kunnen worden. Dit is goniometrisch veel werk. We zullen dit nu eens uitwerken met behulp van de stelling van De Moivre, waarin we dan $n = 3$ stellen. We vinden dan:
$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + j\sin 3\varphi$. Uitwerken van het linkerlid volgens de formule: $(a + b)^3$ geeft $cos^3\varphi + 3jcos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi sin^2\varphi - jsin^3\varphi = \cos 3\varphi + j\sin 3\varphi$.
Stellen we de reële delen links en rechts aan elkaar gelijk dan vinden we:
$cos^3\varphi - 3\cos\varphi sin^2\varphi = \cos 3\varphi$. We weten dan $sin^2\varphi = 1 - cos^2\varphi$. Dit ingevuld geeft:
$cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1 - cos^2\varphi) = \cos 3\varphi$ of $4cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos 3\varphi$.
Hieruit volgt: $cos^3\varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}$.

*[10] Deze stelling is van belang, omdat zij een verbinding legt tussen de complexe getallen en de goniometrie.
De stelling is geformuleerd door de Franse wiskundige Abraham de Moivre. (bron: Wikipedia) FV.

Stellen we de imaginaire delen aan elkaar gelijk, dan krijgen we:

$3\cos\varphi^2\sin\varphi - sin^3\varphi = \sin 3\varphi$. Nu is $cos^2\varphi = 1 - sin^2\varphi$. Dit ingevuld geeft: $3\sin\varphi - 3sin^3\varphi - sin^3\varphi = \sin 3\varphi$ of $4sin^3\varphi = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$.

Hieruit vinden we: $sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$. We hebben hier dus $cos^3\varphi$ en $sin^3\varphi$ uitgedrukt in goniometrische vormen van de eerste graad.

Uit de eerste vorm volgt ook bv. $\cos 3\varphi = 4cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ en uit de tweede vorm: $\sin 3\,\varphi = 3\sin\varphi - 4sin^3\varphi$. Hiermee hebben we dus $\cos 3\varphi$ en $\sin 3\varphi$ uitgedrukt in enkelvoudige hoeken. In de volgende les zullen we met de stelling van De Moivre nog enige toepassingen behandelen. Deze zullen we nu nog besluiten met enige complexe algebraïsche vormen als voorbeelden uit te werken.

<u>Voorbeeld 1:</u> Los x op uit de vergelijking: $(2j-5)x - 3 = (7j-3)x - 7j$.

<u>Oplossing:</u> Breng al de termen met x naar links en de bekende termen naar rechts. We krijgen dan:

$(-5j-2)x = 3 - 7j \; of \; x = -\dfrac{3-7j}{2+5j} =$

$= -\frac{6-15j-14j-35}{4+25} = \frac{29+29j}{29} = \mathbf{1} + \boldsymbol{j}.$

<u>Voorbeeld 2:</u> Bepaal $\sqrt{15-2j}$.

<u>Oplossing:</u> Stel de vorm gelijk aan $x - jy$ dus: $\sqrt{15-2j} = x - jy$.
Kwadratering levert op: $15 - 2j = x^2 - y^2 - 2jxy$. Scheiding van de reële en imaginaire delen geeft de vergelijking:

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 - y^2 = 5 & (x^2-y^2) - 25 & x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = \;\; 25 \\ 2xy = 12 & 4x^2y^2 = 144 & \underline{\quad 4x^2y^2 \qquad = 144} \\ & & x^4 + \; 2x^2y^2 + y^4 = 169 \end{array}$$

of $(x^2-y^2) = 169$; dus $x^2 + y^2 = 13$. We hebben dus nu de vergelijkingen:
$x^2 - y^2 = 5$ en $x^2 + y^2 = 13$. Hieruit volgt: $x^2 = 9$ en $y^2 = 4$ dus:
$x = \pm 3$ en $y = \pm 2$.

We hadden echter ook de vorm $2xy = 12$ of $xy = 6$ gevonden. Hiermee rekening houdende, vinden we als oplossing: $\sqrt{5-12j} = \mathbf{3 - 2}\boldsymbol{j}$ **of** $\mathbf{-3 + 2}\boldsymbol{j}$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 646 t/m 651.

HILVERSUM

70,1. Toepassingen van de stelling van De Moivre.

Uit de vergelijking $x^3 = 1$ bijv. dienen we voor x drie oplossingen, of zoals we zeggen drie wortels te vinden. We kunnen de vergelijking schrijven als:

$x^3 - 1 = 0$ of $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Hieruit volgt:

$x - 1 = 0\ dus{:}\ x = 1\ of\ x^2 + x + 1 = 0$. Hieruit volgt: $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$.

We vinden dus een reële wortel en twee complexe wortels. (de twee wortels zijn toegevoegd complex bij dit voorbeeld).
Algemeen dienen we op de volgende belangrijke regel te letten:

De graad van een vergelijking bepaalt tevens het aantal wortels van de vergelijking, deze kunnen reëel of complex zijn.

Stellen we bijv. de vraag wat is $\sqrt[3]{1}$ dan moeten we ook weer drie wortels vinden. Bij hogere graads-vergelijkingen is het praktisch onmogelijk om op de algebraïsche manier zoals hierboven beschreven de wortels te vinden. Met de stelling van De Moivre echter is dit vrij eenvoudig uitvoerbaar.

Nemen we als voorbeeld $\sqrt[3]{1}$ dan kunnen we dit ook schrijven met behulp van de gebroken exponenten $1^{\frac{1}{3}}$. Hiervoor schrijven we $(\cos\varphi + j\sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$ en bepalen φ zodanig dat $\cos\varphi + j\sin\varphi = 1$ is.
Als $\varphi = 0°$ dan is $\cos 0°$ en $\sin 0° = 0$ dus dit is een oplossing; echter $\varphi = 360°$ en alle veelvouden van $360°$ voldoen ook.

Bij de complexe rekenwijze werken we liever met radialen dan met graden, dus in plaats van $\varphi = 360°$ schrijven we $\varphi = 2\pi$. Om nu aan te geven dat alle veelvouden 2π voldoen, schrijven we $\varphi = 2\pi K$, hier is Keen geheel getal uit de reeks 0, 1, 2, 3, 4 enz. We noemen dit de rij der natuurlijke getallen. Samenvattend kunnen we dus schrijven:

$\sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}} = (\cos 2\pi K + j\sin 2\pi K)^{\frac{1}{3}}$. De stelling van De Moivre toegepast geeft:

$(\cos 2\pi K + j\sin 2\pi K)^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2}{3}\pi K + j\sin\frac{2}{3}\pi K$.

De derdemachtswortel moet drie oplossingen geven, deze zijn:

1e. $K = 0 \rightarrow \cos 0° + j\sin 0 = 1$.

2e. $K = 1 \rightarrow \cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi = \cos 120° + j\sin 120° =$
$= -\cos 60° + j\sin 60° = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3}$.

3e. $K = 2 \rightarrow \cos\frac{4}{3}\pi + j\sin\frac{4}{3}\pi = \cos 240° + j\sin 240° =$
$= -\cos 60° - j\sin 60° = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2j}\sqrt{3}$.

Opmerking: Om de drie wortels te vinden mag men voor K drie willekeurige waarden nemen, mits de drie getallen opeenvolgend zijn. Neemt men $K = 4$, dan vindt men de eerste oplossing voor $K = 5$, de tweede etc.

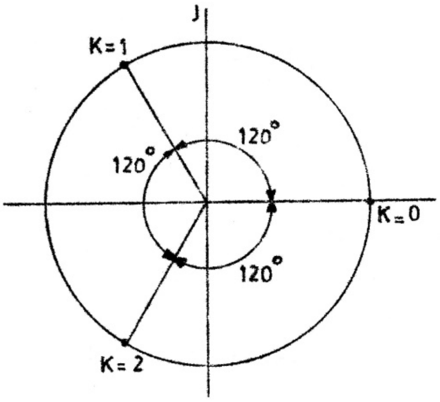

Fig. 70,1.

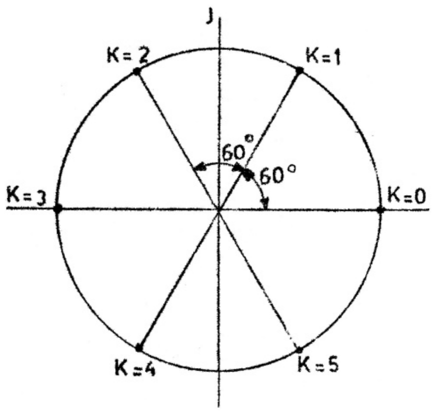

Fig. 70,2.

Tekenen we de drie gevonden wortels in het complexe vlak, dan zijn die beeldpunten het eenvoudigste weer te geven door middel van modulus en argument. De modulus in het voorbeeld is 1. De argumenten respectievelijk 0, $\frac{2}{3}\pi$ en $\frac{4}{3}\pi$.

Eenvoudig is in te zien, dat indien we één wortel gevonden hebben, de anderen direct getekend kunnen worden. Immers de volgende modulus ligt steeds eenzelfde aantal radialen verder. Nemen we nu als voorbeeld: $\sqrt[3]{8}$ dan schrijven we dit als $2\sqrt[3]{1}$.

De modulus van iedere wortel is dan 2, terwijl de $\sqrt[3]{1}$ de drie oplossingen bepaalt zoals in deze les beschreven is. We doen dit nu met ieder willekeurig getal. Zo is bijvoorbeeld: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}- . \sqrt[3]{1}$.

$\sqrt[3]{2}$ is de modulus. De waarde hiervan kunnen we bijv. bepalen met behulp van een logaritmentafel in zoveel decimalen als nodig is. $\sqrt[3]{1}$ bepaalt verder de drie oplossingen.

Voorbeeld: Bepaal de wortels uit de vergelijkking $x^6 = 64$.

Oplossing: $x^6 = 64$ is te schrijven als:

$x = \sqrt[6]{2^6} = 2\sqrt[6]{1} =$

$= 2(\cos 2\pi K + j \sin 2\pi K)^{\frac{1}{6}} =$

$= 2\left(\cos\frac{2}{6}\pi K + j\sin\frac{2}{6}\pi K\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi K + j\sin\frac{1}{3}\pi K\right)$. De wortels worden bepaald door $K = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ en\ 5$.

$K = 0 \rightarrow 2(\cos 0 + j\sin 0) = 2$

$K = 1 \rightarrow 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + j\sin\frac{1}{3}\pi\right) = 1 + j\sqrt{3}.$

$K = 2 \rightarrow 2\left(\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right) = -1 + j\sqrt{3}.$

$K = 3 \rightarrow 2(\cos\pi + j\sin\pi) = -1.$

$K = 4 \rightarrow 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + j\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -1 - j\sqrt{3}.$

$K = 5 \rightarrow 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + j\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 1 - j\sqrt{3}.$

In figuur 70,2 zijn de 6 beeldpunten getekend. De cirkel heeft als straal de lengte 2, dus de modulus. We merken nog op dat indien we de 6 beeldpunten zouden verbinden, we als figuur een regelmatige zeshoek vinden. Verbinden we de beeldpunten opeenvolgend met elkaar, dan vinden we altijd een regelmatige veelhoek. Het aantal hoekpunten wordt bepaald door het aantal wortels dat we vinden.

Oplossingen inzenden van de opgaven 652 t/m 654.

71,1. Toepassingen van de stelling van De Moivre (vervolg).

Voorbeeld: Wat is de $\sqrt[4]{-1}$?

Oplossing: $\sqrt[4]{-1} = (-1)^{\frac{1}{4}} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)^{\frac{1}{4}}$.

Welke hoek moet φ zijn opdat $\cos\varphi + j\sin\varphi = 1$? Dit geldt voor $\varphi = \pi$ of $\varphi = \pi + 2\pi,$ of $\varphi + 3\pi$ etc. Algemeen dus voor $\varphi = \pi + 2\pi K$.

We vinden dus: $(1 -)^{\frac{1}{4}} = [\cos(\pi + 2\pi K) + j\sin(\pi + 2\pi K)]^{\frac{1}{4}} = \cos\frac{\pi + 2\pi K}{4} + j\sin\frac{\pi + 2\pi K}{4}$ voor: $K = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$K = 0 \rightarrow \cos\frac{1}{4}\pi + j\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$K = 1 \rightarrow \cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$K = 2 \rightarrow \cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$K = 3 \rightarrow \cos\frac{7}{4}\pi + j\sin\frac{7}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Verschilt het getal waaruit we de n_{de} machtswortel moeten trekken van -1 dan is dit getal weer te herleiden tot een getal $\times$ n_{de} machtswortel uit -1, bijv:

$\sqrt[6]{-5} = \sqrt[6]{5}\,.\,\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{5(-1)^{\frac{1}{6}}} = \sqrt[6]{5}[\cos(\pi + 2\pi K) + j\sin(\pi + 2\pi K)]^{\frac{1}{6}} =$

$= \sqrt[6]{5}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi K}{6} + j\sin\frac{\pi + 2\pi K}{6}\right)$. De modulus $\sqrt[6]{5}$ wordt weer bepaald met behulp van een logaritmentafel. Iedere vorm is nu te herleiden tot een modulus vermenigvuldigd met een der volgende grondvormen, nl. $1, -1,\ j$ of $-j$. De herleiding wordt resp. voor:

$$1 = \cos 2\pi K + j\sin\left(\frac{\pi}{2}K + 2\pi K\right).$$
$$j = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi K\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi K\right).$$
$$-1 = \cos(\pi + 2\pi K) + j\sin(\pi + 2\pi K).$$
$$-j = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi K\right) + j\sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi K\right).$$

Voorbeeld: Bepaal de twee complexe wortels uit $\sqrt{j}$.

Oplossing: $\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi K\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi K\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi K\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi K\right)$ voor $K = 0$ en $K = 1$.

$K = 0 \rightarrow \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + j)$ en $K = 1 \rightarrow \cos 1\frac{1}{4}\pi + j\sin 1\frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + j)$.

Dat de wortels gelijk doch tegengesteld zijn, is logisch, daar immers de tweedemachtswortel uit een getal gelijke doch tegengestelde wortels geeft.

We zullen de uitkomst controleren aangezien de uitkomst in het kwadraat het getal j weer moet opleveren.

Dus: $\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + j)\right]^2 = \frac{1}{2}(1 + j)^2 = \frac{1}{2}(1 + 2j - 1) = j.$

Voorbeeld: Bepaal $\sqrt[3]{-64j}$ en teken de wortels in het complexe vlak.

Oplossing: $\sqrt[3]{-64j} = 4\sqrt[3]{-j} = 4(-j)^{\frac{1}{3}} = 4\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi K\right) + j\sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi K\right)\right]^{\frac{1}{3}} =$

$= \left[\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi K}{3} + j\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi K}{3}\right]$

voor: $K = 0,\ 1,\ 2.$

$k = 0 \rightarrow 4\left(\cos\frac{1}{2}\pi + j\sin\frac{1}{2}\pi\right) = 4j$

$K = 1 \rightarrow 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + j\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 4(\cos 210° + j\sin 210°) = -2\sqrt{3} - 2j$

$K = 2 \rightarrow 4\left(\cos\frac{11}{6}\pi + j\sin\frac{11}{6}\pi\right) = 4\big(\cos 330° + j\sin 330° = 2\sqrt{3} - 2j\big)$

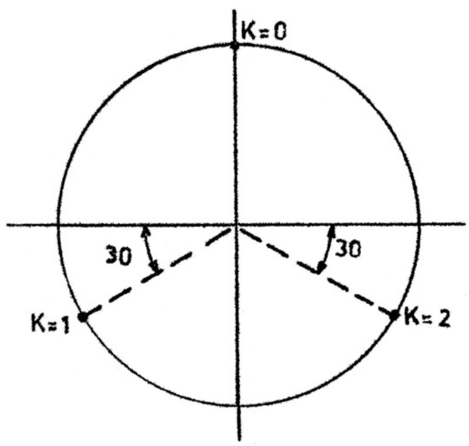

Fig.71,1.

In fig. 71,1 zijn de drie beeldpunten getekend. De straal van de cirkel om de plaats van de beeldpunten te bepalen= 4.
Voor controle rekenen we nog uit:
$\left(2\sqrt{3} - 2j\right)^3 = 2^3\left(\sqrt{3} - j\right)^3 = 8\left(\sqrt{3} - j\right)^3 =$
$8\left(3\sqrt{3} - 9j - 3\sqrt{3} + j\right) = 8 \times -8j = -64j.$

We kunnen de stelling van De Moivre ook toepassen op samengestelde wortelvormen.
Als voorbeeld zullen we behandelen:
$\sqrt{5 - 12j}$. De modulus van dit complexe getal is $\sqrt{13}$ en $\tan\varphi = -\frac{12}{5}$ waarbij φ in het vierde kwadrant ligt, daar het imaginaire deel negatief is en het reële deel positief.
Uit $\tan\varphi = -2{,}4$ vinden we uit de tafel $\varphi = 292°37'12"$. De wortels worden dan:

$\sqrt{13}\left[\frac{\cos 292°\,37'12" + 2\pi K}{2} + j\sin\frac{292°\,37'12" + 2\pi K}{2}\right]$ voor $K = 0$ en $K = 1$.

$K = 0 \rightarrow \sqrt{13}(\cos 146°18'36" + j\sin 146°18'36")$
$K = 1 \rightarrow \sqrt{13}(\cos 326°18'36" + j\sin 326°18'36")$

Stel $\sqrt{13}\cos 146°18'36" = a$ en $\sqrt{13}\sin 146°18'36" = b$ of na omwerking:
$\sqrt{13}\cos 33°41'24" = -a = x$ en $\sqrt{13}\sin 33°41'24" = b$.

Met behulp van logaritmen vinden we:

$\log x = \frac{1}{2}\log 13 + \log\cos 33°41'24" = 0{,}55697 + (9{,}92015 - 10) = 0{,}47712.$
Hieruit volgt $x = 3$. Dus: $a = -3$.

$\log b = \frac{1}{2}\log 13 + \log\sin 33°41'24" = 0{,}55697 + (9{,}74406 - 10) = 0{,}30103.$
Hieruit volgt $b = 2$. De wortel wordt dus: $-3 + 2j$.
De tweede wortel is hiervan het tegengestelde dus: $3 - 2j$.

Men kan deze uitkomst controleren door $\sqrt{5 - 12j} = x - jy$ te stellen en op te lossen.
Zie les 69 voorbeeld 2.

Voor tweedegraadswortels zal dus de laatste methode de voorkeur verdienen daar zij eenvoudiger en sneller is, doch voor hogeregraadswortels moeten we werken met de stelling van De Moivre.

Oplossingen inzenden van de opgaven 655 t/m 658.

HILVERSUM

72,1. Toepassing van de complexe rekenwijze in de techniek. Tijdfuncties.

We hebben reeds kennis gemaakt met de complexe getallen in de techniek voor het vereenvoudigd schrijven en rekenen met impedanties en admittanties. Een ander toepassingsgebied vinden we in de zg. tijdfuncties.

Een spanning die over een netwerk staat, of een stroom die aan een netwerk wordt toegevoerd is praktisch altijd sinusvormig of cosinusvormig. De voorstelling ervan wordt dus gegeven in de vorm van: $u = \hat{u} \sin \omega t$, resp. $i = \hat{\imath} \sin \omega t$.

Het is natuurlijk ook mogelijk dat die spanningen en stromen reeds een faseverschuiving bezitten, dan ontstaat de vorm: $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$ resp. $i = \hat{\imath} \sin(\omega t + \varphi)$.
We noemen de waarden u en i de momentele waarden van de spanning en de stroom, immers het zijn van de tijd afhankelijke grootheden, vandaar de uitdrukking, de stroom of spanning als functie van de tijd of korter als tijdfunctie.

t bepaalt dus op ieder moment door de goniometrische verhouding, welk deel we van de maximale waarde van de amplitude moeten nemen om de waarde op dat moment, dus de momentele waarde, te vinden.

Gewoonlijk zijn de stromen en spanningen, waar ook in een circuit gemeten, functies van de tijd. We willen nu dus die stromen en spanningen waar ook in het circuit als tijdfunctie gaan berekenen en maken hierbij gebruik van de complexe rekenwijze zoals we die in de voorgaande lessen hebben behandeld.

We merken hierbij nog op dat we alleen nut hebben van de productregel en de quotiëntregel. Beschouwen we nu een eenvoudig voorbeeld nl. een weerstand en een spoel in serie, waarop is aangesloten een spanning die gegeven is als:

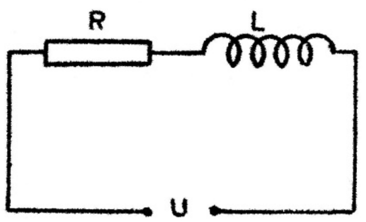

Fig. 72,1.

$u = \hat{u} \cos \omega t.$
Gevraagd wordt de stroom door dit circuit als functie van de tijd te bepalen.
Opmerking: $f(t)$ is de verkorte schrijfwijze van de uitdrukking 'functie van de tijd'.
We schrijven nu de stroom door het circuit op met behulp van de Wet van Ohm, echter plaatsen we op de stroom i, de spanning u en de impedantie Z streepjes als volgt:

$$\bar{\imath} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

We stellen dus de stroom en de spanning voor als complexe grootheden. Aangezien een stroom of spanning niet complex kan zijn, doch een reële grootheid is, wijzen we er uitdrukkelijk op dat we wiskundige grootheden uitdrukken en als het ware geen techniek doen.
We mogen $\bar{\imath}$ en $\bar{u}$ dus nooit zien als een stroom of een spanning, doch als een complexe grootheid evenals $\bar{Z}$, de complexe impedantie.

In de uitdrukking (1) kunnen we nu voor $\bar{Z}$ schrijven:

$\bar{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ waarbij $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$.
Voor het complexe getal $\bar{u}$ kunnen we schrijven:

$\bar{u} = \hat{u}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$

Immers ωt is uitgedrukt in rad/sec. sec = rad dus is eveneens een hoek, evenals φ.
We schrijven echter ωt om de gegevens van het vraagstuk zoveel als mogelijk is te benaderen.
Voor (1) vinden we dus:

$$\bar{\imath} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} = \frac{\hat{u}\,(\cos\omega t + j\sin\omega t)}{(\cos\varphi + j\sin\varphi)} \quad \left(\text{waarbij } Z = \sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\right)$$

Met behulp van de complexe rekenwijze schrijven we hiervoor:

$$\hat{\imath} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\,[\cos(\omega t - \varphi) + j\sin(\omega t - \varphi)].$$

Voor de complexe î kunnen we schrijven: $\hat{\imath} = i + j\,i_2$ zodat we vinden:

$$\hat{\imath} = i + j\,i_2 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\,[\cos(\omega t - \varphi) + j\sin(\omega t - \varphi)].$$

Stellen we hiervan de reële delen en de imaginaire delen aan elkaar gelijk dan vinden we:

$$i_1 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\;\cos(\omega t - \varphi) \;\text{ en } i_2 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\;\sin(\omega t - \varphi).$$

We vinden dus twee stromen waarvan er echter maar een de gevraagde stroom kan zijn.
Welke van de twee stromen de juiste is, kunnen we aflezen uit het gegeven.
Daar de spanning gegeven is als $u = \hat{u}\cos\omega t$ kiezen we voor de stroom de uitdrukking die als cosinusvorm is gevonden.

De gevraagde stroom is dus: $\hat{\imath} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\;\cos(\omega t - \varphi)$.

Was de aangelegde spanning gegeven als $u = \hat{u}\sin\omega t$ dan was de afleiding op dezelfde manier gegaan.

De gevonden spanning was dan: $\hat{\imath} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\;\sin(\omega t - \varphi)$.

We kunnen ons dit voorstellen indien we bedenken dat reële en imaginaire grootheden nimmer bijeen te voegen zijn. We hebben de spanning $u = \hat{u}\cos\omega t$ geschreven als: $u = \hat{u}(\cos\omega t + j\sin\omega t) =$ $= \hat{u}\cos\omega t + j\,\hat{u}\sin\omega t$. We hebben er dus een imaginaire grootheid bij opgeteld. Aan het einde van de berekening halen we het imaginaire gedeelte er weer af. Was de spanning gegeven als $u = \hat{u}\sin\omega t$ dan zouden we eveneens schrijven $\bar{u} = \hat{u}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$. In de uitkomst laten we dan het reële deel weg (tevens de factor j natuurlijk). Met deze wetenschap kunnen we nu de complexe rekenwijze in de techniek verkort toepassen, hetgeen we aan de hand van hetzelfde voorbeeld laten zien.
Dus gegeven de spanning $u = \hat{u}\cos\omega t$.

We vinden: $\bar{\imath} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{u}}{R + j\omega L}$. De momentele waarde van de stroom die gevraagd wordt is:

$$i = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t - \varphi) \text{ waarbij } \tan\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

<u>Opmerking:</u> Vergeet nooit bij het invoeren van hoeken φ te vermelden waardoor hij gegeven is, gebruik hiervoor altijd de uitdrukking $\tan\varphi$.

Wij weten uit ervaring dat deze materie bij cursisten zeer langzaam aanslaat. We zullen dan ook in de komende lessen een groot aantal voorbeelden behandelen.

Oplossingen inzenden van de opgaven 659 t/m 662.

73,1. Vervolg tijdfuncties.

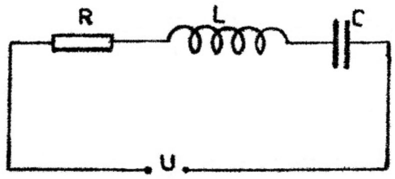

Fig. 73,1.

Gegeven: $R,\ L\ en\ C.\quad u = \hat{u}\cos\omega t.$

Bepaal de spanning over de spoel u_L als $f(t)$.
(fig. 73,1).

Met behulp van de Wet van Ohm kunnen we schrijven met complexe grootheden:
$\bar{u}_L = \hat{\imath}\,.\,j\omega L$ (denk eraan, we werken complex dus $j\omega L$ en niet ωL, immers de amplitude blijft wel hetzelfde, doch de fase niet).

Verder is $\bar{\imath} = \frac{\bar{u}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{u}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$, zodat we vinden:

$\bar{u}_L = \frac{\bar{u}\ j\omega L}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$. Hiervoor kunnen we schrijven:

$$\bar{u}_L = \frac{\hat{u}\ \omega L}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\ \left\{\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+j\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right\}$$

waarbij $\tan\varphi = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$. De faseverschuiving $\frac{\pi}{2}$ ontstaat uit de uitdrukking $j\omega L$ die te schrijven is als:

$$\omega L\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}\right) = \omega L(0+1j) = \omega L.$$

We maken dus gebruik van de regels:

1. Bij het vermenigvuldigen van twee complexe getallen vinden we als uitkomst een complex getal waarvan de modulus gelijk is aan het product der moduli en het argument gelijk is aan de som der argumenten der oorspronkelijke complexe getallen.
2. Bij het delen van twee complexe getallen vinden we als uitkomst een nieuw complex getal waarvan de modulus gelijk is aan het quotiënt der moduli en het argument gelijk is aan het verschil der argumenten der oorspronkelijke complexe getallen.

Uit de gevonden uitdrukking van $\bar{u}_L$ nemen we nu door het gegeven: $u = \hat{u}\cos\omega t$ het reële deel zodat de werkelijke gevraagde spanning u_L als $f(t)$ is:

$$u_L = \frac{\hat{u}\omega L}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\ \cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\text{met}\tan\varphi = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\ .$$

Met behulp van de goniometrie kunnen we de uitdrukking $\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ nog omwerken.
Immers $\cos(90°+\alpha) = -\cos(90°-\alpha) = -\sin\alpha$, zodat we voor U_L ook kunnen schrijven:

$$u_L = -\frac{\hat{u}\omega L}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\ \sin(\omega t-\varphi)$$

We zullen nu ditzelfde voorbeeld verkort uitwerken, zoals uiteindelijk de bedoeling is. Dus:

$$\bar{u}_L = \bar{\imath}\,j\omega L = \frac{\bar{u}}{Z}\ j\omega L = \frac{j\ \omega L\ \bar{u}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\ .$$

De momentele waarde van de gevraagde spanning wordt dus:

$$u_L = \frac{\hat{u}\omega L}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{-\hat{u}\omega L}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

waarbij $\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.
we zien dat we de amplitude van de stroom of spanning met het geleerde uit de complexe rekenwijze direct op kunnen schrijven evenals de faseverschuiving, met inachtneming of het gegeven een cosinus- of sinusfunctie is.

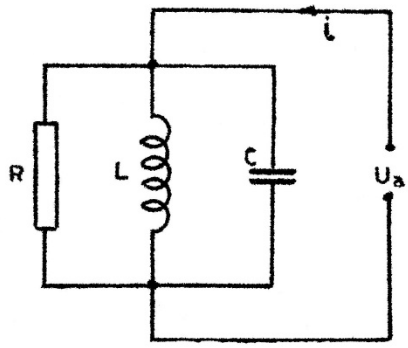

Fig.73,2.

Voorbeeld: Gegeven $R,\ L$ en C.
$i = \hat{\imath}\sin\omega t$. (fig.73,2)
Gevraagd: $i_R,\ i_L,\ i_C$ en U_a als $f(t)$.
Oplossing: Voor U_a kunnen we schrijven met behulp van de complexe rekenwijze:
$\bar{U}_a = \bar{\imath}\,.\,\bar{Z}$ of met invoeren van admittanties

$$\bar{U}_a = \frac{\bar{\imath}}{Y} = \frac{\bar{\imath}}{\frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L}} = \frac{\bar{\imath}}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

zodat: $\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$

waarbij $\tan\varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

De stroom i_R is in fase met deze spanning zodat:

$$i_R = \frac{U_a}{R} = \frac{\hat{\imath}}{R\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{1+R^2\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Voor i_L kunnen we schrijven:

$\bar{\imath}_L = \frac{U_a}{j\omega L} = \frac{\hat{\imath}}{j\omega L\left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]}$. Hieruit volgt voor de momentele waarde van i_L:

$$i_L = \frac{\hat{\imath}}{\omega L\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ waarbij } \tan\varphi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

We kunnen i_L met behulp van de goniometrie nog vereenvoudigen, immers:
$\sin(\alpha - 90) = -\sin(90 - \alpha) = -\cos\alpha$, zodat we vinden:

$i_L = -\frac{\hat{\imath}}{\omega L\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi)$. Voor i_C vinden we:

$\bar{\imath}_C = \frac{\bar{U}_a}{\frac{1}{j\omega C}} = \bar{U}_a\, j\omega C = \frac{\bar{\imath}}{\frac{1}{R}+j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$, dus: $i_C = \frac{\hat{\imath}\,\omega C}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

Waarbij weer $\tan\varphi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$, daar:
$\sin(90 + \alpha) = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$ kunnen we schrijven:

$$i_C = \frac{\hat{\imath}\,\omega C}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Oplossingen inzenden van de opgaven 663 t/m 666.

74,1. Vervolg tijdfuncties.

We zullen in deze les enige meer samengestelde voorbeelden behandelen.

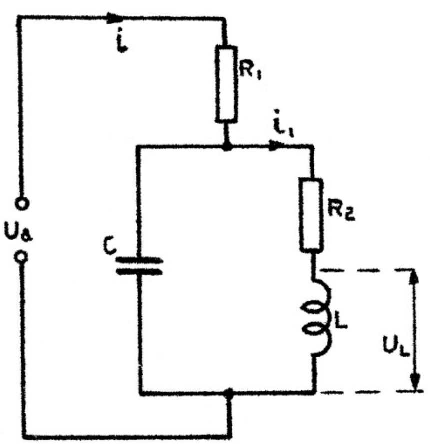

Fig.74,1.

Gegeven: $R_1,\ R_2,$ en C; $U_a = \hat{u}\sin\omega t$. (fig.74,1).
Gevraagd: Bepaal U_L als $f(t)$.
Oplossing: Met behulp van de Wet van Ohm kunnen we schrijven: $\bar{U}_a = \bar{\imath}\,.\,\bar{Z}_t$. Hier is $\bar{Z}_t$ de complexe impedantie van de totale schakeling. Voor $\bar{\imath}$ kunnen we schrijven: $\bar{\imath} = \frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_p}$, waarbij $\bar{Z}_p$ de impedantie van de parallelschakeling is; dit ingevuld in $\bar{U}_a$ geeft:
$\bar{U}_a = \bar{\imath}\,.\,\bar{Z}_t = \frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_p}\,.\,\bar{Z}_t$.
Verder is $\bar{U}_p = \bar{\imath}_1.\bar{Z}_s$; $\bar{Z}_s$ is de impedantie van de serietak van R_2 en L, zodat: $\bar{U}_a = \bar{\imath}\,.\,\bar{Z}_t = \frac{\bar{U}_p\,.\bar{Z}_t}{\bar{Z}_p} = \frac{\bar{\imath}_1.\,\bar{Z}_s\,.\,\bar{Z}_t}{\bar{Z}_p}$. Verder is $\bar{U}_L = \bar{\imath}_1.j\omega L$ of: $\bar{\imath}_1 = \frac{\bar{U}_L}{j\omega L}$.
Uiteindelijk vinden we dus: $\bar{U}_a = \frac{\bar{U}_L\,.\,\bar{Z}_s\,.\,\bar{Z}_t}{j\omega L\,.\bar{Z}_p}$ of:

$$\bar{U}_L = \frac{j\omega L\,\bar{Z}_p\ \ \bar{U}_a}{\bar{Z}_s\,.\,\bar{Z}_t} = \frac{j\omega\,L\,\bar{U}_a}{\bar{Z}_s\,\bar{Y}_p\,\bar{Z}_t}.$$

In het vervolg zullen we deze bewerkingen direct achter elkaar opschrijven.
We zijn van de gegeven spanning uitgegaan en hebben naar de gevraagde spanning U_L toegewerkt. We kunnen echter ook van U_L uitgaan en naar het gegeven toewerken, doorgaans is dit eenvoudiger, als volgt:

$$\bar{U}_L = \bar{\imath}_1\,j\omega L = \frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_s}\,.j\omega L = \frac{\bar{\imath}\,.\bar{Z}_p\,.j\omega L}{\bar{Z}_s} = \frac{\bar{U}_a\,\bar{Z}_p\,j\omega L}{\bar{Z}_s\,.\bar{Z}_t} = \frac{j\omega L\,\bar{U}_a}{\bar{Z}_s\,.\,\bar{Y}_p\,.\,\bar{Z}_t}.$$

Voor Z_t kunnen we schrijven: $\bar{Z}_t = R_1 + \bar{Z}_p = R_1 + \frac{1}{\bar{Y}_p}$ dus:

$$\bar{U}_L = \frac{j\omega L\,\bar{U}_a}{\bar{Z}_s\,\bar{Y}_p\left(R_1+\frac{1}{\bar{Y}_p}\right)} = \frac{j\omega L\,\bar{U}_a}{\bar{Z}_s\,(R_1\,\bar{Y}_p+1)} = \frac{j\omega L\,\bar{U}_a}{(R_2+j\omega L)\left(j\omega C R_1+\frac{R_1}{R_2+j\omega L}+1\right)} =$$

$$= \frac{j\omega L\,\bar{U}_a}{(R_1+R_2-\omega^2 LCR_1)+j(\omega L+\omega CR_1R_2)}.$$ Voor de momentele waarde van U_L vinden we dan:

$$U_L = \frac{\omega L\,\hat{U}_a}{\sqrt{(R_1+R_2-\omega^2 LCR_1)^2+(\omega L+\omega CR_1R_2)^2}}\ \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$ waarbij:

$$\tan\varphi = \frac{\omega L+\omega CR_1R_2}{R_1+R_2-\omega^2 LCR_1}.$$

Opmerking: De fasehoek $\frac{\pi}{2}$ ontstaat dus uit de factor $j\omega L$.

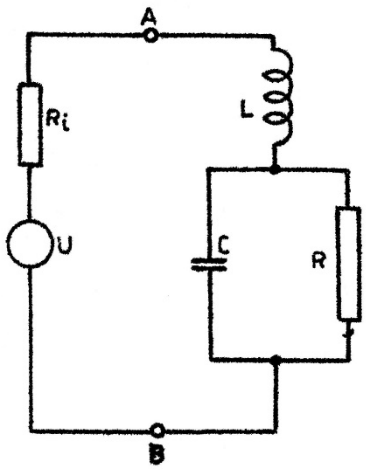

Fig. 74,2.

Voorbeeld:
Gegeven: $R_i,\ R\ en\ \omega$. (fig.74,2).
Gevraagd: Bepaal $L\ en\ C$ zodanig dat het door R opgenomen vermogen maximaal is.
Oplossing: Voor het vermogen hebben we geleerd de uitdrukking $P = I\ U\ \cos\varphi$.
Indien dit vermogen maximaal moet zijn, moet $\cos\varphi$ zo groot mogelijk dus gelijk aan 1 zijn, dus $\varphi = 0$.
Bedenken we dat:

$$\tan\varphi = \frac{imaginaire\ deel\ van\ de\ impedantie}{reële\ deel\ van\ de\ impedantie}$$

Dan volgt hieruit daar $\tan 0 = 0$ dat het imaginaire deel van de complexe impedantie gelijk aan nul moet zijn. .

We moeten erop letten dat R_i niet in de complexe impedantie betrokken dient te worden. We bekijken dus de impedantie tussen de punten A en B. Deze impedantie is dus bij maximaal vermogen reëel.
De tweede voorwaarde is nu dat deze reële impedantie gelijk moet zijn aan R_i.
We vinden dus:

$$\bar{Z}_{AB} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR} = j\omega L + \frac{R(1-j\omega CR)}{1+\omega^2C^2R^2} = \frac{R}{1+\omega^2C^2R^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1-\omega^2C^2R^2}\right)$$

1^e^ voorwaarde: $\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+j\omega^2C^2R^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (1)

2^e^ voorwaarde: $\frac{R}{1+j\omega^2C^2R^2} = R_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)

Uit deze vergelijkingen zijn L en C op te lossen als volgt

Uit (1) $L = \frac{CR^2}{1+j\omega^2C^2R^2}$ of $\frac{L}{CR} = \frac{R}{1+\omega^2C^2R^2} = R_i$ dus: $L = C\ R\ R_i$.

Uit (2) volgt: $R = R_i + \omega^2C^2R^2R_i$ of $\omega^2C^2R^2R_i = R - R_i$ dus: $C = \frac{R-R_i}{\sqrt{\omega^2R^2R_i}}$

dus: $L = C\ R\ R_i = \frac{R\,R_i}{\omega R}\sqrt{\frac{R-R_i}{R_i}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{R_i(R-R_i)}$.

Opmerking: Indien de inwendige weerstand van de generator niet alleen uit een ohmse weerstand bestaat, doch tevens zelfinducties en capaciteiten bevat, dan is de voorwaarde dat de uitwendige impedantie maximaal vermogen moet opnemen te realiseren uit de volgende twee voorwaarden.

1^e^. Het imaginaire deel van de inwendige impedantie moet gelijk zijn aan het imaginaire deel van de uitwendige impedantie.

2^e^. Het reële deel van de inwendige impedantie moet gelijk zijn aan het reële deel van de uitwendige impedantie.

De tweede van deze voorwaarden kunnen we niet bewijzen, daar we hiervoor hogere wiskunde nodig hebben. In de theoretische elektriciteitsleer is het echter aangetoond met een voorbeeld dat alleen over weerstanden handelt. (zie Th.E. les 10 bladzijde 20).

Oplossingen inzenden van de opgaven 667 t/m 670.

75,1. Uitgewerkte voorbeelden.

We zullen nu nog enige voorbeelden uitwerken van technische vraagstukken waar bijzondere voorwaarden aan gesteld worden.

1. Een condensator van $\frac{1}{3}\ \mu F$ en een weerstand van $10^4 \Omega$ zijn parallel aangesloten op een wisselstroombron die een sinusvormige wisselspanning met een cirkelfrequentie $\omega = 300\ rad/sec$ geeft. Bereken de grootte van de capaciteit en de weerstand die in serie geschakeld de eerstgenoemde combinatie bij deze frequentie kan vervangen.

(Examen Radiotechnicus N.R.G. 1938)

Oplossing: De parallel geschakelde weerstand en capaciteit noemen we resp. R_p en C_p; de in serie geschakelde elementen R_s en C_s. Van de gegeven schakeling is de impedantie:

$$\bar{Z}_p = \frac{R_p}{1+j\omega C_p R_p} = \frac{10^4}{1+j\,300\,.\,\frac{1}{3}.\,10^{-6}.\ 10^4} = \frac{10^4}{1+j} = 5.10^3(1-j).$$

Van de gevraagde schakeling is $\bar{Z}_s = R_s - \frac{j}{\omega C_s}$.

Beide impedanties zijn gelijk als zij dezelfde absolute waarde hebben en dezelfde faseverschuiving, of korter als:
de reële delen zowel als de imaginaire delen aan elkaar gelijk zijn.

Hieruit volgt: $\boldsymbol{R_s = 5.10^3}$ en $\frac{1}{\omega C_s} = 5.10^3$ of $\boldsymbol{C_s = \frac{1}{5.10^3.\ 300} = \frac{2}{3}\ \mu F}$.

Uit bovenstaande voorbeeld blijkt dus dat elke schakeling is om te werken tot een equivalente serieschakeling van een weerstand met een spoel of een weerstand met een condensator.
De gedachtengang is als volgt:
Herleid de gegeven schakeling tot een zuivere complexe uitdrukking. Vindt men een uitdrukking van de vorm $a + jb$ dan kan de schakeling vervangen worden door een weerstand $R = a$ en een spoel met een reactantie $\omega L = b$ in serie.
Vindt men een uitdrukking van de vorm $a - jb$ dan is het een weerstand $R = a$ met een condensator met reactantie $\frac{1}{\omega C} = b$ in serie.

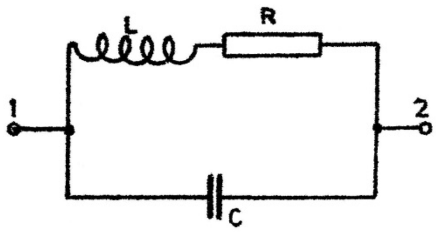

Fig. 75,1.

2. Toon aan dat de absolute waarde van de impedantie tussen de punten 1 en 2 (fig. 75,1) onafhankelijk is van de waarde van R indien voldaan is aan de voorwaarde $\omega^2 LC = \frac{1}{2}$.

(Examen radiotechnicus N.R.G. najaar 1950)

Oplossing:
De admittantie tussen de punten 1 en 2 is:

$$\bar{Y} = j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{1-\omega^2 LC+j\omega CR}{R+j\omega L} \text{ dus: } \bar{Y} = \frac{1-½+j\omega CR}{R+j\omega L} = \frac{1+2j\omega\ CR}{2(R+j\omega L)}.$$

Vervangen we m.b.v. het gegeven ωC door $\frac{1}{2\omega L}$ dan vinden we:

$$\bar{Y} = \frac{1+\frac{jR}{\omega L}}{2(R+j\omega L)} = \frac{\omega L+jR}{2\ \omega L\,(R+j\omega L)}.$$

De absolute waarde van $\bar{Z}$ als $Z = \frac{1}{Y} = 2\omega L\sqrt{\frac{R^2+\omega^2L^2}{R+\omega^2L^2}} = \boldsymbol{2\omega L}$
Dus onafhankelijk van R.

3.

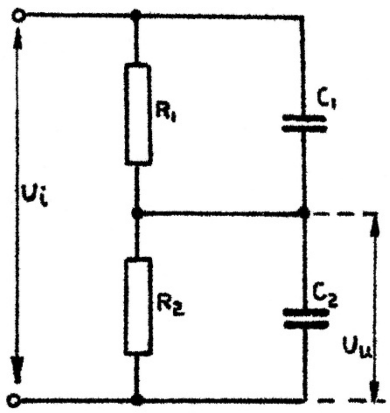

Fig. 75,2.

Leid af onder welke voorwaarde de Spanningsdeling $\frac{U_u}{U_i}$ onafhankelijk van de frequentie is (fig. 75,2).

(Examen Radiotechnicus N.R.G. voorjaar 1953).

Oplossing:
Uit bovenstaand schema volgt:
$\bar{U_i} = \bar{\imath}.\bar{Z_t} = \frac{\bar{U_u}}{\bar{Z_p}}.\bar{Z_t}$. Hieruit volgt:
$\frac{\bar{U_u}}{\bar{U_i}} = \frac{\bar{Z_p}}{\bar{Z_t}}$. Hierin is $\bar{Z_t}$ de totale complexe impedantie van de parallelschakeling waarover de spanning U_u staat.
We vinden dus:

$\frac{\bar{U_u}}{\bar{U_i}} = \frac{\frac{R_2}{1+j\omega\, C_2R_2}}{\frac{R_1}{1+j\omega\, C_1R_1}+\frac{R_2}{1+j\omega C_2R_2}}$. Delen door $\frac{R_2}{1+j\omega\, C_2R_2}$ geeft een eenvoudiger vorm, nl:

$\frac{\bar{U_u}}{\bar{U_i}} = \frac{1}{1+\frac{R_1\,(1+j\omega\, C_2R_2)}{R_2\,(1+j\omega\, C_1R_1)}}$. Hieruit kunnen we onmiddellijk aflezen dat de complexe uitdrukking $\frac{\bar{U_u}}{\bar{U_i}}$ onafhankelijk van de frequentie wordt als $1 + j\omega\, C_2R_2 = 1 + j\omega\, C_1R_1$. Indien dit het geval is, is natuurlijk ook de spanningsverhouding $\frac{U_u}{U_i}$ frequentie-onafhankelijk.

Uit $1 + j\omega\, C_2R_2 = 1 + j\omega\, C_1R_1$ volgt dus als voorwaarde opdat de spanningsdeling $\frac{U_u}{U_i}$ onafhankelijk is van de frequentie $C_1R_1 = C_2R_2$.

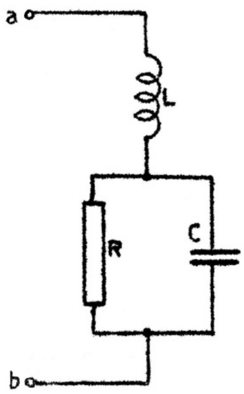

Fig. 75,3.

4. Gegeven: $R = 500\ \Omega;\quad \omega = 10^7$.
Bepaal $L\ en\ C$ zo, dat de impedantie Z_{ab} reëel is en gelijk is aan 100 Ω (fig. 75,3).

Oplossing: Uit de voorwaarde dat de impedantie reëel moet zijn, volgen twee voorwaarden:
1^e^. het imaginaire deel van $\bar{Z} = 0$.
2^e^. het reële deel van $\bar{Z} = 100\ \Omega$.
Nu is: $\bar{Z} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR} = j\omega l + \frac{R(1-j\omega CR)}{1+\omega^2C^2R^2}$ dus:
$\frac{R}{1+\omega^2C^2R^2} = 100\ \ (1)$ en $\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+\omega^2C^2R^2} = 0\ldots(2)$

Uit 1 volgt: $500 = 100(1 + 10^{14}C^2.25.10^4)$ of $10^{14}C^2.25.10^4 = 4$ dus: $C = \frac{2}{5\,.\,10^9}\ F = 400\ pF$.
Uit 2 volgt: $L = \frac{CR^2}{1+\omega^2C^2R^2} = 100\ CR = 10^2.4.10^{-10}.\ 5.10^2 = 20\ \mu H$.

Oplossingen inleveren van de opgaven 671 t/m 673.

76,1. Uitgewerkte examenopgave.

Opgave: Door een schakeling vloeit een wisselstroom $i = 5\cos\omega t\ \ (mA)$.
De spanning op de schakeling bedraagt $u = 20\cos\omega t + 10\sin\omega t\ \ (V)$, waarin $\omega = 300$ rad/sec.
Uit welke twee elementen kan deze schakeling zijn samengesteld?
Bereken ook deze elementen.

(Examen Radiotechnicus N.R.G. najaar 1956)

Oplossing: Uit het gegeven zien we dat de spanning bestaat uit twee componenten nl. de component $u_1 = 20\cos\omega t$ en de component $u_2 = 10\sin\omega t$. We denken dus onmiddellijk aan een serieschakeling van twee elementen.
Daar de stroom gegeven is als: $i = 5.10^{-3}\ \cos\omega t\ \ (A)$ is het element waarover de spanning $u_1 = 20\cos\omega t$ staat een weerstand, immers stroom en spanning zijn in fase. We noemen deze weerstand R_s. Het element waarover de spanning $u_2 = 10\sin\omega t$ staat is een condensator. Immers de spanning is 90° achter op de stroom. We noemen deze condensator C_s.
De grootte van de weerstand vinden we uit de verhouding van de amplitude van spanning en stroom dus:

$R_s = \frac{20}{5.10^{-3}} = 4000\ \Omega$; eveneens C_s uit $\frac{1}{\omega C_s} = \frac{10}{5.10^{-3}} = 2000$ dus:

$$C_s = \frac{1}{2000.\omega} = \frac{1}{2.10^3.3.10^2} = \frac{1}{6.10^5}\ F = \frac{5}{3}\ \mu F.$$

Daar in de opgave staat: “uit welke twee elementen kan deze schakeling zijn opgebouwd”, is het ook mogelijk dat de schakeling uit een parallelschakeling van twee elementen bestaat waarop de gegeven spanning is aangesloten en waaraan de gegeven stroom wordt toegevoerd.

Een van deze elementen moet een weerstand zijn en de andere een spoel of een condensator (door de faseverschuiving). We noemen de weerstand R_p en de reactantie van het andere element A.
De parallelimpedantie wordt dus:

$$\bar{Z}_p = \frac{R_p.jA}{R_p + jA} = \frac{jA.R_p(R_p - jA)}{{R_p}^2 + A^2}.$$

Deze impedantie moet equivalent zijn aan de reeds gevonden serieschakeling, hiervan is:

$$\bar{Z}_s = R_s - \frac{j}{\omega C_s} = 4000 - j2000$$

Voor $\bar{Z}_p$ kunnen we schrijven:

$$\bar{Z}_p = \frac{A^2 R_p}{{R_p}^2 + A^2} + j\ \frac{A{R_p}^2}{{R_p}^2 + A^2}$$

Stellen we de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk dan is:

$$\frac{A^2 R_p}{{R_p}^2 + A^2} = 4000\ \ (1)\ \ en\ \ \frac{A{R_p}^2}{{R_p}^2 + A^2} = -2000.$$

Daar het imaginaire deel negatief is, moet de reactantie A dus een condensator zijn, zodat:

$A = \frac{1}{\omega C_p}$. Hieruit volgt: $\frac{A{R_p}^2}{{R_p}^2 + A^2} = 2000\ \ (2)$

Delen we de twee gevonden uitdrukkingen (1) en (2) op elkaar dan vinden we:

$$\frac{\frac{A^2 R_p}{R_p{}^2 + A^2}}{\frac{A R_p{}^2}{R_p{}^2 + A^2}} = \frac{4000}{2000} = 2 \text{ of } \frac{A}{R_p} = 2 \text{ dus: } A = 2R_p.$$

Dit ingevuld in (1) geeft: $\frac{4\,R_p{}^3}{R_p{}^2 + 4\,R_p{}^2} = \frac{4R_p{}^3}{5R_p{}^5} = \frac{4}{5}\,R_p = 4000$ dus: $R_p = 5000\,\Omega.$

Dan is: $A = 2\,R_p = 10.000\,\Omega$ dus: $A = \frac{1}{\omega C_p} = 10.000$ dus: $C_p = \frac{1}{3.10^2.10^4} = \frac{1}{3}\,\mu F.$

We kunnen deze oplossing ook op een geheel andere wijze doen nl. met behulp van het invoeren van de hulphoek.
De uitdrukking van de spanning herleiden we dan als volgt:

$$u = 20\,\cos\omega t + 10\,\sin\omega t = 20\left(\cos\omega t + \frac{1}{2}\sin\omega t\right).$$

Stel $\tan\varphi = \frac{1}{2}$ dan is:

$$u = 20(\cos\omega t + \tan\varphi\sin\omega t) = \frac{20}{\cos\varphi}(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi) =$$
$$= \frac{20}{\cos\varphi}\cos(\omega t - \varphi).$$

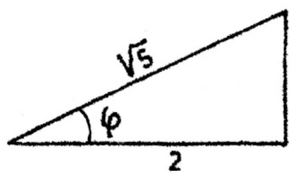

Fig. 76,1.

Uit de figuur 76,1 volgt dat $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$
dus: $u = 10\sqrt{5}\cos(\omega t - \varphi)$.
De stroom is gegeven als $i = 5.10^{-3}\cos\omega t$.
De spanning ijlt dus over een hoek φ achter op de stroom, zodat de schakeling kan bestaan uit een serieschakeling van een weerstand en een condensator of uit een parallelschakeling van een weerstand en een condensator.
(deze conclusie is eenvoudig te trekken uit hetgeen we geleerd hebben bij de vectordiagrammen).

Nemen we een serieschakeling dan is $\bar{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$.
Dus: $\tan\varphi = \frac{1}{2} = \frac{1}{\omega CR}$ dus $\omega CR = 2$. . . . . (1)
Het quotiënt van de amplitude van de spanning en stroom is Z dus:

$$\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{10\sqrt{5}}{5.10^{-3}} = 2.10^3\sqrt{5} \quad \ldots\ldots (2)$$

Uit (1) volgt: $\frac{1}{\omega C} = \frac{R}{2}$ dit in . . . . (2) geeft:

$$\sqrt{R^2 + \frac{1}{4}R^2} = \sqrt{\frac{5}{4}R^2} = \frac{1}{2}R\sqrt{5} = 2.10^3\sqrt{5}\ \ dus{:}\, R = 4000\ \ dus{:}\ \frac{1}{\omega C} = 2000.$$

dus: $C = \frac{5}{3}\,\mu F$, hetgeen we ook hiervoor vonden.
De overeenkomstige parallelschakeling berekenen we weer op de hiervoor aangegeven manier.

Oplossingen inleveren van de opgaven 674 t/m 678.

77,1. Constructie van de som van twee complexe getallen.

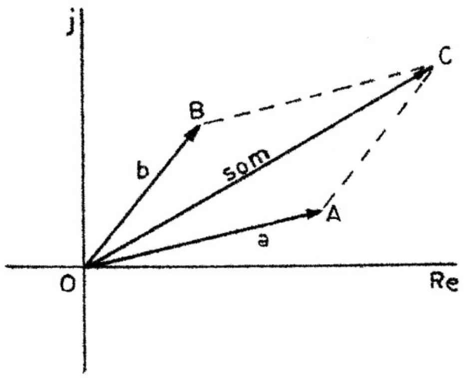

Fig. 77,1.

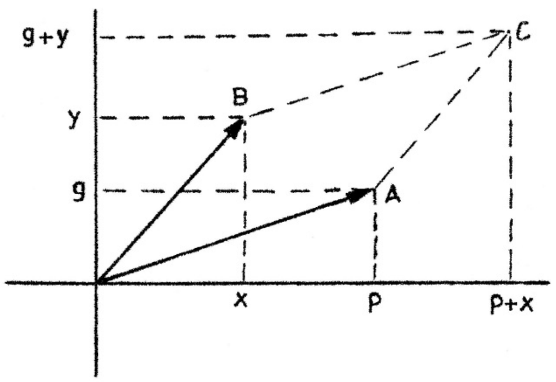

Fig. 77,2.

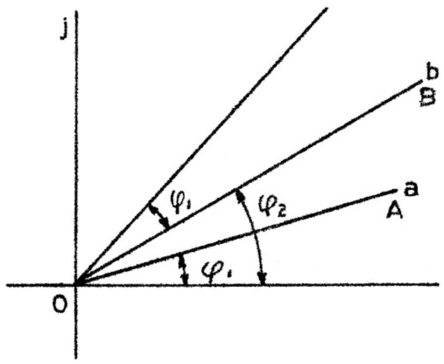

Fig. 77,3.

In het complexe vlak zijn twee complexe Beeldpunten getekend, het punt A en het punt B (zie fig. 77,1).

Deze punten kunnen we ook weergeven met behulp van modulus en argument. OA is de modulus van het complexe getal A, dat we a zullen noemen. Overeenkomstig is b de modulus van het complexe getal B.

De som van de twee complexe getallen vinden we door middel van het parallellogram $OACB$ (evenals bij de vectoriële optelling, die hetzelfde is). C is het beeldpunt van de som van de twee complexe getallen. De hoek die de somvector maakt, kunnen we uit de figuur oplossen met behulp van de cosinusregel etc. Een en ander hebben we op dezelfde manier bekeken bij 'Mechanica', bij het sommeren van krachten. Zijn de complexe getallen bijv, als: $A = p + jq \; en \; B = x + jy$ dan is de som $(p + x) + j(q + y)$ (zie fig. 77,2).

De aftrekking van twee complexe getallen gaat op dezelfde manier. Zie hiervoor ook het behandelde in de 'Mechanica' omtrent het verschil van twee krachten.

77,2 Constructie van het product van twee complexe getallen.

In les 68 punt 68,2 hebben we gezien dat indien we twee complexe getallen vermenigvuldigen, de uitkomst een complex getal is met een argument dat gelijk is aan de som der argumenten en een modulus die gelijk is aan het product der moduli.
Het argument van het product is dus eenvoudig te construeren (zie fig. 77,3).

Het complexe getal A met modulus a en argument φ_1 en het complexe getal B met modulus b en argument φ_2 zijn in fig. 77,3 getekend. De hoek φ_1 wordt bij de hoek φ_2 opgeteld. Hiermee hebben we de richting van de productvector vastgelegd.

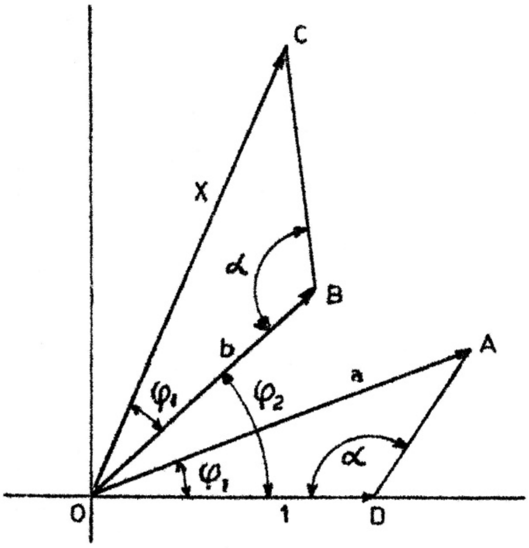

Fig. 77,4.

We moeten nu alleen de lengte ervan nog bepalen. Noemen we deze lengte x dan geldt $a\,.\,b = x$. Hiervan kunnen we met behulp van de evenredigheid schrijven: $1 : a = b : x$. Hier is het getal 1 een vector langs de horizontale as met lengte a. In fig. 77,4 is $\Delta ODA \sim \Delta OBC$.
Hieruit volgt: $OD : OA = OB : OC$ of:

$$1 : a = b : x \text{ of: } x = ab.$$

OC is dus de productievector van de vectoren a en b of volgens de complexe rekenwijze C is het beeldpunt van het complexe getal dat ontstaat uit het product van de complexe getallen door de beeldpunten A en B voorgesteld.

Constructie: Construeer de som van de hoek φ_1 en φ_2. We vinden dan de richting van het product.
Pas hoek α af bij het punt B.
Waar het tweede been van die hoek de gevonden richting snijdt, ligt het punt C.

77,3. Constructie van het quotiënt van twee complexe getallen.

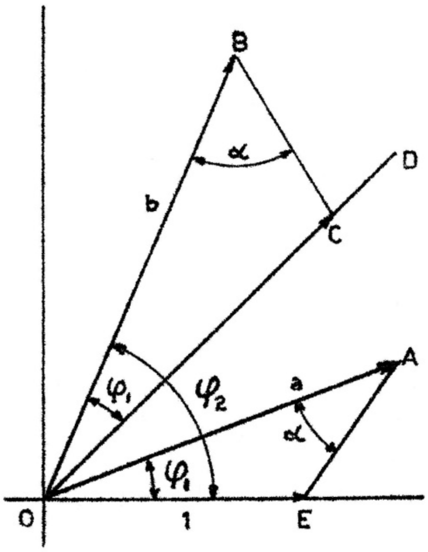

Fig. 77,5.

Bij het quotiënt van twee complexe getallen vinden we een nieuw complex getal met als argument het verschil der argumenten der oorspronkelijke complexe getallen en met als modulus het quotiënt der moduli.
In fig. 77,5 is de constructie getekend.

Constructie: trek de hoek φ_1 van φ_2 af.
De richting van het quotiënt is aangegeven door de lijn OD.
Breng nu de hoek α bij B over.
OC is nu de gevraagde vector.

Bewijs: $\Delta\, OEA \sim \Delta\, OCB$.
Hieruit volgt: $OE : OA = OC : OB$.
Of: $1 : a = OC : b$.
Of: $a\,.\,OC = b$ dus:
$OC = \frac{b}{a}$.

Oplossingen inzenden van de opgaven 679 t/m 683.