R.T.

Inhoud Mechanica. Nadruk verboden

HILVERSUM

R.T.

Mechanica. Les 1

1,1. De mechanica en haar indeling

Mechanica is dat deel van de natuurkunde dat zich bezighoudt met beweging en rust. Het wordt gewoonlijk in drie onderdelen verdeeld.

1°. de kinematica. Dit is de leer der bewegingen. Zij geeft een beschrijving van de beweging zonder te vragen naar het waarom der beweging.

2°. de dynamica. Dit is de leer der beweging onder invloed van krachten, die van allerlei aard kunnen zijn.

3°. de statica. Dit is de leer van de rust. Hierin worden de voorwaarden bekeken, waaronder een lichaam zich niet beweegt.

Het is niet altijd mogelijk de drie genoemde onderdelen van de mechanica scherp van elkaar te scheiden.

1.2. Puntmechanica

In de mechanica ziet men meestal van de vorm de lichamen af,. Men beschouwt het lichaam dan alleen maar als stoffelijk punt (afgekort s.p.).
Zo'n stoffelijk punt kennen we dan geen afmetingen toe, echter wel massa.
Het s.p. heeft een even grote massa, dus ook een even groot gewicht, als het lichaam dat het vervangt. We zien dus, door het aannemen van het stoffelijk punt af van de afmetingen van het lichaam zelf en kunnen hiermee beter tot de kern der diverse problemen doordringen.

1,3. Relativiteit van rust en beweging

De begrippen rust en beweging zijn maar betrekkelijk. Indien een persoon in een rijdende trein stil zit, kunnen we zeggen dat de persoon ten opzichte van de trein in rust is, doch t.o.v. de aarde is die persoon in beweging. Houden we er ook nog rekening mee dat de aarde in het heelal nog voortdurend in beweging is, dan zien we duidelijk in dat het begrip rust maar betrekkelijk, of zoals we meestal zeggen, slechts relatief is.

In de meeste gevallen beschouwen we rust en beweging t.o.v. de aarde, waarbij we er dus geen rekening mee houden dat de aarde met een snelheid van ruim 100 000 km/uur om de zon draait.

We definiëren het begrip als volgt:

Een voorwerp is in rust, wanneer het in opeenvolgende tijdstippen dezelfde plaats t.o.v. zijn omgeving inneemt.

Het begrip beweging wordt als volgt gedefinieerd:

Een voorwerp is in beweging, als het t.o.v. zijn omgeving van plaats verandert.

Nu is het mogelijk dat een voorwerp aan twee of meer bewegingen tegelijkertijd deelneemt, bv. iemand die door de rijdende trein loopt. Een roeiboot die dwars over een snel stromende rivier beweegt enz.

Nemen we bij dit laatste voorbeeld aan, dat de roeier loodrecht over de rivier roeit in stromend water. We veronderstellen, dat de breedte van de rivier een afstand a_1 heeft (zie fig. 1,1).
De snelheid van het water drijft de boot echter af over een afstand a_2.

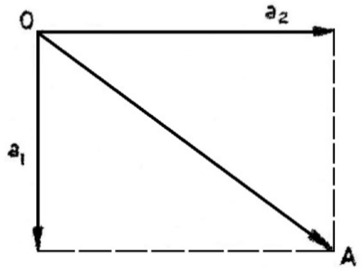

Fig. 1,1.

De boot ondergaat dus twee bewegingen tegelijkertijd en zal in het punt A aan de overkant van de rivier komen, terwijl hij uit O vertrokken is.
De lengte OA heet de resultante van de twee verplaatsingen a_1 en a_2. Het is de diagonaal van een rechthoek, gevormd door de twee aparte bewegingen.
De twee bewegingen kunnen ook een hoek met elkaar maken. De resultante R is dan de diagonaal van het parallellogram dat gevormd kan worden met a_1 en a_2 als zijden (zie fig. 1,2). Het is de diagonaal die uit het beginpunt der beweging getrokken wordt.

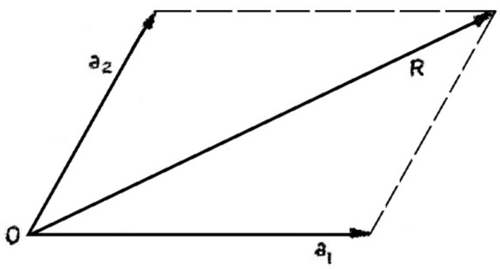

Fig. 1,2.

Uit fig. 1,1 en fig. 1,2 zien we dat de afstanden niet alleen gegeven moeten zijn in grootte doch ook in richting. We geven dit meestal aan met een pijl. De richting van de pijl komt overeen met de richting van de verplaatsing, terwijl de lengte van de pijl overeenkomt net de grootte van de verplaatsing.
Een grootheid waarvan zowel de grootte als de richting van belang zijn, heet een vector.
Definitie:
Een grootheid bepaald door richtting en grootte is een vector.

Er zijn vele vectoren in de mechanica, die we zullen bekijken, zij worden steeds aangegeven door een pijl. Als we vectoren moeten optellen of aftrekken, kunnen we dit niet doen alsof het gewone getallen zijn, daar ook de richtingen een rol spelen.

Algemeen geldt de volgende regel:

De som van twee vectoren is een vector, die in richting en grootte gelijk is aan de diagonaal van het parallellogram, waarvan de op te tellen vectoren de zijden zijn.

Er zijn grootheden, die wel een grootte, doch geen richting hebben, bv. tijd, temperatuur, massa. Een grootheid, die alleen maar bepaald wordt door haar grootte, heet een scalar (meervoud scalairen).

1,4. Berekening van de resultante van twee vectoren die een hoek α met elkaar maken (zie fig. 1,3)

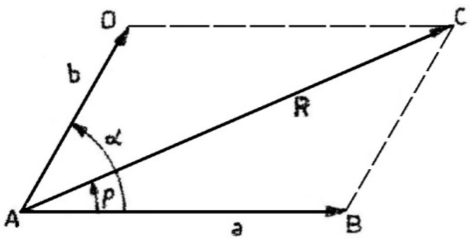

Fig. 1,3.

Gevraagd wordt de resultante van de vectoren a en b. $\angle DAB = \alpha$, dan is $\angle ABC = 180° - \alpha$.
Passen we in $\Delta\, ABC$ de cosinusregel toe, dan is:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\ (180° - \alpha) =$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

a en b en R stellen de lengten der vectoren voor.
Om de richting van R, bv. ten opzichte van a te berekenen, passen we in $\Delta\, ABC$ de sinusregel toe:

$$\frac{R}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{b}{\sin p} \text{ of } \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin p},$$

zodat $\sin p = \frac{b}{R} \sin \alpha$. Hieruit is $\sin p$, dus hoek p op te lossen.

Ter oefening maken de opgaven 1 t/m 5.
Oplossingen inzenden van de opgaven 6 t/m 10.

2,1. Het optellen van meer vectoren in eenzelfde vlak gelegen

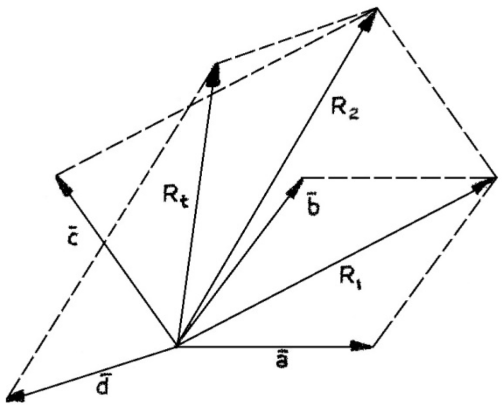

Fig. 2,1.

Om aan te geven, dat een getal een vector voorstelt, dus bepaald wordt door richting te grootte, plaatsen we veelal boven het getal een streepje, dus ā, waarvoor we lezen : vector a. Met de aanduiding a (zonder streepje) bedoelt men dan de grootte of de waarde van de vector.

In fig. 2,1 zijn 4 vectoren ā, $\bar{b}, \bar{c}$ en $\bar{d}$ getekend. We willen de som, de resultante van deze 4 vectoren construeren. Daartoe stellen we ā en $\bar{b}$ samen en vinden de resultante $\bar{R}_1$. $\bar{R}_1$ is dus de vervanging van ā en $\bar{b}$.
We stellen nu $\bar{R}_1$ met $\bar{c}$ en vinden $\bar{R}_2$. Daarna stellen we $\bar{R}_1$samen met $\bar{d}$ en vinden $\bar{R}_t$. Deze $\bar{R}_t$ is dus de vervangingsvector van de som der 4 vectoren ā, $\bar{b}, \bar{c}$ en $\bar{d}$.

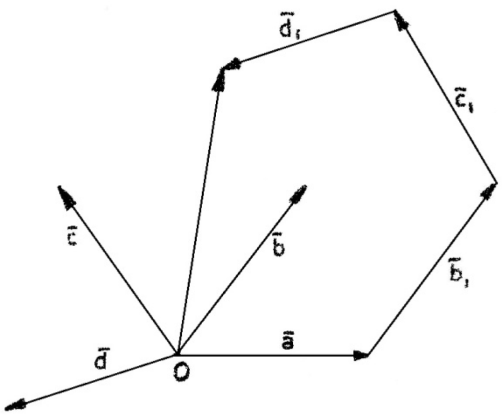

Fig. 2,2.

de constructie van de resultante is vrij eenvoudig, de berekening echter niet, daar we verschillende malen de sinus- en cosinusregel zouden moeten toepassen. Voor de berekening van de resultante zullen we later een eenvoudige methode leren. De constructie kunnen we echter direct al veel eenvoudiger uitvoeren.

Beschouwen we nog eens de vectoren ā, $\bar{b}, \bar{c}$ en $\bar{d}$ in fig. 2,2. Uit fig. 2,1 zien we dat we de vector $\bar{R}_1$ ook kunnen vinden als we $\bar{b}$ evenwijdig verplaatsen naar het eindpunt van ā; dit is in fig. 2,2 de vector $\bar{b}_1$. Vervolgens verplaatsen we $\bar{c}$ naar het van $\bar{b}_1$ en $\bar{c_1}$ en daarna $\bar{d}$ naar het eindpunt van $\bar{c_1}$ als $\bar{d}_1$. Verbinden we nu het eindpunt van $\bar{d}_1$ met O, dan vinden we de resultante $\bar{R}_t$. Deze methode van construeren is dus veel korter en overzichtelijker. De resulterende vector $\bar{R}_t$ verbindt dus het beginpunt van de eerste vector met het eindpunt van de laatste vector.

2,2. Het verschil van twee vectoren

Onder het verschil van twee getallen a en b verstaan we het getal c, dat bij de aftrekker b moet worden opgeteld om het aftrektal a te vinden. Op dezelfde manier verstaan we onder het verschil van 2 vectoren $\bar{a} - \bar{b}$ de vector, die bij $\bar{b}$ moet worden opgeteld om $\bar{a}$ te krijgen. We kunnen ook zeggen i.p.v. $\bar{a} - \bar{b}$, dat we de vector $-\bar{b}$ optellen bij $\bar{a}$, dus: $\bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$. Onder de vector $-\bar{b}$ verstaan we dan de vector, die even groot is als de vector $\bar{b}$, doch tegengesteld van richting. In fig. 2,3 is dit uitgevoerd. $\bar{b}$ is tegengesteld genomen, is dus $-\bar{b}$. De resultante OA is dus $a + \left(-\bar{b}\right) = \bar{a} - \bar{b}$. Om de resultante te construeren van het verschil van twee vectoren nemen we de aftrekker even groot doch tegengesteld van richting en tellen deze bij het aftrektal op. Ook deze constructie kunnen we korter uitvoeren als volgt (fig. 2,4).

OA uit fig. 2,3 vinden we ook als we het eindpunt van $\bar{b}$ verbinden met $\bar{a}$. De verbindingslijn is even groot en heeft dezelfde richting als OA. In fig. 2,4 is deze constructie direct uitgevoerd.

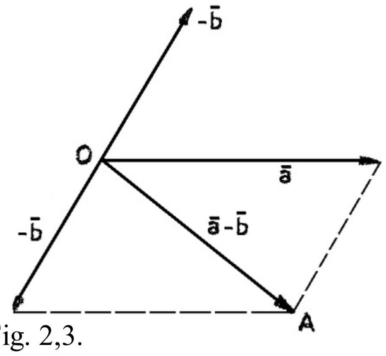

Fig. 2,3.

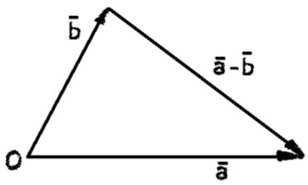

Fig. 2,4.

Wij wijzen er uitdrukkelijk op, dat de richting van de verschilvector gegeven wordt door de richting te nemen van de aftrekker naar het aftrektal.

Zowel bij het Bepalen van de som als van het verschil van twee vectoren tekenen we dus een driehoek. De lengte van de som- of verschilvector is altijd een van de zijden van die driehoek. In de meetkunde hebben we geleerd dat een zijde van een driehoek altijd kleiner is dan de som van de beide andere.

Hieruit volgt, dat de grootte van de som of het verschil van twee vectoren kleiner is dan de som van de grootten der beide vectoren. Alleen wanneer twee vectoren dezelfde richting hebben, is de grootte van hun som gelijk aan de som van hun grootten van de beide vectoren. Hebben twee vectoren een tegengestelde richting, doch is hun grootte verschillend, dan is de resultante gelijk aan het verschil der grootte van de beide vectoren. De richting van de resultante is de richting van de grootste der beide vectoren.

Zijn twee vectoren even groot, doch tegengesteld gericht, dan is de resultante gelijk aan nul; de resultante heeft dan geen richting en geen grootte.

2,3. Het ontbinden van een vector

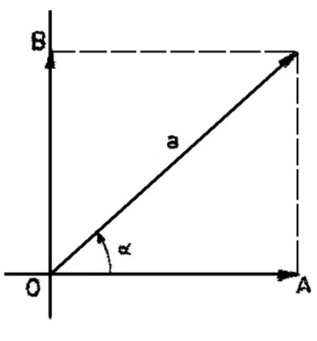

Fig. 2,5.

Het is omgekeerd ook mogelijk een vector te ontbinden in twee of meer vectoren. We kunnen hier dikwijls een heel nuttig gebruik van maken.
We trekken dan door het beginpunt van de vector bv. een rechthoekig assenkruis (fig. 2,5).
Nu is: $\overline{OA} = \bar{a}\cos\alpha$ en $\overline{OB} = \bar{a}\sin\alpha$.
Stellen we $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$ weer samen, dan vinden we de gegeven vector $\bar{a}$ terug. We zeggen dat $\overline{OA}$ en $\overline{OB}$ de componenten van de vector $\bar{a}$. Dit ontbinden van een vector in twee componenten geschiedt meestal in twee componenten die loodrecht op elkaar staan.
Dit behoeft echter niet. We kunnen die ontbinding maken in elke willekeurige stand.

In les 1, fig. 1,3 bv. is de resultante $\bar{R}$ weer te ontbinden in de componenten $\bar{a}$ en $\bar{b}$.
In fig. 1,2, les 1 hebben we de resultante geconstrueerd van 4 vectoren. We kunnen deze resultante nu ook berekenen door elk van deze vectoren te ontbinden in twee componenten, die we alle op eenzelfde assenkruis nemen. De componenten op de horizontale as en die op de verticale as worden dan opgeteld en deze som van componenten stellen we weer samen.

We komen hier in een volgende les, bij het behandelen van krachten op terug.

Ter oefening maken de opgaven 11 t/m 15.
Oplossingen inzenden van de opgaven 16 t/m 20.

Statica

3,1. Wet der traagheid

Als een lichaam in rust is, zal het alleen in beweging komen als er voor deze beweging een oorzaak aanwezig is. Als een lichaam reeds in beweging is, zal het zijn baan rechtlijnig vervolgen, als er geen oorzaak is die de baan van een rechte lijn doet afwijken of die snelheid doet veranderen. Dit heet de wet der traagheid of inertie.

De oorzaak die een zich in rust bevindend lichaam in beweging brengt of die een zich in beweging bevindend lichaam van de rechte baan doet afwijken, of de snelheid van het lichaam doet veranderen, heet een kracht.

Krachten kunnen van zeer verschillende aard zijn, bv. de aantrekkingskracht van de aarde, elektrische krachten, magnetische krachten, spierkracht, wrijvingskracht, enz.

Iedere kracht bezit een grootte, een richting en een aangrijpingspunt; een kracht is dus een vector.

De grootte van de kracht wordt uitgedrukt in Newton, afgekort N.

We veronderstellen, dat een kracht die op een lichaam werkt, aangrijpt in het zwaartepunt van het lichaam. Om de moeilijkheid te ontgaan dat we van ieder lichaam eerst het zwaartepunt moeten bepalen, hetgeen vooral bij niet regelmatige lichamen zeer moeilijk is, zijn we overgegaan op de definiëring van het stoffelijk punt (s.p.). We doen dus, alsof alle materie, waaruit een lichaam is opgebouwd, in één punt is geconcentreerd.

Een stoffelijk punt is dus een schijnvoorstelling, iets onbestaanbaars, maar het maakt vele beschouwingen in de mechanica eenvoudig.

Wanneer we een lichaam vervangen door een s.p., waarbij we voor het s.p. het zwaartepunt van het lichaam nemen, dan is dit punt het aangrijpingspunt van de er op werkende krachten en komt de werking van deze krachten overeen met de werking van de krachten op het totale lichaam.

Werkt er op een lichaam een kracht in een bepaald aangrijpingspunt, dan is de uitwerking van deze kracht op het lichaam hetzelfde als we een even grote kracht in dezelfde richting nemen, waarvan het aangrijpingspunt in de richting van de kracht is verschoven.

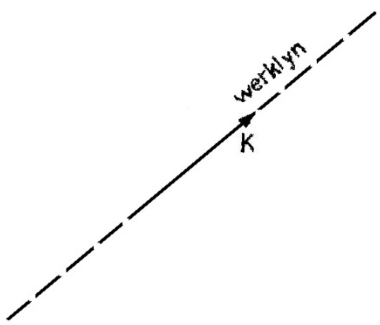

Fig. 3,1.

De lijn waarlangs we een vector tekenen, die de kracht aangeeft, noemen we de werklijn van die kracht (fig. 3,1).
We komen nu tot de volgende regel:

Een kracht mag langs zijn werklijn verplaatst worden, mits de lengte van de vector, die de kracht voorstelt, niet verandert.

Wanneer een voorwerp op een tafel ligt, dan oefent dit voorwerp een bepaalde druk op die tafel uit. Daar het voorwerp in rust is, zal er dus nog een even grote tegengesteld gerichte kracht op werken. Deze tegengestelde kracht levert de tafel.

Een voorwerp dat aan een koord hangt, oefent op het koord een bepaalde kracht uit, doch het koord oefent op het voorwerp een even grote tegengesteld gerichte kracht uit.

Steeds blijkt, dat wanneer een lichaam op een ander lichaam een kracht uitoefent, het tweede lichaam op het eerste een even grote tegengestelde kracht uitoefent, mits het voorwerp in rust blijft.

De kracht die de actie verricht, ondervindt dus een even grote tegengestelde reactiekracht, zodat geldt:

actie = reactie.

3,2. Samenstelling van krachten

Wanneer op een lichaam een aantal krachten werkt, is het mogelijk deze krachten te vervangen door een enkele kracht, die dezelfde uitwerking heeft als deze krachten samen. We spreken dan van het samenstellen van krachten.

De enkele kracht, die de krachten samen kan vervangen, heet de resultante van deze krachten.

Een en ander hebben we reeds gezien bij het behandelen der vectoren.

Werken twee krachten op een lichaam, dan vinden we de resulterende kracht weer uit het parallellogram. We noemen dit parallellogram het parallellogram der krachten.

Werken op een lichaam twee krachten, die niet hetzelfde aangrijpingspunt hebben, doch waarvan de werklijnen in een plat vlak liggen, dan verplaatsen we de krachten langs de werklijnen tot het snijpunt van deze werklijnen. De resultante vinden we dan weer uit het parallellogram der krachten.

De resultante van meer krachten construeren we op de wijze zoals aangegeven is in fig. 2,2, les 2. Deze figuur noemen we dan de stangenveelhoek.

Vragen we ons nu af, hoe groot de kracht moet zijn om twee gegeven krachten op te heffen, dan gaan we als volgt te werk (zie fig. 3,2).

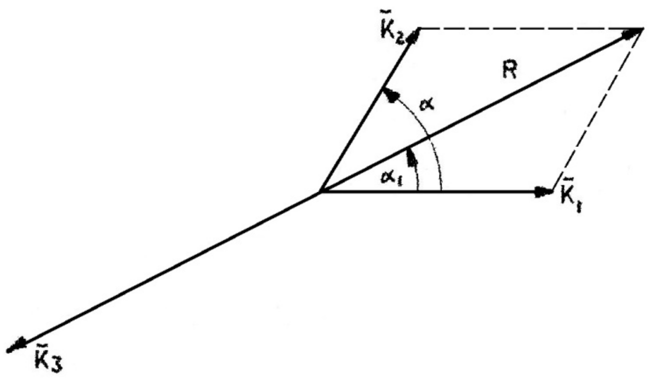

Fig. 3,2.

We bepalen eerst de resultante $\bar{R}$ van de krachten $\bar{K}_1$ en $\bar{K}_2$, d.m.v. het parallellogram der krachten.

De kracht $\bar{K}_3$ even groot, doch tegengesteld aan $\bar{R}$, heft de kracht $\bar{R}$ op, dus brengt het systeem , gevormd door $\bar{K}_1$ en $\bar{K}_2$ tot rust.

Voorbeeld: Twee krachten die een hoek van 60° met elkaar maken, zijn resp. 6 en 8 Newton. Bereken de kracht, die evenwicht maakt met deze twee krachten.

Oplossing:

Beschouwen we fig. 3,2, dan is de resultante R te vinden met behulp van de cosinusregel, dus:

$$R^2 = {K_1}^2 + {K_2}^2 - 2K_1K_2\cos(180° - \alpha) =$$
$$= 36 + 64 - 2\,.\,6\,.\,8\,\cos\,(180° - 60°) = 100 - 96\,\cos 120° =$$
$$= 100 + 96\,\cos 60 = 100 + 96 \times ½ = 100 + 48 = 148.$$

Hieruit volgt: $R = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

De hoek , die R met K_1 maakt, vinden we met de sinusregel, dus:

$\frac{R}{\sin(180-\alpha)} = \frac{K_2}{\sin\alpha_1}$ of: $\frac{2\sqrt{37}}{\sin 60°} = \frac{8}{\sin\alpha_1}$, dus: $\sin\alpha_1 = \frac{8\sin 60°}{2\sqrt{37}}$ of: $\sin\alpha_1 = \frac{8\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{37}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}} = \frac{2}{37}\sqrt{111}$.

De hoek α_1 is met behulp van een goniotabel te berekenen. De kracht $\bar{K}_3$ die evenwicht maakt met $\bar{K}_1$ en $\bar{K}_2$ heeft ook een grootte $2\sqrt{37}$ en een richting, waarvoor $\sin\varphi = -\frac{2}{37}\sqrt{111}$.

De hoek φ is een hoek tussen 180° en 270°.

Ter oefening maken de opgaven 21 t/m 25.

Oplossingen inzenden van de opgaven 26 t/m 30.

4,1. Berekening van de resultante van een aantal krachten

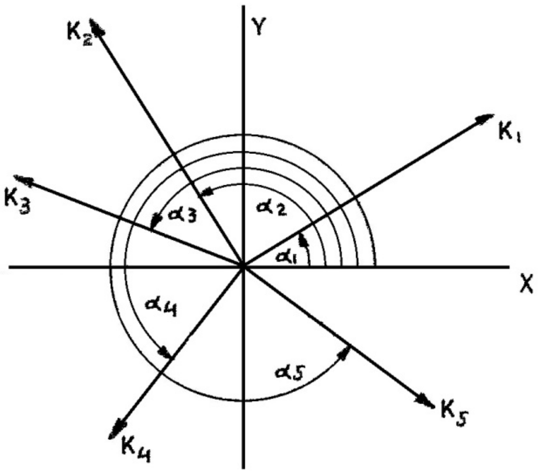

Fig. 4,1.

Moeten we de resultante berekenen van een aantal krachten $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4 \ldots$, die gegeven zijn in richting en grootte, dan ontbinden we al deze krachten op een rechthoekig assenkruis door het aangrijpingspunt van die krachten. In fig. 4,1 zijn 5 krachten getekend. Door het aangrijpingspunt O is een assenkruis aangebracht. We ontbinden de krachten nu in componenten op de x-as en y-as en maken een staatje van de ontbonden krachten als volgt:

	K_x	K_y
K_1	$K_1\ \cos\alpha_1$	$K_1\ \sin\alpha_1$
K_2	$K_2\ \cos\alpha_2$	$K_2\ \sin\alpha_2$
K_3	$K_3\ \cos\alpha_3$	$K_3\ \sin\alpha_3$
K_4	$K_4\ \cos\alpha_1$	$K_4\ \sin\alpha_4$
K_5	$K_5\ \cos\alpha_5$	$K_5\ \sin\alpha_5$ +
	$K_x = \ldots.$	$K_y = \ldots.$

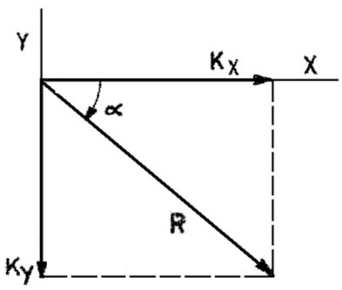

Fig. 4,2.

We tellen de componenten op de horizontale as op, dit geeft als resultante de component K_x; op de verticale as vinden we de component K_y. K_x kan zowel links als rechts van O komen, K_y zowel boven als beneden O; d.w.z. K_x en K_y kunnen zowel positief als negatief zijn. (De sinussen en cosinussen bepalen de tekens.)

Willen we nu de resultante bepalen, dan zetten we de componenten K_x en K_y alleen uit (zie fig. 4,2). We veronderstellen, dat K_x positief en dat K_y negatief is. Om de resultante te bepalen, stellen we K_x en K_y weer samen. De resultante is: $R = \sqrt{{K_x}^2 + {K_y}^2}$. De richting van R vinden we uit $\tan\alpha = \frac{K_y}{K_x}$ waarbij we aan moeten geven in welk kwadrant R ligt.

De resultante is nul, als zowel $K_x = 0$ als $K_y = 0$. We kunnen hieruit zeggen dat een aantal krachten in evenwicht is als de som der krachten in de x-richting zowel als de som der krachten in de y-richting gelijk aan nul is. Voor de som van een aantal termen gebruiken we het teken Σ (spreek uit sigma) en schrijven bovenstaande verkort als volgt. Een aantal krachten is in evenwicht als:

$$\Sigma_{K_x} = 0 \text{ en } \Sigma_{K_y} = 0.$$

4,2. Constructie van twee niet evenwijdige krachtenwerkende op een vast lichaam

In fig. 4,3 stelt AB een vast lichaam voor, waarop de krachten K_1 en K_2 werken. we verplaatsen K_1 en K_2 langs hun werklijnen, die elkaar in C snijden en naar het punt $K_{1'}$ en $K_{2'}$ De resultante is $K_{3'}$. We verplaatsen $K_{3'}$ langs zijn werklijn tot het punt D, waar deze werklijn het lichaam snijdt. $K_{3'}$ is dan de resulterende kracht.

4,3. Constructie van de resultante van twee ongelijke evenwijdige gelijkgerichte krachten werkend op een vast lichaam (zie fig. 4,4)

De krachten K_1 en K_2 zijn de twee evenwijdige gelijk gerichte krachten. Tekenen we nu in het punt A de kracht $K_{2'}$, die gelijk is in grootte aan K_2 en in B de kracht $K_{1'}$, die in grootte gelijk is aan K_1 en

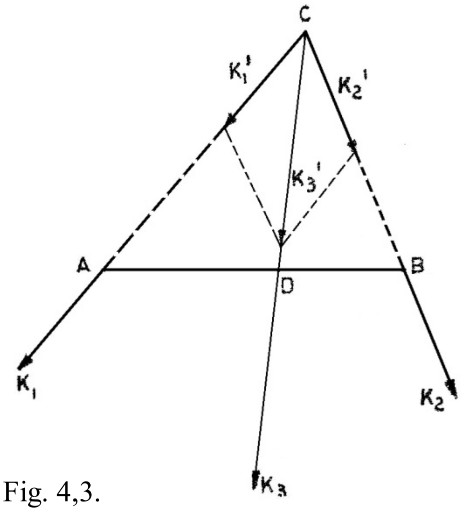

Fig. 4,3.

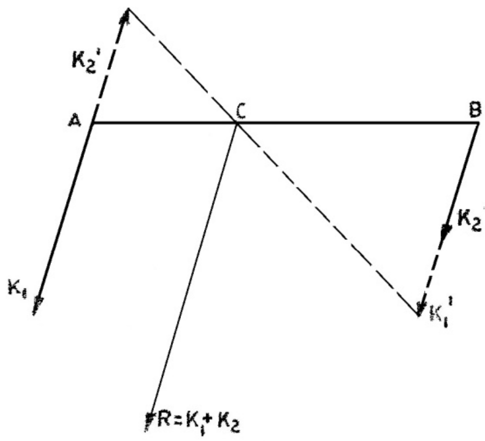

Fig. 4,4.

trekken we dan de verbindingslijn der uiteinden van $K_{1'}$ en $K_{2'}$ dan snijdt deze het lichaam AB in het punt C. Er worden nu twee gelijkvormige driehoeken gevormd.
Hieruit volgt: $K_{1'} : K_{2'} = BC : AC$
of: $K_1 : K_2 = BC : AC$.
Het aangrijpingspunt C van de resultante R is dus uit deze evenredigheid te vinden. De grootte van R is dan $K_1 // K_2$ gelijk aan $K_1 + K_2$.
We komen dan tot de volgende regel:
De resultante van twee evenwijdig gelijk gerichte krachten, die niet in een punt op een lichaam werken, is gelijk aan de som van die twee krachten en grijpt aan in een punt gelegen op de verbindingslijn der beide krachten aan de kant van de grootste kracht. Dit punt verdeelt de aangrijpingslijn in stukken, die zich omgekeerd verhouden al de grootten der gegeven krachten.

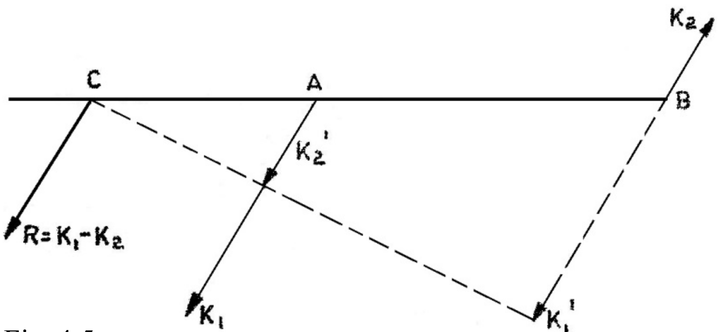

Fig. 4,5.

4.4. Constructie van de resultante van twee ongelijke evenwijdige tegengesteld gerichte krachten

Zie: (fig. 4,5). Gegeven de krachten K_1 en K_2 werkende op het lichaam AB en aangrijpende, resp. in A en in B. Om het aangrijpingspunt C van de resultante R te bepalen verplaatsen we K_1 naar het punt B, dit wordt $K_{1'}$, en K_2 naar A, dit wordt $K_{2'}$. De verbindingslijn der uiteinden van $K_{1'}$ en $K_{2'}$ snijdt het verlengde van de verbindingslijn der aangrijpingspunten van K_1 en K_2 in het punt C. Er ontstaan weer 2 gelijkvormige driehoeken, waaruit volgt: $K_{2'} : K_{1'} = AC : BC$ of: $K_2 : K_1 = AC : BC$. Hierdoor is het punt C te berekenen. De grootte van de resultante vinden we uit $R = K_1 - K_2$. Het punt C ligt op het verlengde van AB aan de kant van de grootste kracht.
Het verdient aanbeveling de gevallen 4,3 en 4,4 uit het hoofd te leren. Het waarom is niet bewezen, daar dit te ver voert. In de volgende les zullen we hiervan een voorbeeld uitwerken.

Ter oefening maken de opgaven 31 t/m 35.
Oplossingen inzenden van de opgaven 36 t/m 40.

HILVERSUM

5,1. Voorbeeld van hetgeen in de vorige les behandeld is

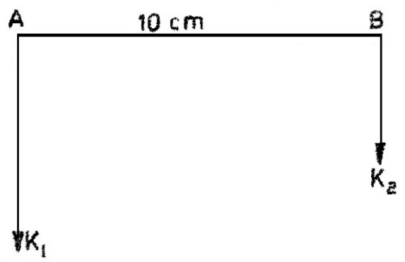

Fig. 5,1.

Gegeven: Een staaf AB met lengte 10 cm. In het punt A grijpt een kracht $K_1 = 8\ N$ aan en in het punt B een kracht $K_2 = 6\ N$.
Gevr.: Bepaal het punt waar we de staaf AB moeten ondersteunen om evenwicht te verkrijgen.
Oplossing: Het aangrijpingspunt berekenen we als volgt:
Noem het aangrijpingspunt C, dan geldt:
$AC : BC = K_2 : K_1 = 6 : 8$.
$(AC + BC) : (6 + 8) = AC : 6$, dus:
$10 : 14 = AC : 6$ of: $14\ AC = 60$, dus:
$AC = \frac{60}{14} = 4\frac{2}{7}$ en $BC = 5\frac{5}{7}$. Hiermee is het steunpunt C gevonden. De kracht waarmee we moeten ondersteunen is $K_1 + K_2 = 14\ N$.

5,2. Stelsel van twee even grote, evenwijdige tegengesteld gerichte krachten

Dit geval komt overeen met nr. 4,4 van les 4. De resultante is dan $K_1 - K_2$, doch daar de krachten nu even groot zijn, is $K_1 - K_2 = 0$. De grootte van de resultante is dus gelijk aan nul. Het aangrijpingspunt gaat naar oneindig.

Een stelsel van twee even grote, evenwijdige tegengesteld gerichte krachten heet een koppel.

Een koppel geeft aan een lichaam een draaiende beweging.

Draait het lichaam rechtsom, dan spreken we van een rechtsdraaiend koppel. We rekenen een rechtsdraaiend koppel positief. Draait het lichaam linksom, dan spreken we van een linksdraaiend koppel, dit rekenen we negatief.

Een stelsel van meer dat twee evenwijdige krachten kan worden teruggebracht tot twee evenwijdige krachten. Daartoe vervangen we eerst twee van die krachten door hun resultante, waardoor het aantal met 1 verminderd is. Hiermee kunnen we doorgaan tot we één kracht overhouden, de resultante. Zijn niet alle krachten gelijk gericht, dan vervangen we eerst alle krachten in de ene richting door hun resultante en daarna alle krachten in de andere richting door hun resultante. Zijn deze beide resultanten niet even groot, dan bepalen we de resultante volgens 4,4 les 4. Zijn beide resultanten wel even groot, dan houden we een resulterend koppel over. Een stelsel in een vlak gelegen krachten kunnen we altijd herleiden òf tot een enkele resultante òf tot een koppel òf tot een evenwicht.

5,3. Het moment van een kracht ten opzichte van een punt

Onder het moment van een kracht t.o.v. een punt verstaan we het product van de kracht en de afstand van die kracht tot dit punt. De afstand van de kracht tot het punt heet de arm van het moment.

We komen nu tot de volgende formule voor het moment:

$$M = k \times \mathrm{a}$$ (moment = kracht × arm.)

Een moment veroorzaakt een draaiende beweging. Er zijn in het dagelijkse leven vele voorbeelden van momenten bekend, bv. een hefboom, de slinger bij een handkoffiemolen, de trapper met crank bij een fiets, een koevoet, weegschaal, enz. Bij een moment werken we dus slechts met 1 kracht, werkend op een afstand a via een verbindingsarm op een aangrijpingspunt.

Veroorzaakt het moment een rechtsdraaiende beweging, dan noemen we het moment positief, veroorzaakt het een linksdraaiende beweging dan is het moment negatief.

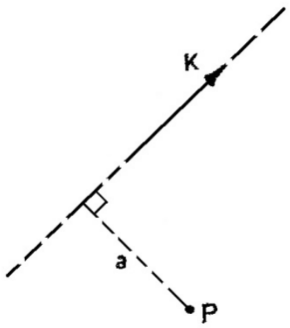

Fig. 5,2. $M = k\,.\,\mathrm{a}$.

Daar de kracht uitgedrukt is in Newton en de arm in meters is het moment uitgedrukt in Newtonmeters (Nm). (we zullen in een latere les zien, dat dit dezelfde eenheid is als die voor arbeid.)
We maken er op attent, dat de arm steeds loodrecht op de kracht staat, dus de arm is de kortste afstand gerekend vanaf het punt tot de werklijn van de kracht (zie fig. 5,2).
Het moment van een kracht ten opzichte van een punt is nul, als de kracht nul is of als de arm nul is, hetgeen wil zeggen, dat de werklijn van de kracht door het gegeven punt gaat.

5.4. Het moment van een koppel

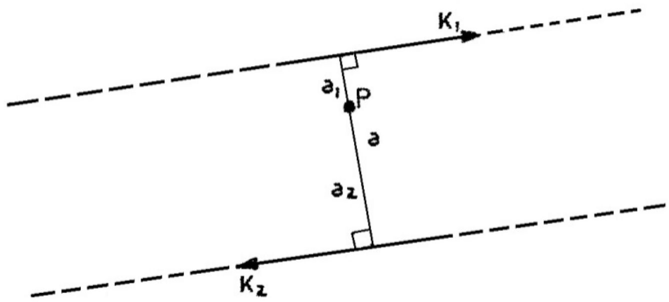

Fig. 5,3.

In fig. 5,3 vormen de twee evenwijdige tegengesteld gerichte even grote krachten een koppel.
Ten opzichte van het punt P is het moment van K_1 gelijk aan: $K_1\,.\,\mathrm{a}_1$ en van K_2 gelijk aan $K_2\,.\,\mathrm{a}_2$. De som van deze momenten is dus $K_1\mathrm{a}_1 + K_2\mathrm{a}_2$, doch $K_1 = K_2$, zodat het moment is: $M = K(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2) = K\,.\,\mathrm{a}$.
We noemen het product $K.\mathrm{a}$ het moment van het koppel.
Het moment van een koppel vinden we dus, door de grootte van een der krachten te vermenigvuldigen met de afstand (loodrechte afstand) van die krachten.

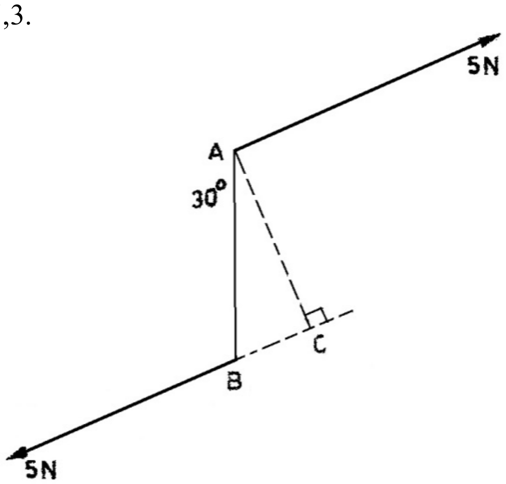

Fig. 5,4.

$$M = k \times \mathrm{a}$$

Er bestaat dus een grote overeenkomst tussen het moment van een koppel en het moment van een kracht t.o.v. een punt, toch dienen we de twee begrippen van elkaar te scheiden.

Voorbeeld: Hoe groot is het moment van het Koppel, indien de krachten 5 N bedragen? De verbindingslijn tussen de aangrijpingspunten van de krachten bedraagt 20 cm en maakt een koek van 120° met de krachten.

Oplossing: Zie fig. 5,4. Om de arm te berekenen, dienen we de loodrechte afstand te berekenen tussen de krachten.
In $\Delta\,ABC$ is $\cos 30° = \frac{AC}{AB}$, dus
$AC = AB \cos 30° = 20\,.\frac{1}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\ cm = 0{,}1\sqrt{3}\ m.$ Het moment van het koppel is dus:
$M = k\,.\,\mathrm{a} = 5 \times 0{,}1\sqrt{3} = 0{,}5\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \ Nm.$

Ter oefening maken de opgaven 41 t/m 45.
Oplossingen inzenden van de opgaven 46 t/m 50.

6,1. Het samenstellen van koppels

Als van twee koppels de momenten gelijk zijn, zowel in grootte als in draairichting, hebben deze twee koppels op eenzelfde lichaam waarop zij werken, dezelfde uitwerking.

We kunnen dus een koppel vervangen door een ander koppel met hetzelfde moment, doch waarvan de kracht een aantal malen groter is, waardoor de arm hetzelfde aantal malen kleiner moet zijn. Het product $K.a$ moet echter gehandhaafd blijven.

Om twee of meer koppels op te tellen, bepalen we van ieder koppel het moment en nemen de algebraïsche som van de momenten.

6,2. De momentenstelling

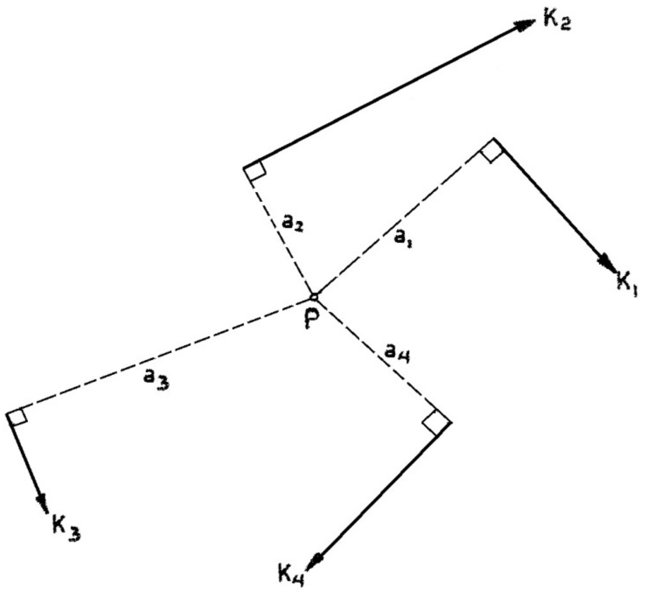

Fig. 6,1.

Als op een lichaam enige krachten werken, gelegen in een plat vlak, dan is de algebraïsche som van de momenten van deze krachten t.o.v. een willekeurig punt P gelijk aan het moment van de resultante van deze krachten te opzichte van dit punt P.

Deze stelling heet de momentenstelling.

In plaats van de resulterende kracht te bepalen, kunnen we ook de som der momenten nemen.

In fig. 6,1 zijn 4 krachten getekend met verschillende afstanden t.o.v. het aangrijpingspunt P.

De momenten veroorzaakt door de krachten K_1, K_2, en K_4 zijn rechtsdraaiend, dus positief.
Het moment, veroorzaakt door K_3 is negatief. Het moment dat de 4 momenten vervangt, is gelijk aan:
$K_1 \mathrm{a}_1 + K_2 \mathrm{a}_2 - K_3 \mathrm{a}_3 + K_4 \mathrm{a}_4$.

Veronderstellen we, dat de uitkomst gegeven wordt door bv. $K.\mathrm{a}$ als resulterend moment, dan kunnen we naar verkiezing de kracht of de arm kiezen en de tweede grootheid uitrekenen, mits het product $K.\mathrm{a}$, dat het moment geeft, gehandhaafd blijft.

Voorbeeld: Gegeven drie krachten (zie fig. 6,2). O is het draaipunt.
Gevraagd: Bereken het resulterend moment.
Oplossing: $M_1 = 3 \times 3 = 6\ Nm$. $M_2 = 6 \times (3+5) = 48\ Nm$. $M_3 = 3 \times (3+5+2) = 30\ Nm$

Het totale moment is nu: $m = (6 + 48 + 30)\ Nm = 84\ Nm$.

6,3. Reactiekrachten

Indien een lichaam op een horizontaal vlak rust, ondervindt het ten gevolge van de zwaartekracht een kracht naar beneden. Het lichaam is echter in rust; er is evenwicht. Hieruit volgt, dat op het lichaam een even grote kracht naar boven wordt uitgeoefend. Deze kracht kan alleen afkomstig zijn van het vlak waarop het lichaam rust. Wanneer een lichaam op een horizontaal vlak rust, werken er geen andere krachten op dan de zwaartekracht en de reactiekracht, die loodrecht op het ondersteuningsvlak is gericht. beide krachten maken evenwicht met elkaar. De reactiekracht noemen we de normaalkracht, aangegeven door de letter N, de aantrekkingskracht van de aarde, ook wel de zwaartekracht genoemd, wordt aangegeven met de letter G.

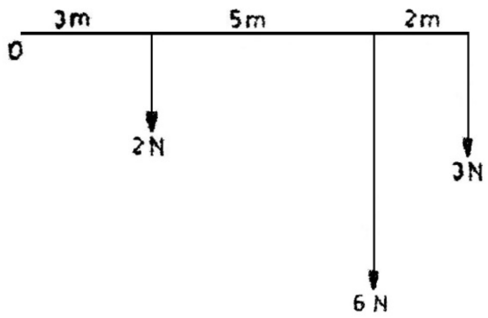

Fig. 6,2.

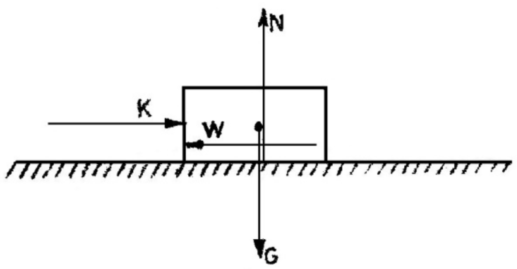

Fig. 6,3.

Oefenen we nu op het lichaam een horizontale kracht uit, bv. door er tegen te drukken, dan blijft bij een kleine horizontale kracht het lichaam nog in rust. Overschrijdt de horizontale kracht echter een zekere waarde, dan komt het lichaam in beweging.

Zolang het lichaam nog in rust is, maken de krachten, die er op werken, evenwicht met elkaar. In de horizontale richting werkt een uitwendige kracht, er moet dus ook een tegengesteld gerichte even grote reactiekracht werken. Deze kracht kan alleen maar afkomstig zijn van het vlak waarop het lichaam rust. Deze reactiekracht heet de wrijvingskracht en wordt aangegeven met de letter W.

Deze wrijvingskracht ligt dus in het ondersteuningsvlak.

Op het lichaam werken nu 4 krachten, nl. de zwaartekracht G, de normaalkracht N, de horizontale uitwendige kracht K en de wrijvingskracht W (zie fig. 6,3).

Voor evenwicht gelden de beide evenwichtsvergelijkingen, nl. $N = G$ en $W = K$.

De wrijvingskracht W kan niet boven een bepaalde waarde, W_{max} genoemd, stijgen. Stijgt dus de uitwendige kracht K boven de waarde van de maximale wrijvingskracht, dan zal het lichaam in beweging komen. De resulterende kracht die overblijft, is dan $K - W_{max}$.

Proefondervindelijk is gebleken, dat W_{max} afhankelijk is van de aard van de beide elkaar rakende oppervlakken. Zo is bij ruwe oppervlakken W_{max} groter dan bij gladde oppervlakken. Verder blijkt dat voor dezelfde aanrakingsoppervlakken W_{max} evenredig is met de kracht die het ondersteuningsvlak op het lichaam uitoefent. Dus:

$$W_{max} = f \, . N$$

De factor f heet de wrijvingscoëfficiënt.

Bij gladde oppervlakken is f kleiner dan bij ruwe oppervlakken; bij volkomen gladde oppervlakken is $f = 0$, dus W ook. Daar zowel W_{max} als N uitgedrukt zijn in Newton, is f een onbenoemd getal.

Zolang het lichaam nog in rust is, mogen we W niet gelijk aan fN stellen, alleen wanneer $K > fN$ wordt en het lichaam in beweging komt is $W = W_{max} = fN$.

We letten er dus goed op: W is een met een uitwendig uitgeoefende kracht aangroeiende kracht totdat W_{max} bereikt wordt.

Ter oefening maken de opgaven 51 t/m 55.
Oplossingen inzenden van de opgaven 56 t/m 60.

7,1. De wrijvingshoek φ

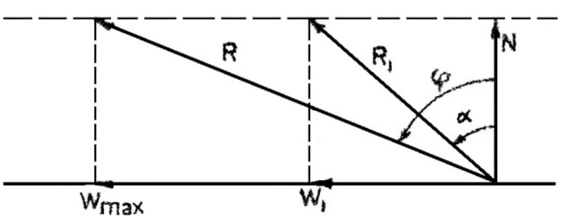

Fig. 7,1.

In fig. 7,1 is de normaalkracht N getekend, alsmede de wrijvingskracht W_1, veroorzaakt door een uitwendige kracht K.
N en W_1 zijn dus de krachten, die door het ondersteuningsvlak worden geleverd. R_1 is de resultante van de krachten N en W_1.

Wordt nu de horizontaal werkende kracht K zo groot, dat W_{max} wordt bereikt, dan zal, daar N niet verandert, als resultante de kracht R gevonden worden. De hoek α die R_1 met N maakt, wordt groter naarmate W groter wordt. Als $W = W_{max}$, dan is $\alpha = \varphi$ geworden. Verdere toename van W is dus niet meer mogelijk. Dus α heeft zijn grootste waarde φ bereikt. Deze hoek φ heet de wrijvingshoek. Uit fig. 7,1 lezen we af, dat:

$$\tan\varphi = \frac{W_{max}}{N}.$$

Daar $W_{max} = f.N$ is dus: $tan\,\varphi = f$

De wrijvingscoëfficiënt f is dus gelijk aan de tangens van de wrijvingshoek.

7,2. Een lichaam op een hellend vlak

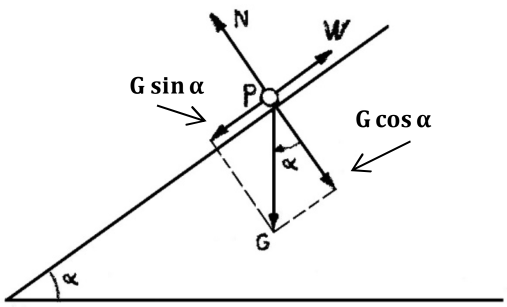

Fig. 7,2.

Een lichaam (in fig. 7,2 voorgesteld als een stoffelijk punt P) is op een hellend vlak in evenwicht. Wij vragen ons nu af, wat de evenwichtsvoorwaarden zijn opdat het lichaam op het vlak in rust is.
Het hellend vlak heeft een hellingshoek α.
Op het lichaam werkt de zwaarte-kracht G.
We ontbinden de zwaartekracht G in twee componenten nl. één langs het hellend vlak en één loodrecht op het hellend vlak, deze zijn resp. $G\sin\alpha$ en $G\cos\alpha$.
(De cursist verifiëre zelf, dat de hoek tussen G en $G\cos\alpha$ gelijk is aan α.)

De normaalkracht, die altijd loodrecht op het vlak staat, is even groot als de kracht $G\cos\alpha$. De component $G\sin\alpha$ wordt opgeheven door de wrijvingskracht W, zodat de evenwichtsvergelijkingen worden:

$$N = G\cos\alpha$$
$$W = G\sin\alpha$$

Veronderstellen we, dat we in de richting van de kracht $G\sin\alpha$ nog een uitwendige kracht K kunnen laten werken, dan wordt W eveneens groter, totdat het lichaam gaat bewegen. Gaat het voorwerp bewegen, dan is de maximale wrijvingskracht overschreden, dan is:
$W_{max} = K + W = K + G\sin\alpha = f.N.$

Meestal zijn de opgaven zo gesteld, dat het evenwicht berekend moet worden. Als het voorwerp zich juist zal gaan bewegen, dan gelden als evenwichtsvergelijkingen:

$$N = G\cos\alpha$$
$$W_{max} = G\sin\alpha = f.N.$$

Dus het voorwerp staat juist op het punt naar beneden te glijden als $G \sin \alpha - fN$.
In dit geval is dus α gelijk aan de wrijvingshoek φ.

We kunnen nu zeggen als $\alpha > \varphi$, dan glijdt het lichaam naar beneden; is $\alpha \leq \varphi$, dan blijft het lichaam in rust. De hoek φ is weer te berekenen uit:

$\tan \varphi = f = \frac{W_{max}}{N}$.

De richting van de wrijvingskracht is altijd zo, dat de uitwendige kracht, die op het lichaam wordt uitgeoefend, wordt tegengewerkt.

Glijdt een lichaam langs een hellend vlak naar beneden, dan werkt de wrijvingskracht langs het vlak naar boven, drukken we een lichaam langs een hellend vlak naar boven, dan werkt de wrijvingskracht naar beneden.

7.3. De voorstelling van een koppel door een vector

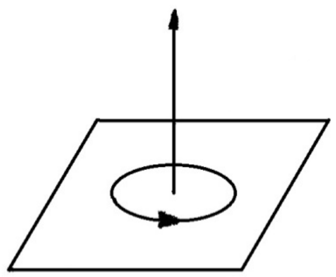

Fig. 7,3.

Een koppel heeft een grootte en een richting. Hieruit volgt dat we een koppel kunnen voorstellen door een vector. De richting van een koppel is echter niet zoals bij een kracht het geval is, een voortgaande richting, doch een draaiende.

We spreken nu af, dat we aan een draairichting in een vlak een voortgaande richting loodrecht op dit vlak toevoegen. De positieve voortgaande richting nemen we zo, dat deze aan de positieve draairichting is toegevoegd volgens de rechtse schroef (volgens de kurkentrekkerregel) (fig. 7,3).

Een kracht drukken we uit in Newton, een lengte in meter. Een moment van een koppel is het product van kracht en arm, dus het product van een aantal Newtons met een aantal meters.
De eenheid van het moment is dus newtonmeter (*Nm.*). Stellen we een koppel dus door een vector voor, dan dienen we deze op een schaal te tekenen, waarbij bv. $1\ cm = 1\ Nm.$

Door deze vector is het koppel dan geheel bepaald. We kunnen nu dus de momenten van meer koppels als vectoren bij elkaar optellen en samenstellen. Daarna kunnen we de resulterende vector weer terugbrengen tot één koppel. Op welke wijze we het moment $M = K.a$ in de twee factoren K en a ontbinden is onverschillig, mits het product $K.a$ gehandhaafd blijft.

We wijzen er op dat we een vector, die een kracht voorstelt en een vector, die een moment, dus een koppel voorstelt, niet met elkaar mogen samenstellen, immers de kracht is uitgedrukt in newton en het moment in newtonmeter. Een vector, die een koppel voorstelt, betekent dus iets anders dan een vector die een kracht voorstelt.

Stelt een vector een koppel voor, dan kunnen we deze vector willekeurig in de ruimte verplaatsen, mits zijn grootte en richting dezelfde blijven. Een dergelijke vector heet een vrije vector.

Stelt een vector een kracht voor, dan kunnen we deze vector alleen langs zijn werklijn verplaatsen met behoud van richting en grootte. Een dergelijke vector heet een glijdende vector.

Een kracht, die op een enkel deeltje werkt (bv. op een elektron) kunnen we voorstellen door een vector, waarvan het aangrijpingspunt vast ligt. Een dergelijke vector heet een gebonden vector.

Ter oefening maken de opgaven 61 t/m 65.
Oplossingen inzenden van de opgaven 66 t/m 70.

8,1. Veerkracht en elasticiteit

Uit verschillende proeven blijkt, dat de aarde lichamen aantrekt.
Dit blijkt bv. uit de beweging van vallende lichamen.

Dat de aarde lichamen aantrekt, kunnen we ook op de volgende wijze aantonen.
Hangen we een lichaam op aan een veer, dan wordt de veer langer. Toch komt het lichaam dan in een stand, waarin het in rust is of zoals we liever zeggen, in evenwicht is. De zwaartekracht, die op het lichaam werkt, wordt dus opgeheven. Daar de zwaartekracht verticaal naar beneden werkt, zal de kracht, die de zwaartekracht opheft, dus verticaal naar boven werken. Deze kracht is de veerkracht, het is de kracht waarmee de veer zich weer wil samentrekken om zijn vroegere vorm te verkrijgen.
Deze kracht is, daar er evenwicht is, even groot als de zwaartekracht.

Hangen we een zwaarder voorwerp aan de veer, dan treedt er weer een evenwichtstoestand in. Daar de zwaartekracht groter is geworden, is de veerkracht ook toegenomen. De veerkracht is dus afhankelijk van het gewicht dat we aan de veer hangen.

Nemen we het gewicht van de veer af, dan zal de veer zijn oorspronkelijke vorm hernemen. Nu kan het voorkomen dat het gewicht zo groot is geweest, dat de veer zijn oorspronkelijke vorm niet meer aanneemt, doch langer blijft dan ze oorspronkelijk was. Er treedt dan een blijvende vormverandering op.

Laat men een bal vallen, dan wordt de bal ingedeukt, hij tracht echter zijn oorspronkelijke vorm terug te krijgen en springt daardoor weer naar boven (dus door de veerkracht).

Hangen we een lichaam aan een koord, dan merken we de aantrekkingskracht van de aarde, doordat het koord gespannen wordt. Het koord wordt dus iets uitgerekt, waarna weer evenwicht ontstaat. De reactiekracht, die het koord geeft, is verticaal naar boven gericht en heft de zwaartekracht op. Deze reactiekracht noemen we de spanning van het koord.

Het punt waaraan het lichaam is opgehangen, heet het ophangpunt. Er kunnen zich nu drie gevallen voordoen:

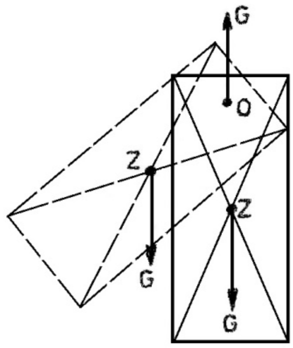

Fig. 8,1.

1°. Het ophangpunt ligt verticaal boven het zwaartepunt van het lichaam (zie fig. 8,1). Draaien we het lichaam een weinig om O uit de evenwichtstand, dan zal het zwaartepunt hoger komen te liggen.
De zwaartekracht tracht echter altijd het zwaartepunt de laagste stand te doen innemen, zodat het lichaam als het losgelaten wordt, zijn vorige strand weer zal innemen. Het lichaam verkeert in dit geval in stabiel evenwicht.

2°. Het ophangpunt ligt in het zwaartepunt van het lichaam. Indien we nu het lichaam en het ophangpunt draaien, zal het zwaartepunt niet van plaats veranderen, dus niet hoger of lager komen. In iedere stand van het lichaam is dit lichaam dus in evenwicht.
Dit soort evenwicht heet indifferent evenwicht.

3°. Het ophangpunt ligt verticaal beneden het zwaartepunt van het lichaam (zie fig. 8,2). Draaien we het lichaam een weinig om O, dan zal de zwaartekracht niet meer opgeheven worden door de reactiekracht, daar ze nu niet meer in elkaars richting tegengesteld werken. Het zwaartepunt beschrijft dan een cirkel met O als middelpunt en de afstand OZ als straal. Het lichaam zal zover draaien tot het zwaartepunt zijn laagste stand heeft bereikt, verticaal onder O. Het lichaam verkeerde in labiel evenwicht (zolang Z boven O ligt).

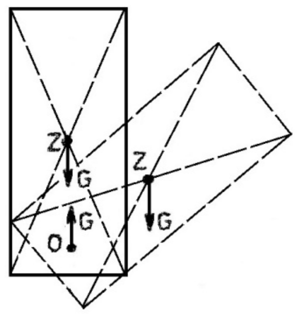

Fig. 8,2.

Is een lichaam op een steunvlak in evenwicht dan kan dit eveneens op de drie in deze les beschreven manieren geschieden.

Een lichaam kan op drie manieren op een vlak steunen.

1°. In één punt, het steunpunt. Als voorbeeld hiervan noemen we een bal. Dit is een voorbeeld van een indifferent evenwicht. Immers geven we de bal een duwtje, dan zal het zwaartepunt toch steeds loodrecht boven het steunpunt blijven.

2°. In twee punten of in een lijn (bv. een cilinder, die op zijn kant ligt). Dit is ook weer een voorbeeld van indifferent evenwicht. Immers het zwaartepunt blijft altijd loodrecht boven de lijn liggen als we de cilinder wentelen.

Dit is echter niet het geval bij een blokje zoals getekend in fig. 8,3.
Dit lichaam verkeert dus in labiel evenwicht.

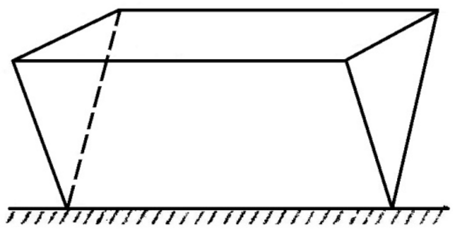

Fig. 8,3.

3°. In een vlak of meer dan 2 punten, bv. een kist, een tafel, een stoel, enz. Kantelen we in dit geval de lichamen, dan zullen de zwaartepunten omhoog gaan, dus is dit evenwicht stabiel, daar de zwaartekracht tracht het zwaartepunt weer de laagste stand te doen innemen.

Kantelen we echte het voorwerp zover dat het voorwerp door de evenwichtsstand wordt bewogen, dan zal het omvallen. Het zwaartepunt is dan over het hoogste punt heen gekomen.

In fig. 8,4 is een lichaam getekend. Kantelen we dit lichaam om de ribbe door A, dan gaat Z omhoog. Z doorloopt een cirkel met straal AZ.

Indien Z loodrecht boven A is gekomen, verkeert het lichaam in labiel evenwicht. Komt Z nu iets rechts van de verticale lijn door A, dan zal het lichaam naar rechts vallen.

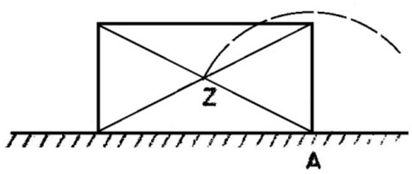

Fig. 8,4.

Ter oefening maken de opgaven 71 t/m 75.
Oplossingen inzenden van de opgaven 76 t/m 80.

9.1. Overzicht van de gevonden betrekkingen over vectoren

Een vector is een grootheid, bepaald door grootte en richting.

De som van twee vectoren wordt gevonden als de diagonaal van het parallellogram dat door de twee vectoren gevormd kan worden.

Het verschil van twee vectoren wordt gevonden door de aftrekker tegengesteld te tekenen en daarna de diagonaal van het parallellogram te bepalen die gevormd wordt door de vector van het aftrektal en de vector die tegengesteld aan de aftrekker genomen is.

De som van meer vectoren kunnen we vinden met behulp van de stangenveelhoek.
De stangenveelhoek vinden we door de vector, die we bij moeten tellen in richting en grootte te tekenen op het uiteinde van de vorige vector. De resultante is de verbindingsvector gerekend vanaf het beginpunt van de eerste vector tot het eindpunt van de stangenveelhoek.

Krachten zijn vectoren, want ze zijn bepaald door grootte en richting. De regels der vectoren gelden dus eveneens voor krachten. Een kracht is uitgedrukt in Newton (N). Om de resultante van een groot aantal krachten, die in een punt aanvatten, te berekenen, ontbinden we ieder van deze krachten in twee componenten langs een rechthoekig assenkruis. Het rechthoekig assenkruis is gekozen met de oorsprong in het punt waar alle hoeken aanvatten.

We tellen nu alle horizontale krachten met inachtname van het teken op. Deze resultanten noemen we K_x. We doen dit eveneens in de verticale richting en vinden K_y. De resultante wordt dan gevonden uit:

$$R = \sqrt{{K_x}^2 + {K_y}^2}.$$

De richting van de resultante vinden we uit:

$$\tan\varphi = \frac{K_y}{K_x}.$$

Voor de richting dienen we goed op de tekens van K_x en K_y te letten, daar hierdoor bepaald wordt in welk kwadrant de resultante ligt.

9.2. Overzicht van de statica

Een lichaam is in rust als er geen kracht op werkt. Als een lichaam in beweging is, zal het zijn baan rechtlijnig vervolgen als er geen oorzaak is die de baan van een rechte lijn doet afwijken of die de snelheid doet veranderen. Dit is de wet der traagheid of inertie.

Een kracht mag langs zijn werklijn verplaatst worden, zonder dat de situatie hierdoor verandert.

De resultante van twee evenwijdige krachten in dezelfde richting werkende, is gelijk aan de som van die krachten, werkt in de richting van die krachten en grijpt aan in een punt van de verbindingslijn der aangrijpingspunten zodanig gelegen dat de afstanden ervan tot die aangrijpingspunten omgekeerd evenredig zijn met die krachten.

De resultante van twee evenwijdige krachten in tegengestelde richting werkende, is gelijk aan het verschil van die krachten, werkt in de richting van de grootste kracht en grijpt aan in een punt op het verlengde van de verbindingslijn van de aangrijpingspunten aan de kant van de grootste kracht zodanig gelegen, dat de afstanden van dit punt tot die aangrijpingspunten evenredig zijn met die krachten.

Zijn beide krachten bij het hier voorgenoemde geval gelijk, dan is er geen resultante. Er werkt dan op dit lichaam een koppel.

Een koppel is een stelsel van twee evenwijdige even grote, tegengesteld gerichte krachten. Een koppel geeft aan een lichaam een draaiende beweging. Draait het lichaam t.g.v. het koppel rechtsom, dan rekenen we het koppel positief, draait het lichaam linksom, dan rekenen we het koppel negatief. Het moment van een koppel wordt gegeven dor de formule:

$$M = K.a \ (in\ Nm).$$

Hierin is a de arm, de loodrechte afstand tussen de twee krachten, uitgedrukt in meters. Daar een koppel ook een richting en een grootte heeft, is een koppel eveneens door een vector voor te stellen, nl. loodrecht op het vlak waarin het koppel gelegen is in een richting toegevoegd volgens de rechtse schroef bij de draairichting van het koppel. Een enkele kracht, die op een afstand op een lichaam werkt, bv. door middel van een verbindingsarm geeft aan dit lichaam eveneens een draaiende beweging. We noemen dit een moment. De grootte van het moment wordt evenals bij een koppel gegeven door de formule:

$$M = K.a \ (in\ Nm).$$

Momentenstelling: Een stelsel verkeert in evenwicht, als de algebraïsche som (dus met inachtneming der tekens) der momenten van de krachten t.o.v. een steunpunt nul is (bv. weegschaal, katrol, enz.).

Hellend vlak: Ontbind de zwaartekracht g in een component loodrecht op het hellend vlak: $g \cos \alpha$ en in een component langs het hellend vlak: $g \sin \alpha$. De evenwichtsvoorwaarden zijn dan:

$N = g \cos \alpha$ (N is de normaalkracht)
$W = g \sin \alpha$ (W is de wrijvingskracht)

De maximale wrijvingskracht is die kracht, waarbij het systeem nog juist in evenwicht is. Deze wordt gegeven door:

$$W_{max} = f.N.$$

Hierin is f de wrijvingscoëfficiënt, deze is afhankelijk van de aard van de wrijvende oppervlakken. Bij een glad oppervlak is f klein, bij een ruw oppervlak groot.

Verder is $f = \tan \varphi$ waarin φ de wrijvingshoek voorstelt.

Evenwicht: We onderscheiden drie soorten evenwicht:

1°. Stabiel evenwicht. Het zwaartepunt ligt onder het ophangpunt.
2°. Indifferent evenwicht. Het zwaartepunt en het ophangpunt vallen samen.
3°. Labiel evenwicht. Het zwaartepunt ligt boven het ophangpunt.

De zwaartekracht tracht altijd het zwaartepunt de laagst mogelijk stand te doen innemen.

Oplossingen inzenden van de opgaven 80 t/m 86.

R.T.

Mechanica. Les 10 Nadruk verboden 19

HILVERSUM

Kinematica of bewegingsleer

10,1. Verschillende soorten van bewegingen

Als een stoffelijk punt in beweging is, bevindt het zich achtereenvolgens in verschillende punten van de ruimte. De meetkundige plaats van al deze punten noemen we de baan of de weg, die het stoffelijk punt heeft doorlopen. Deze weg kan rechtlijnig of kromlijnig zijn. Wij zullen ons voorlopig alleen bezig houden met rechtlijnige bewegingen en definiëren de afgelegde weg als de kortste afstand tussen twee punten. De afgelegde weg geven we in formules aan met de letter s en is uitgedrukt in meters.

De weg vinden we als functie van de tijd, zodat we indien s als $f(t)$ gegeven is, op ieder ogenblik de plaats van het bewegende voorwerp kunnen vaststellen.

Is bv. gegeven, dat $s = 2t^2 + 5t + 3$, dan is op het tijdstip $t = 0$ de afgelegde weg $s = 3$, d.w.z. op het moment dat we de beweging laten beginnen, bevindt het lichaam zich reeds 3 meter rechts van een punt dat als oorsprong is aangenomen. Op het tijdstip $t = 1$, dus na 1 seconde, is $s = 2 + 5 + 3 = 10$, hetgeen gevonden wordt door $t = 1$ in de vergelijking voor s in te vullen. Het punt bevindt zich nu dus na 1 seconde 10 meter rechts van de aangenomen oorsprong. Beschouwen we de vergelijking $s = 2t^2 + 5t - 3$, dan is op $t = 0,\ s = -3$. Daar een afgelegde weg niet negatief kan zijn, bedoelen we hiermee, dat de beweging op het tijdstip $t = 0$ begint in een punt 3 meter links van het punt dat we als oorsprong aangenomen hebben. (we hebben hier dus een nulpunt aangenomen en naar rechts positief naar links negatief gerekend. Dit kan natuurlijk even goed andersom, naar boven of naar beneden.)

10,2. Eenparige beweging

Bij een beweging langs een lijn kan het voorkomen dat in gelijke tijdseenheden, hoe klein ook genomen, gelijke wegen worden afgelegd. Een zodanige beweging noemen we een rechtlijnige eenparige beweging. De definitie van deze beweging luidt als volgt:

Een beweging is een eenparige beweging als in gelijke tijden gelijke wegen worden afgelegd.

Het aantal meters dat per seconde wordt afgelegd, heet de snelheid. We geven de snelheid van een lichaam aan met de letter v.

Wordt in t seconden een weg van s meter afgelegd, dan is de snelheid gegeven als: $v = \frac{s}{t}$.
De snelheid is dus uitgedrukt in meters per seconden (m/sec).

Voor de eenparige rechtlijnige beweging geldt:

$s = v.t$ s in meters; v in m/sec; t in seconden.

Zijn de afstanden die in gelijk tijdseenheden worden afgelegd niet voortdurend even groot, dan heet de beweging een veranderlijke beweging.

Zijn de toename of afname van de snelheid per tijdseenheid even groot, dan noemen we de beweging een eenparig veranderlijk beweging. We onderscheiden hierbij, de eenparig versnelde beweging en de eenparig vertraagde beweging.

10,3. De eenparig versnelde beweging

Een eenparig versnelde beweging is een beweging, waarbij in gelijke willekeurige gekozen tijdsverlopen, de snelheid met hetzelfde bedrag toeneemt.

In iedere seconde neemt de snelheid dus ook met een bepaald bedrag toe, dit bedrag noemen we de versnelling. De versnelling wordt aangegeven met de letter a.

De versnelling is dus de toename van de snelheid per seconde.

In formulevorm is dan $a = \frac{v}{t}$ *of* $v = at$, daar v uitgedrukt is in *m/sec* is a uitgedrukt in: *m/sec/sec* $= m/sec^2$.

Bij een eenparige veranderlijke beweging kan men niet spreken over de snelheid van de beweging, doch wel over de snelheid op een bepaald tijdstip, daar de snelheid tijdens de beweging verandert. Deze snelheidsverandering wordt teweeg gebracht door de werking van een kracht. De snelheid heeft niet alleen op ieder ogenblik een bepaalde grootte doch ook een richting. Dergelijke grootheden noemt men een vector, zoals we reeds geleerd hebben. De snelheid is dus ook een vector.

Veronderstellen we nu dat een lichaam vanuit de rusttoestand een eenparige versnelde beweging krijgt, dan is de snelheid na t seconden geworden:

$$v = at.$$

Indien we v als functie van de tijd uitzetten, vinden we een rechte lijn (fig. 10,1).

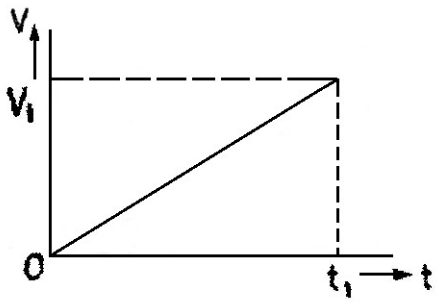

Fig. 10,1.

Na 1 seconde is de snelheid v_1; op tijdstip $t = 0$ is $v = 0$. De gemiddelde snelheid is dus ½ v. We schrijven daar $v = at$, dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan ½ at. Gemiddeld wordt er dus gedurende t seconden per seconde een weg ½ at afgelegd, zodat de weg in t seconden afgelegd, gelijk is aan $t \times$ ½ $at =$ ½ at^2.
We zien dus dat de afgelegde weg gelijk is aan:

$$s = ½\, at^2.$$

Heeft het lichaam op het ogenblik, dat een standvastige kracht er op gaat werken en dus de beweging eenparig versneld gaat worden met een versnelling a reeds een snelheid v_0, dan is na t seconden de snelheid geworden:

$$v_t = v_0 + at.$$

Hierin is v_0 de beginsnelheid, dus de snelheid op tijdstip $t = 0$ uitgedrukt in m/sec; v_t de snelheid op een bepaald tijdsmoment in m/sec; a de versnelling in m/sec^2 en t de tijd in seconden. De weg die door het lichaam in t seconden doorlopen is, is:

$$s = v_0.t + ½\, at^2.$$

We hebben dus nu de volgende formules gevonden voor:

de eenparig versnelde beweging

zonder beginsnelheid	met beginsnelheid v_0
$v_t = at$	$v_t = v_0 + at$
$s_t = ½\, at^2$	$s_t = v_0 t + ½\, at^2$

Voorbeeld: een s.p. P beweegt eenparig met een snelheid van 10 m/sec. 5 sec nadat het uit O vertrokken is, vertrekt een s.p. Q uit O met een eenparig versnelde beweging zonder beginsnelheid. De versnelling is 4 m/sec^2. Waar en wanneer haalt Q P in?
Oplossing: Voor beide bewegingen is de afgelegde weg even lang. Als P $t\ sec$ beweegt, beweegt Q $t - p\ sec$. Nu is $s = v \times t = 10t$ en $s = ½\, at^2 = ½ \times 4 \times t^2 = 2t^2$, dus $10t = 2t^2$.
Hieruit volgt: $t = 0$ (voldoet niet, waarom niet?) en $t = 5\ sec$. Uit $s = 10 \times 5 = 50\ m$. Q haalt P dus in na 5 sec en de punten hebben een afstand van 50 m afgelegd.

Ter oefening maken de opgaven 87 t/m 97.
Oplossingen inzenden van de opgaven 98 t/m 110.

11.1. De eenparig vertraagde beweging

Een eenparig vertraagde beweging is een beweging, waarbij in gelijke willekeurig gekozen tijdsverlopen, de snelheid met hetzelfde bedrag afneemt.

In iedere seconde neemt de snelheid dus ook met hetzelfde bedrag af, dit bedrag heet de vertraging. Ook voor een vertraagde beweging is een kracht nodig, deze kracht is dan tegengesteld gericht aan de richting van de beweging en werkt de beweging tegen.

De formules voor de eenparig vertraagde beweging zijn:

$$v_t = v_0 - at$$
$$s = v_0 . t - ½\, at^2$$

Opmerking: Een eenparig vertraagde beweging zonder beginsnelheid is natuurlijk niet mogelijk.

Voorbeeld: Een lichaam heeft een snelheid van 200 m/sec. Er werkt een kracht op dit lichaam, die veroorzaakt dat het lichaam stil komt te liggen na 20 meter. Hoe lang duurt het voor het lichaam stil ligt en hoe groot is de vertraging?
Oplossing: De beginsnelheid is $v_0 = 200\ m/sec$. De eindsnelheid is nul, dus $v_t = 0$, hieruit volgt: $0 = 200 - at$ dus: $at = 200$. In $s = v_0 . t - ½\, at^2$ ingevuld vinden we:

$$20 = 200.t - ½\, t(at) = 200t - 100t = 100t, \text{ dus:}$$

$$t = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}\ sec.$$

Daar $at = 200$ is: $a.\frac{1}{5} = 200$, dus: $a = 1000$. Dus na $\frac{1}{5}$ seconde ligt het lichaam stil.
De vertraging is $1000\ m/sec^2$.

11.2. Val en worp

Indien we een lichaam dat in rust is, loslaten boven het oppervlak der aarde, dan verkrijgt dit lichaam een beweging, die we de vrije val van het lichaam noemen. Het lichaam wordt aangetrokken door de aantrekkingskracht van de aarde. Men zegt ook wel het lichaam valt ten gevolge van de zwaartekracht.

In de mechanica laten we bij de vrije val andere invloeden dan de zwaartekracht buiten beschouwing, deze kunnen bv. zijn, de wrijving met de lucht, zijwaartse afbuiging door de wind, enz.

We beschouwen daarom de valbeweging in het luchtledige. Galileï heeft aangetoond, dat in het luchtledige alle lichamen even snel vallen. Een veertje en een stukje lood van eenzelfde hoogte losgelaten, zijn in het luchtledige tegelijk beneden. Daar de beweging eenparig versneld is, volgt hieruit, dat de versnelling voor alle vallende lichamen even groot is.
We kunnen dus spreken over de versnelling van de zwaartekracht.

De versnelling van de zwaartekracht wordt voorgesteld door de letter g (afkorting van gravitatie).

Men heeft nu gevonden, dat de versnelling van de zwaartekracht op aarde niet overal even groot is. De versnelling verandert met de breedte van de plaats op aarde. Zij is aan de polen het grootste en aan de equator het kleinste. Dit komt, omdat de aarde niet volkomen bol is, doch aan de polen afgeplat is. Aan de polen bevinden we ons dus dichter bij het middelpunt*[1] van de aarde.

We zeggen dan, dat de versnelling plaats afhankelijk is. De versnelling van de zwaartekracht is aan de equator 9,78 m/sec^2, aan de polen 9,83 m/sec^2, in Amsterdam 9,813 m/sec^2.
In vraagstukken wordt g meestal genomen op 10 m/sec^2, tenzij nadrukkelijk anders gegeven is, rekenen we dus verder altijd met $g = 10\ m/sec^2$.

---

*[1] Daarnaast zorgt de rotatie van de aarde om haar as ervoor dat op voorwerpen op aarde naast de zwaartekracht ook een middelpuntvliedende kracht werkt, min of meer tegen de richting van de zwaartekracht in. (bron: Wikipedia) FV.

Voor de vrije val (dus zonder beginsnelheid) gelden nu de volgende formules:

$$v_t = gt$$
$$s = h = ½\, gt^2$$

Voorbeeld: Een voorwerp valt van een hoogte van 2000 meter. Hoe groot is de snelheid waarmee het op de grond komt en hoe lang duurt de valbeweging?
Oplossing: $h = ½\, gt^2$, dus: $2000 = ½\,.\,10t^2$ of $t^2 = 400$, zodat: $t = 20$. Dus na 20 seconden is het voorwerp beneden. Uit $v_t = gt$ volgt: $v_t = 10.20 = 200\ m/sec$. Dit is dus de snelheid waarmee het voorwerp op de grond komt.

Wordt een lichaam verticaal naar boven geworpen, dan krijgt het een eenparig vertraagde beweging met vertraging g. Dan gelden de volgende formules:

$$v_t = v_0 - gt$$
$$s = v_0 t - ½\, gt^2.$$

Moeten we bv. het hoogste punt dat het voorwerp bereikt, uitrekenen, dan stellen we $v_t = 0$.
Hieruit volgt:

$$v_0 - gt = 0, \text{dus: } t = \frac{v_0}{g}.$$

t ingevuld in de weg-vergelijking, geeft de hoogte, dus:

$$h = v_0.\frac{v_0}{g} - ½\frac{(v_0)^2}{g} = \frac{{v_0}^2}{g} - ½\frac{{v_0}^2}{g} = \frac{{v_0}^2}{2g}.$$

Wordt een voorwerp met een zekere beginsnelheid v_0 van een hoogte h naar beneden geworpen, dan gelden de formules:

$$v_t = v_0 + gt$$
$$h = v_0.t + ½\, gt^2.$$

Willen we de snelheid berekenen waarmee het voorwerp op de grond komt, dan berekenen we t uit de weg-vergelijking, m.b.v. de formule van de vierkantsvergelijking, dus:

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2hg}}{g}$$

(voor het wortelteken is alleen het + teken genomen, immers een tijd is positief en ${v_0}^2 + 2hg$ is groter dan v_0)

t ingevuld in v_t geeft:

$$v_t = v_0 + g\left(\frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2hg}}{g}\right) = v_0 - v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2hg}$$

dus: $v_t = \sqrt{{v_0}^2 + 2hg}$

Voorbeeld: Een voorwerp wordt met een snelheid van 100 m/sec omhoog geworpen.
Wanneer en met welke snelheid komt het voorwerp weer op de grond?

Oplossing: Op het hoogste punt is $v_t = 0 = v_0 - gt$, dus: $0 = 100 - 10t$, dus: $t = 10$.
Na 10 sec is het lichaam op de top. De hoogte is dan te berekenen uit:

$$h = v_0 t - ½\, gt^2 = 100.10 - ½\,.10.100 = 500\ m.$$

Van dit moment af ondergaat het lichaam een vrije val, waarvoor geldt:

$$s = ½\, gt^2, dus: 500 = ½\,.\,10.\,t^2 \text{ of: } t^2 = 100, \text{ zodat: } t = 10\ sec.$$

De totale duur van de beweging is dus 20 sec. (Dit hadden we ook direct mogen zeggen, want toen we berekend hadden dat het voorwerp na 10 sec op top was, waren er ook weer 10 seconden nodig om beneden te komen.) De snelheid waarmee het lichaam op de grond komt is:

$$v_t = g.t = 10.10 = 100\ m/sec.$$

Dus dezelfde snelheid waarmee het omhoog geworpen is.

Ter oefening maken de opgaven 111 t/m 120.
Oplossingen inzenden van de opgaven 121 t/m 130.

12,1. Het samenstellen van een eenparig rechtlijnige beweging en een een eenparig versnelde rechtlijnige beweging

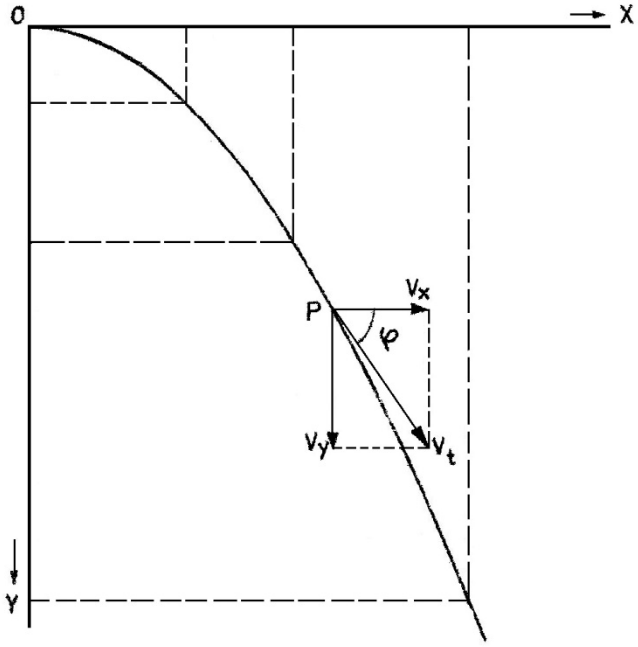

Fig. 12,1.

We veronderstellen dat een stoffelijk punt gelijktijdig een eenparige beweging en een eenparig versnelde beweging uitvoert in twee onderling loodrechte richtingen.

We nemen het snijpunt der beide bewegingen als oorsprong O van een coördinatenstelsel; de richting van de eenparige beweging als x-as en de richting van de eenparig versnelde beweging als y-as. Verder nemen we aan, dat het punt zich op tijdstip $t = 0$ in de oorsprong O bevindt en dat op dit ogenblik de snelheid van de eenparig versnelde beweging gelijk aan nul is.

De verplaatsing ten gevolge van de eenparige beweging is: $x = v_x . t$ (v_x is de snelheid van de eenparige beweging (zie fig. 12,2). De versnelling van de eenparig versnelde beweging noemen we a_y. De verplaatsing ten gevolge van deze beweging is $y = ½\, a_y t^2$.
We kunnen de baan construeren door voor verschillende waarden van t de bijbehorende waarden x en y te berekenen en zo een aantal punten van de baan te bepalen. Om de gehele baan te bepalen zoeken we de betrekking, die er tussen x en y bestaat.
Daartoe elimineren we t uit $x = v_x . t$ en $y = ½\, a_y t^2$.

Uit $x = v_x . t$ volgt: $t = \frac{x}{v_x}$, dit in $y = ½\, a_y t^2$ geeft als vergelijking:

$$y = ½\, a_y \left(\frac{x}{v_x}\right)^2 = \frac{a_y}{2{v_x}^2}\, x^2.$$

Dit is de vergelijking van een parabool zoals we geleerd hebben in de algebra les 56 blz. 111. De snelheid in de x-richting is constant, nl. v_x. De snelheid in de y-richting is $v_y = a_y . t$.
Willen we nu de snelheid op een bepaald ogenblik uitrekenen, dan stellen we v_x en v_y vectorieel samen. In het punt P van de kromme, fig. 10,1 is de snelheid getekend op een bepaald tijdsmoment. Deze snelheid is:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}.$$

De richting van de snelheid is volgens de raaklijn in het punt P aan de baan, deze richting vinden we uit:

$$\tan\varphi = \frac{v_x}{v_y}.$$

Opmerking: De snelheid op een bepaald tijdsmoment is een punt van een kromlijnige beweging is altijd gericht volgens de raaklijn in dit punt van de baan.

12,2. De kogelbaan

We beschouwen een lichaam, dat onder een hoek α, de elevatiehoek genoemd, met beginsnelheid v_0 wordt weggeschoten. We nemen een rechthoekig assenstelsel aan.

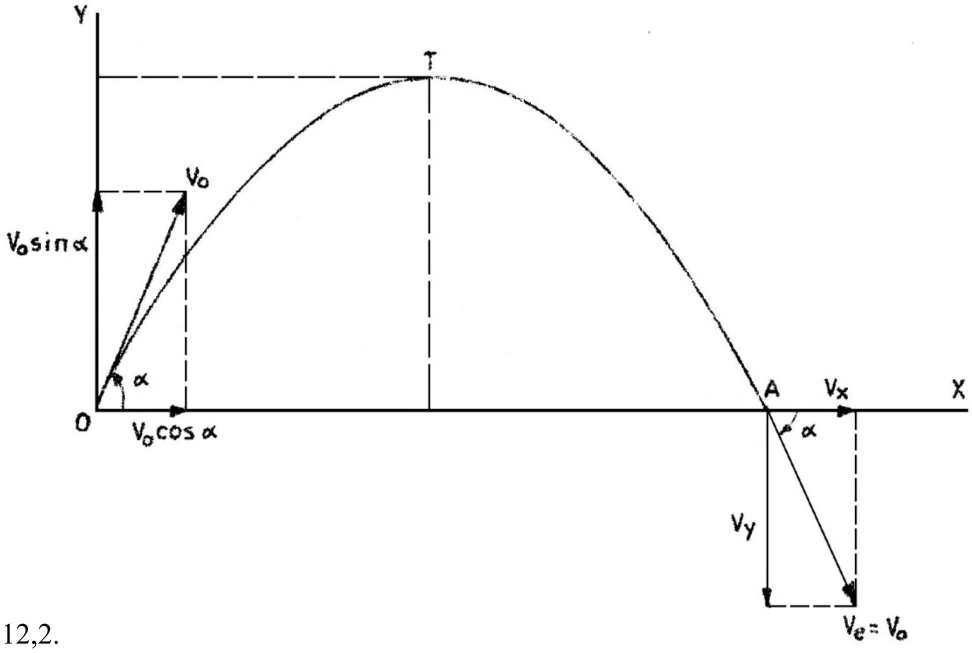

Fig. 12,2.

De beweging wordt langs deze assen ontbonden. In horizontale richting werkt er geen kracht, dus in horizontale richting is de beweging eenparig. Omdat verticaal de zwaartekracht op het voorwerp werkt, zal de beweging in deze richting vertraagd zijn.

De beginsnelheid wordt ontbonden in: $v_x = v_0 \cos\alpha$ en $v_y = v_0 \sin\alpha$.
Voor de snelheid v op het moment t geldt dan: $v_x = v_0 \cos\alpha$ en $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$.

Hieruit volgt voor de grootte en de richting van v:

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ en $\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$. De componenten voor de afgelegde weg zijn op het moment t:

$x = v_0 t \cos\alpha$ en $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$. Uit de eerste volgt: $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Als t in de tweede vergelijking wordt ingevuld volgt voor de baan van het voorwerp: $v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$ of:
$y = \tan\varphi - \frac{g}{2 v_0 cos^2\alpha} x^2$, een vorm van de gedaante $y = A_x + {B_x}^2$, die we in de algebra hebben leren kennen als een parabool.

In het hoogste punt van de baan is $v_y = 0$, dus dan is $v_0 \sin\alpha - gt = 0$, waaruit $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.
Voor de plaats van het hoogste punt is dan: $X_T = v_0 \cos\alpha . \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{{v_0}^2}{2g} \sin 2\alpha$.
De afstand van O tot de plaats waar het voorwerp de grond weer raakt, heet de schootsafstand of worpwijdte. Deze is gelijk aan twee maal de horizontale afstand van O tot T, dus $\frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\alpha$.
De schootsafstand zal maximaal zijn als $\sin 2\alpha$ maximaal is, dus als $\sin 2\alpha = 1$, d.w.z. als $\alpha = 45°$.
De snelheid waarmee het voorwerp op de grond komt, is gelijk aan de beginsnelheid, de richting waar onder het de grond bereikt, is gelijk aan de elevatiehoek.

Opmerking: De schootsafstand kan ook berekend worden door $y = 0$ te stellen. Daar de afstand in verticale richting afgelegd 0 is.

Ter oefening maken de opgaven 131 t/m 135.
Oplossingen inzenden van de opgaven 136 t/m 140.

HILVERSUM

13,1. Eenparige cirkelbeweging

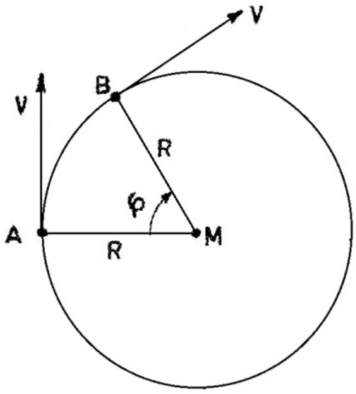

Fig. 13,1.

Bij de eenparige cirkelbeweging worden in gelijke tijden gelijke bogen doorlopen. De snelheid van het bewegende punt is dus constant van grootte, de richting van de beweging en dus ook van de snelheid veranderen voortdurend. (Als voorbeeld van de eenparige cirkelbeweging noemen we een voorwerp dat aan een touw bevestigd wordt rondgeslingerd.)

In fig. 13.1 is een cirkelvormige boog aangegeven met M als middelpunt en R als straal. De omtrek van de cirkel is dus $2\pi R$. De tijd, die nodig is om één omloop te volbrengen, noemen we T. Deze tijd wordt de omloopstijd genoemd. In T seconden wordt dus een weg $2\pi R$ afgelegd. De snelheid waarmee de cirkel doorlopen wordt, noemen we de omtreksnelheid v. Daar deze snelheid constant is, geldt:

$$v = \frac{2\pi R}{T} .$$

De snelheid waarmee de hoek φ doorlopen wordt, noemen we de hoeksnelheid ω. De hoek is uitgedrukt in radialen, dus de hoeksnelheid is uitgedrukt in radialen per seconde (rad/sec). De straal R die we laten draaien noemen we de voerstraal. De voerstraal heeft dus bij een gehele omwenteling een hoek doorlopen die gelijk is aan 2π radialen in een tijd die gelijk is aan de omlooptijd T, zodat voor de hoeksnelheid geldt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

De omlooptijd T wordt ook wel de periode van de beweging genoemd. In T seconden wordt de cirkel eenmaal doorlopen; in 1 seconde dus $\frac{1}{T}$ maal. Het aantal malen per seconde, dat de cirkel doorlopen wordt, noemen we de frequentie van de beweging. Deze duiden we aan met de letter f, zodat:

$$f = \frac{1}{T} \; dus{:} \; \omega = 2\pi f.$$

De hoeksnelheid ω van de voerstraal wordt ook wel de cirkelfrequentie of hoekfrequentie genoemd. f is uitgedrukt in sec^{-1} of Hertz (Hz). Uit de gevonden betrekkingen voor de omtreksnelheid $v = \frac{2\pi R}{T}$ en de hoeksnelheid $\omega = \frac{2\pi}{T}$ volgt nog de betrekking:

$$v = \omega R.$$

Bij een eenparige cirkelbeweging is de grootte van de omtreksnelheid constant. De richting van de snelheid, die hetzelfde is als de richting van de raaklijn aan de doorlopen cirkel verandert echter voortdurend. Er is dus een voortdurende verandering van de snelheid, dus een versnelling.

De grootte van de versnelling kunnen we niet afleiden zonder hulp van de hogere wiskunde, zodat we deze zonder meer geven. Deze versnelling is:

$$a = \frac{v^2}{R} .$$

Deze versnelling noemen we de centripetale versnelling. Voor de centripetale versnelling kunnen we nog schrijven:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R .$$

De centripetale of middelpuntzoekende versnelling is naar het middelpunt toe gericht.

13,2. Harmonische beweging

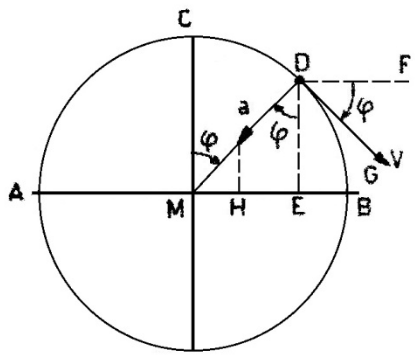

Fig. 13,2.

Wanneer een punt een cirkelbeweging uitvoert, beweegt zijn projectie op een middellijn AB (zie fig. 13,2) van de cirkel heen en weer.
Is de cirkelbeweging eenparig, dan noemen we de heen- en weergaande beweging van zijn projectie op een middellijn een harmonische beweging, ook wel een harmonische trilling.

We nemen aan, dat het bewegende punt zich op het ogenblik $t = 0$ in C bevindt. We projecteren het punt op de middellijn AB, die loodrecht staat op MC. Na een tijd t is het punt in D gekomen.
De hoek tussen MC en MD is φ. Als MC met een hoeksnelheid ω draait, wordt de hoek φ in t seconden doorlopen, zodat $\varphi = \omega t$.

Daar $\angle\, MDE = \angle\, CMD$ is $ME = R\sin\varphi = R\sin\omega t$, waarbij R de straal van de cirkel is.
De afstand tussen de projectie E en het middelpunt M brengen we positief in rekening als E tussen M en B ligt en negatief als E tussen M en A ligt. Met inachtneming van het teken is de projectie van de voerstraal MD op de middellijn AB steeds $R\sin\omega t$. De uitwijking u uit het middelpunt is dus steeds gegeven door:

$$u = R\sin\omega t.$$

De snelheid waarmee punt D de cirkel doorloopt, wordt gegeven door $v = \omega R$ en is gericht volgens de raaklijn in een punt aan de cirkel. Daar $\angle\, GDF = \varphi$ (de benen van $\angle\, BDF$ staan loodrecht op de benen van $\angle\, MDE$) is de projectie van de vector DG, dus van v op de middellijn AB gelijk aan $v\ \cos\varphi = v\cos\omega t = R\omega\cos\omega t$.

De snelheid van het punt E is dus de projectie van de snelheid van het punt D.

De grootte van de centripetale versnelling van het punt D is $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. De grootte van de projectie van de versnelling op de middellijn AB is EH en deze is gelijk aan $a\sin\varphi = R\omega^2\sin\omega t$.

Deze projectie is zoals we in fig. 13,2 zien naar het middelpunt toe gericht. Dus in tegengestelde richting als de harmonische beweging. Deze projectie is dus ten opzichte van de harmonische beweging negatief zodat de projectie is: $-R\omega^2\sin\omega t$.

Steeds is in ieder kwadrant de versnelling van het punt E gelijk aan de projectie van de versnelling van het punt D op de middellijn AB.

We hebben dus gevonden dat bij een harmonische beweging de uitwijking gelijk is aan:

$$u = R\sin\omega t$$

de snelheid waarmee de projectie zich beweegt:

$$v_{proj} = R\omega\cos\omega t$$

en de versnelling van de projectie is:

$$a_{proj} = -R\omega^2\sin\omega t.$$

Hieruit blijkt dat de versnelling van de projectie steeds evenredig is met de uitwijking uit de middenstand, doch met tegengesteld teken. De versnelling is steeds naar het middelpunt toe gericht.

Ter oefening maken de opgaven 141 t/m 145.
Oplossingen inzenden van de opgaven 146 t/m 150.

HTS HILVERSUM

14,1. De slinger

Onder een slinger verstaan we in het algemeen een lichaam dat zich door de werking van de zwaartekracht kan bewegen om een horizontale as. Een slinger kan een vrij ingewikkelde vorm hebben. Om de beweging van een slinger na te gaan beschouwen we de enkelvoudige- of mathematische slinger. Hieronder verstaan we een denkbeeldige slinger, waarbij een stoffelijk punt is opgehangen aan een onrekbare draad die zich in het ophangpunt volkomen vrij, zonder wrijving kan bewegen en waarbij wordt verondersteld dat er geen luchtweerstand werkzaam is. In tegenstelling hiermee wordt een werkelijke slinger een samengestelde slinger of fysische slinger genoemd.

In de rusttoestand (evenwichtsstand) bevindt zich het stoffelijk punt loodrecht onder het ophangpunt O (zie fig. 14,1).

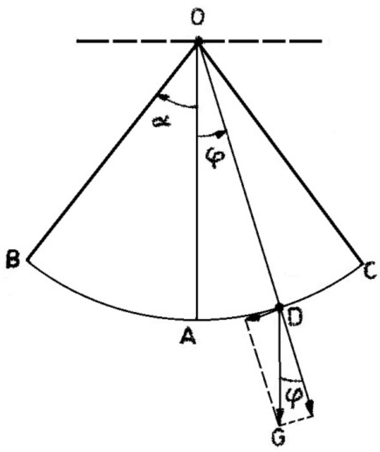

Fig. 14,1. De enkelvoudige slinger.

Brengen we de slinger uit zijn evenwichtsstand (tot in stand B) en laten we het daarna los, dan keert het naar de evenwichtsstand terug en beschrijft daarbij een cirkelboog.
De cirkelboog wordt voorbij de evenwichtsstand A vervolgd, tot de slinger aan de andere kant in C weer tot rust komt. Vervolgens keert de richting van de beweging om en wordt de weg terug afgelegd.

De grootste uitwijkingshoek α noemen we de amplitude van de slingering. Bij een werkelijke slinger wordt de hoek α bij iedere volgende slingering kleiner. Bij de denkbeeldige enkelvoudige slinger blijft α echter steeds even groot. De lengte OA heet de slingerlengte en wordt aangegeven met de letter l.

Op de slinger werkt de zwaartekracht, die verticaal naar beneden is gericht, voorgesteld door de letter g. Deze kracht kunnen we ontbinden in een component gericht volgens de raaklijnen aan de baan en een component loodrecht erop.

Als de hoek DOA, die het koord met de verticaal maakt, φ wordt genoemd, dan is de component van g, die volgens de raaklijn in D gericht is, gelijk aan $g \sin \varphi$. De component, die gericht is volgens de raaklijn in een punt wordt meestal de tangentiële component genoemd. (Immers, de tangens werd in de goniometrie steeds bepaald door de raaklijn aan de cirkel te nemen.)
De component, die loodrecht op de baan in een punt staat, wordt de normale component genoemd.
De zwaartekracht g is dus te ontbinden (in fig. 14,1 punt D) in de tangentiële component $g \sin \varphi$ en de normale component $g \cos \varphi$.

De normale component houdt het koord gespannen. In het ophangpunt O ontstaat een even grote tegengesteld gerichte reactiekracht, die de normale component opheft. Hieruit volgt, dat alleen de tangentiële component van de kracht g invloed heeft op de beweging. De spanning in het koord levert de centripetale kracht (middelpuntzoekende kracht), die nodig is om het stoffelijk punt op de cirkelvormige baan te houden.

We brengen het stoffelijk punt in B en laten het los op tijdstip $t = 0$. De kracht in de richting van de baan is dan $g \sin \alpha$, de snelheid is dan $v_0 = 0$.

De hoek wordt kleiner als OB tot OA nadert, indien we de hoek die het koord t.o.v. de evenwichtsstand OA inneemt φ noemen, dan wordt de tangentiële component van de zwaartekracht $g \sin \varphi$, dus slechts kleiner daar φ tot nul nadert ($\varphi = 0$ als het koord door de evenwichtsstand OA gaat).

Daar de kracht, die op het voorwerp werkt dus niet constant is, is de beweging tot de evenwichtsstand, hoewel een versnelde beweging, geen eenparig versnelde beweging.

Is het lichaam door de evenwichtsstand gegaan, dan ondergaat het lichaam een vertraagde beweging, doch geen eenparig vertraagde beweging.

Bij de slingering van het voorwerp staat dit voorwerp bij B en C even stil, terwijl het voorwerp bij A de grootste snelheid heeft.

De boog, die doorlopen wordt van het ene hoogste punt naar het andere, heet de slingerwijdte. De tijd , waarin deze slingerwijdte doorlopen wordt, heet de slingertijd. Door de natuurkundige Christiaan Huygens is afgeleid, dat de slingertijd (wanneer de slinger kleine schommelingen maakt) wordt bepaald door de formule:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van de slinger in meters en g de versnelling van de zwaartekracht in m/sec^2.

Uit de formule van de slingertijd blijkt, dat deze onafhankelijk is van de aantrekkingskracht van de aarde m.a.w. onafhankelijk van het gewicht van het lichaam.

Worden aan twee even lange slingers twee even grote voorwerpen gehangen met hetzelfde gewicht, dan volbrengen beide in dezelfde tijd dezelfde slingering.

Verder zien we in de formule van T, dat de slingertijd onafhankelijk is van de slingerwijdte, d.w.z. grote en kleine schommelingen worden in dezelfde tijd volbracht.

(De schommelingen mogen niet te groot worden daar de formule voor T ook een benaderde formule is en alleen geldt voor kleine schommelingen.)

De slingertijd is echter <u>wel</u> afhankelijk van de slingerlengte. Dit is nl. de enige term die we kunnen veranderen. De slingertijd blijkt volgens bovenstaande formule evenredig te zijn met de <u>wortel</u> uit de slingerlengte.

Verder kunnen we nog opmerken dat het slingerende punt een harmonische beweging uitvoert.

<u>Voorbeeld</u>: Hoe groot is de slingertijd van een slinger met een slingerlengte van 40 cm?

<u>Oplossing:</u> $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{40.10^{-2}}{10}} = \pi\sqrt{4.10^{-2}} = 2\pi.10^{-1} = 0{,}2\pi = 0{,}628.$

De slingertijd is dus: 0,628 seconden.

Ter oefening maken de opgaven 151 t/m 155.
Oplossingen inzenden van de opgaven 156 t/m 160.

HILVERSUM

15.1. Overzicht van de in de kinematica gevonden betrekkingen

Indien er op een lichaam geen kracht werkt, is dit voorwerp in rust of heeft een eenparige beweging.

De vergelijking voor de eenparige beweging is:

$$s = v.t$$

s in meters, t in seconden, v in meters per seconden.

Indien er op een lichaam een kracht werkt, krijgt dit lichaam een eenparig veranderlijke beweging.

Werkt de kracht in de richting van de beweging, dan is de beweging eenparig versneld; werkt de kracht tegen de richting van de beweging in, dan is de beweging eenparig vertraagd.

Voor de eenparig versnelde beweging gelden de formules:

$$v_t = at$$
$$s = ½\, at^2.$$

Voor de eenparig versnelde beweging met beginsnelheid v_0 gelden de formules:

$$v_t = v_0 + at$$
$$s_t = v_0 t + ½\, at^2.$$

Hierin is v_t de snelheid op een bepaald tijdsmoment uitgedrukt in m/sec. v_0 is de beginsnelheid in m/sec; a is de versnelling in m/sec^2; t is de tijd in seconden; s_t is de afgelegde weg in meters.

Voor de eenparig vertraagde beweging geldt:

$$v_t = v_0 - at$$
$$s_t = v_0.t - ½\, at^2.$$

Voor de vrije val geldt:

$$v_t = gt$$
$$s_t = h - ½\, gt^2.$$

Hierin is g de versnelling van de zwaartekracht, uitgedrukt in m/sec^2. De waarde van g is 9,81 m/sec^2. In opgaven nemen we, indien g niet gegeven is: $g = 10\ m/sec^2$.

De versnelling van de zwaartekracht is op aarde niet overal even groot, zij is plaatsafhankelijk. Door de afplatting der aarde aan de polen is de zwaartekracht aan de evenaar groter (verder van het middelpunt der aarde verwijderd) dan aan de polen.

Wordt een voorwerp verticaal omhoog geworpen, dan gelden de formules:

$$v_t = v_0 - gt$$
$$s_t = v_0.t - ½\, gt^2.$$

De kogelbaan

De kogelbaan is een parabool-baan.

De beweging wordt ontbonden in twee componenten, nl. een horizontale component en een verticale component. In de horizontale richting werkt er geen kracht op het lichaam, dus in de horizontale richting rekenen we met een eenparige beweging. Is de elevatiehoek α en de beginsnelheid v_0, dan geldt voor de horizontale beweging:

$$v_x = v_0 \cos a$$
$$x = v_0 \cos a.t$$

In de verticale richting werkt de versnelling van de zwaartekracht.
Het is dus een eenparig vertraagde beweging, hiervoor geldt:

$$v_y = v_0 \sin a - gt$$
$$y = v_0 \sin a.t - ½ gt^2.$$

De grootte van de snelheid vinden we op ieder moment der beweging uit:
$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$; de snelheid is gericht volgens de raaklijn in het beschouwde punt aan de baan.
Deze richting vinden we uit $\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$.

De baanvergelijking wordt gevonden door uit x en y de t te elimineren.
Het hoogste punt van de baan is te berekenen uit $v_y = 0$, hieruit volgt de tijd t, die nodig is om de top te bereiken. Vullen we deze t in x in, dan vinden we de horizontale afstand van de top tot het begin-punt. Vullen we deze t in y in, dan vinden we de hoogte van de top.

Om de schootsafstand te bepalen, kunnen we rekenen met $y = 0$, daaruit de tijd t te berekenen en deze in x in te vullen. Ook is het mogelijk om $2 \times$ de afstand te nemen , die we voor x voor de top hebben berekend. Het voorwerp komt verder met dezelfde snelheid en onder dezelfde hoek op de grond als waarmee het vertrokken is.

<u>Eenparige cirkelbeweging</u>

Bij een omwenteling van het lichaam wordt door het lichaam een weg afgelegd, die gelijk is aan $2\pi R$. De tijd die nodig is om eenmaal een omwenteling te maken, geven we aan met T, de omlooptijd. De snelheid die hierbij optreedt is dan:

$$v = \frac{2\pi R}{T} .$$

De snelheid waarmee de hoek doorlopen wordt, noemen we de hoeksnelheid, aangegeven met de letter ω en uitgedrukt in radialen per seconde (rad/sec). De omloopstijd is weer T, zodat, daar bij 1 omwenteling een hoek 2π radialen wordt doorlopen, de hoeksnelheid gegeven wordt door de formule:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Het aantal malen per seconde dat de cirkel of de hoek doorlopen wordt, noemen we de frequentie, deze wordt aangegeven met de letter f en uitgedrukt in sec^{-1} of Hertz (Hz). Dit ingevuld in: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ geeft:

$$\omega = 2\pi f.$$

Uit $v = \frac{2\pi R}{T}$ en uit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ volgt verder nog:

De centripetale versnelling wordt gegeven door de formule:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

<u>Harmonische beweging</u>

Indien een stoffelijk punt met een eenparige snelheid een cirkel doorloopt, dan noemen we de beweging van de projectie op een middellijn van die cirkel een harmonische beweging, of harmonische trilling. De uitwijking van die projectie uit de evenwichtsstand wordt op ieder tijdstip gegeven door de formule:

$$u = R \sin \omega t.$$

<u>De slinger</u>

Hierbij onderscheiden we de mathematische en de fysische slinger.
De mathematische slinger is een theoretische slingerbeweging en de fysische slinger de werkelijke.
De slingertijd wordt gegeven door de formule:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hierin is g de versnelling van de zwaartekracht in m/sec^2, l de lengte van de slinger, uitgedrukt in meters.

Oplossingen inzenden van de opgaven 161 t/m 165.

Dynamica of leer der krachten

16,1. Kracht en massa

Als een zich in rust bevindend lichaam in beweging komt, of als van een in beweging zijnd lichaam de grootte of de richting van de snelheid of beide verandert, is hiervoor een oorzaak aanwezig. Zonder oorzaak komt er geen verandering in de toestand tot stand. Deze oorzaak van de verandering in de bewegingstoestand noemen we een kracht.

De verandering van de snelheid per tijdseenheid, dus per seconde, noemen we de versnelling. Een kracht is dus de oorzaak van een versnelling.

Omgekeerd treedt er alleen dan een versnelling op als er een kracht werkzaam is.
Een versnelling heeft een bepaalde richting. Aan de kracht die de versnelling veroorzaakt, kennen we dezelfde richting toe als aan de versnelling.

Een kracht heeft een bepaalde grootte. Verschillende krachten geven aan eenzelfde lichaam verschillende versnellingen.

De krachten zijn evenredig met de versnellingen, die zij aan eenzelfde lichaam geven.
Uit de ervaring weten we, dat om verschillende lichamen een even grote versnelling te geven, de vereiste krachten verschillend zijn. De "traagheid" van verschillende lichamen is verschillend.
Dit drukken we uit door te zeggen, dat de massa's van verschillende lichamen verschillend zijn.
We spreken af, dat we de massa's der lichamen evenredig stellen met de krachten die nodig zijn om eenzelfde versnelling te geven. Geven gelijke krachten aan twee verschillende lichamen een even grote versnelling, dan zijn de massa's der beide lichamen gelijk. De massa van een lichaam geven we aan met de letter m. Daar de kracht aangegeven werd met de letter K en de versnelling met de letter a, geldt de formule:

$$K = fma.$$

Deze formule geeft dus het verband aan tussen de massa m van een lichaam, de kracht K die er op werkt en de versnelling a die het lichaam krijgt ten gevolge van de kracht die er op werkt.

De kracht en de versnelling hebben een grootte en een richting, dus zijn het vectoren.
De massa van een lichaam bezit alleen maar grootte, het is dus geen vector. Een lichaam dat alleen maar een grootte heeft en geen richting noemen we een scalar.

Als eenheid van massa is de kilogram (kg) genomen.

Het standaard-kilogram waarmee alle andere gewichten van 1 kg worden vergeleken en dat van platina is vervaardigd om te voorkomen dat atmosferische- en andere invloeden verandering zouden kunnen brengen, wordt te Sèvres bij Parijs bewaard.

De eenheid van versnelling is m/sec^2. De eenheid van kracht is zo genomen dat in de formule $K = fma$ de evenredigheidsfactor f gelijk aan 1 wordt. Deze eenheid van kracht heet de Newton, afkorting N. Met deze keuze van de eenheden vinden we de formule:

$$K = ma \qquad \begin{array}{l} K \text{ in Newton} \\ m \text{ in kg} \\ a \text{ in } m/sec^2 \end{array}$$

Een kracht van 1 Newton is dus de kracht die aan een massa van 1 kg een versnelling 1 m/van sec^2 geeft.
In woorden luidt deze wet: kracht = massa × versnelling.

16,2. De zwaartekracht

Alle lichamen worden door de aarde aangetrokken. Dit is ons bekend, dit leert de ervaring.
Een voorwerp dat losgelaten wordt, valt rechtstandig naar beneden; een voorwerp, dat we op de hand leggen, voelen we op de hand drukken, enz.

Het is proefondervindelijk vastgelegd dat een kracht van 1 N ongeveer gelijk is aan de kracht waarmee een massa van 0,1 kg door de aarde wordt aangetrokken. De versnelling die het lichaam met massa m krijgt, noemen we de versnelling van de zwaartekracht. We geven deze aan met de letter g, uitgedrukt in m/sec^2. In een van de vorige lessen hebben we hier reeds kennis mee gemaakt.

De aantrekkingskracht van de aarde stellen we voor door de letter G.
Deze kracht noemen we het gewicht van het lichaam. Hierdoor is de formule voor de zwaartekracht te geven door de formule:

$$G = m.g.$$

G is weer uitgedrukt in Newton, m in kg en g $in\ m/sec^2$. We hebben reeds gezien, dat de versnelling van de zwaartekracht g afhankelijk was van de plaats op aarde. Daarom zeiden we ook, dat de kracht van 1 N ongeveer gelijk is aan de kracht waarmee een massa van 0,1 kg door de aarde wordt aangetrokken. Daar de versnelling g plaatsafhankelijk is, is ook het gewicht van een lichaam G afhankelijk van de plaats op aarde, waar we ons bevinden.

De verhouding $\frac{G}{g} = m$ is echter steeds constant. We stellen de massa van een voorwerp meestal voor als een stoffelijk punt, zodat we het gehele gewicht geconcentreerd denken in één punt .

16,3. Eenhedenstelsel

Als lengte-eenheid wordt de meter gebruikt die gedefinieerd is als de lengte van een platina-iridium staaf , die eveneens bewaard wordt te Sèvres bij Parijs.

Als eenheid van massa is het kilogram ingevoerd zoals we in 16,1 hebben gezien.
Als eenheid van tijd wordt steeds de seconde gebruikt die samenhangt met de omwentelingstijd van de aarde. Het stelsel dat hierop gebaseerd is en waarin de gehele cursus geschreven is, is het meter-kilogram-seconde-stelsel (m.kg.s.-stelsel) ook wel genoemd het *[2]giorgistelsel.

Het giorgistelsel is ook als het praktische stelsel in de elektrotechniek ingevoerd.
Er bestaan nog vele eenhedenstelsels, waarvan we noemen het centimeter-gram-seconde-stelsel (c.g.s.-stelsel) het elektrostatische c.g.s.-stelsel, het elektromagnetisch c.g.s.-stelsel, enz.

Al deze stelsels worden wel absolute stelsels genoemd, waarmee men wil zeggen dat de bepaling van alle grootheden (elektrische, magnetische en mechanische) na definiëring der evenredigheidsfactoren teruggebracht kunnen worden tot de bepaling van lengte, massa en tijd.

Bij relatieve eenheden bv. worden onbekende grootheden (bv. weerstanden etc.) vergeleken met iets (bv. bij weerstanden vergelijking met een kwikkolom van gegeven lengte en doorsnede) dat per definitie een zekere waarde heeft.

Ter oefening maken de opgaven 166 t/m 172.
Oplossingen inzenden van de opgaven 173 t/m 180.

[2] * Het stelsel van eenheden (SI) .Internationale. Het IViKSA-stelsel van eenheden ook wel genoemd het Giorgi-stelsel, is enige tijd geleden internationaal als voorkeursstelsel van eenheden aanvaard. Dit systeem wordt ook wel aangeduid als het Sl-stelsel, afgeleid van Système internationale d'Unités. (bron: Huweschap.com) FV

17.1. De centripetale kracht bij een eenparige cirkelbeweging

Bij de behandeling van de eenparige cirkelbeweging hebben we gezien dat er een versnelling optrad, de centripetale versnelling. We hebben hiervoor gegeven:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Als een lichaam met een massa m eenparig een cirkel doorloopt, moet er dus een kracht op werken die deze versnelling veroorzaakt. De versnelling is naar het middelpunt gericht; de kracht dus eveneens, want deze heeft dezelfde richting als de versnelling. Deze naar het middelpunt gerichte kracht wordt de centripetale kracht genoemd. De snelheid, die gericht is volgens de raaklijn in ieder punt van de baan, wordt ook wel de tangentiële snelheid genoemd en is aangenomen met de letter v.

Daar deze tangentiële snelheid constant is, werkt er dus geen tangentiële kracht. Om dus een lichaam een cirkelvormige baan eenparig te laten doorlopen, is er voor nodig, dat er aan het lichaam eenmaal een tangentiële snelheid v wordt gegeven en dat er daarna voortdurend een centripetale kracht op werkt, waarvan de grootte is:

$$K = ma = m.\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Zou deze kracht op een bepaald ogenblik ophouden te werken, dan vervolgt het lichaam zijn weg in de richting van de snelheid die het dan heeft, dus volgens de raaklijn aan de cirkel in het punt waar het lichaam zich bevindt op het ogenblik dat de centripetale kracht ophoudt. De kracht die het draaiende lichaam zelf uitoefent, is even groot doch tegengesteld gericht aan de centripetale kracht.
We noemen deze kracht de centrifugale kracht.

Voorbeeld: Een vliegwiel met een middellijn van 3 m maakt 2 omwentelingen per seconde.
Hoe groot is centripetale versnelling van een punt van de omtrek van het wiel?
Oplossing: De centripetale versnelling wordt gegeven door de formule: $a = \omega^2 R$. We gebruiken deze formule en niet $a = \frac{v^2}{R}$ daar het aantal omwentelingen per seconde, dus de frequentie is gegeven.
Daar $\omega = 2\pi f$ vinden we: $a = \omega^2 R = (2\pi f)^2 R = 4.\pi^2.2^2.\frac{3}{2} = 4.10.4.\frac{3}{2} = 240\ m/sec^2$ (Voor π^2 hebben we 10 genomen.)

Voorbeeld: Een lichaam met een massa van 2 kg beschrijft een cirkelvormige baan. De middellijn van de cirkel is 1 m. De baan wordt met constante snelheid doorlopen in ½ sec. Hoe groot is de centripetale kracht die op het lichaam werkt?
Oplossing: De baan wordt met constante snelheid doorlopen in ½ sec, dat wil zeggen:
$T = ½$, dus $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Dus 2 omwentelingen per seconde, dan is $\omega = 2\pi f = 4\pi$.
De centripetale kracht is gegeven door $K = m\omega^2 R = 2.(2\pi f)^2.R = 2.4.\pi^2.4.½ = 160\ N$.

17.2. Arbeid

In de mechanica denken we niet aan de mens, het dier of de machine die de arbeid verricht, maar alleen aan de kracht die wordt uitgeoefend om die arbeid te verrichten. We hebben gezien dat de kracht een lichaam in beweging kan brengen of de bestaande beweging kan veranderen. Nu is het mogelijk dat de kracht in de richting van de beweging werkt, of een hoek maakt met de bewegingsrichting. Als een kracht op een lichaam werkt en daardoor het lichaam in beweging brengt en de richting van de kracht valt samen met de richting van de beweging, dan stellen we de arbeid die door die kracht verricht wordt, gelijk aan het product van de kracht en de afstand waarover het lichaam door die kracht verplaatst is. De afstand waarover het lichaam verplaatst is heet weer de afgelegde weg, zodat geldt:

Arbeid = kracht × weg of in formulevorm: $A = K \times s.$

Daar de weg is uitgedrukt in meter en de kracht in Newton is de arbeid uitgedrukt in Newton-meter (Nm.). De tijd die voor de verplaatsing van het lichaam nodig is, is niet van invloed zoals uit de formule blijkt, terwijl ook de massa hierop geen invloed uitoefent. Werkt dus een kracht van $20\ N$ op een lichaam gedurende enige tijd en wordt het lichaam dan over 15 meter verplaatst in de richting van de kracht, dan heeft de kracht een arbeid verricht van $20 \times 15 = 300\ Nm$. Werkt een kracht op een lichaam met een bewegingsrichting loodrecht op die kracht en wordt het lichaam in de richting van de kracht niet verplaatst, dan zeggen we dat deze kracht geen arbeid verricht heeft. Hoewel er dus wel een weg door het lichaam wordt afgelegd en hoewel er dus wel een kracht op werkt, is de arbeid door de kracht verricht gelijk aan nul.

Rust een lichaam op een horizontaal vlak, dan werkt op dit lichaam de zwaartekracht.
Het ondersteuningsvlak oefent op het lichaam een even grote reactiekracht uit (dus tegengesteld gericht aan de zwaartekracht). Verplaatsen we nu het lichaam over het ondersteuningsvlak, dan is de verplaatsingsrichting loodrecht op de richting van de zwaartekracht en van de reactiekracht.
De zwaartekracht en de reactiekracht verrichten bij het verplaatsen dus geen arbeid; de arbeid wordt verricht door de kracht die het lichaam horizontaal verplaatst.

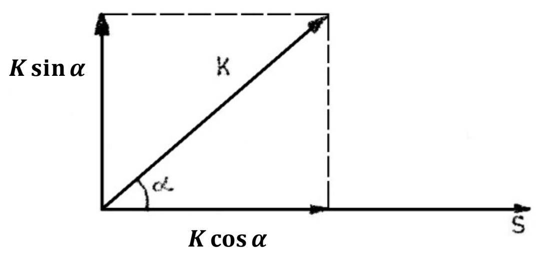

Fig. 17,1.

Indien de kracht een constante hoek α maakt met de richting van de weg die het aangrijpingspunt van de kracht doorloopt, dan kunnen we de kracht ontbinden in twee onderlinge loodrechte componenten, nl. een component in de richting van de weg: $K \cos \alpha$ (zie fig. 17,1) en een component loodrecht op de richting van de weg $K \sin \alpha$.

Deze laatste component $K \sin \alpha$ staat loodrecht op de bewegingsrichting en verricht dus geen arbeid.

De component $K \cos \alpha$ verricht een arbeid die gelijk is aan $K.s \cos \alpha$. De totaal verrichte arbeid is dus het product van de component van de kracht in de richting van de weg vermenigvuldigd met de afgelegde weg.
De component van de kracht in de richting van de weg is dus de projectie van de kracht op de weg.
Algemeen is de door de kracht verrichte arbeid:

$$K.s \cos \alpha$$

waarin α de hoek is tussen de kracht K en de weg s.

Immers is de richting van K en s dezelfde, dan is $\alpha = 0$, dus $\cos \alpha = 1$,
waaruit volgt: $A = K.s$. Staat K loodrecht op s, dan is $\alpha = 90°$ en daar $\cos 90° = 0$ is de arbeid gelijk aan nul.

Is hoek α stomp, dan is $\cos \alpha$ negatief, zodat de arbeid negatief is, dit komt voor als de kracht of de projectie van de kracht op de weg tegengesteld gericht is aan de bewegingsrichting.

Ter oefening maken de opgaven 181 t/m 185.
Oplossingen inzenden van de opgaven 186 t/m 190.

Mechanica. Les 18

18,1. Arbeid (vervolg)

In de vorige les hebben we gezien dat de arbeid gegeven werd door de formule $A = Ks\cos\alpha$. We hadden hierin, als de kracht K en de weg s een hoek α met elkaar maakten, de projectie van de kracht K op de afgelegde weg s genomen. Het is echter ook mogelijk de projectie van de weg s op de kracht K te nemen; het resultaat is dan natuurlijk hetzelfde.

De kracht en de weg hebben ieder weer een richting en een grootte, het zijn dus vectoren. De arbeid echter bezit geen richting, alleen grootte, het is dus een scalar.

Een hoeveelheid arbeid wordt ook wel energie genoemd, arbeid en energie geeft dus hetzelfde begrip aan. We kunnen dit samenvatten in de regel:

Arbeid en energie zijn gelijkwaardig.

In de vorige les hebben we gezegd dat de arbeid onafhankelijk is van de massa van het bewegende lichaam. Beschouwen we echter de formule $A = Ks\cos\alpha$ nog eens, dan zien we daarin voorkomen de kracht K die op een lichaam werkt.
Daar $K = ma$ kunnen we ook schrijven $A = mas\cos\alpha$. Hieruit zou volgen dat de arbeid wel afhankelijk is van de massa van het verplaatste lichaam. Echter werkt de kracht K op een massa m, dan moet het product massa × versnelling, dus $m \times a$ constant blijven. Dus wordt de massa groter, dan wordt de versnelling kleiner en omgekeerd. Voor de verrichte arbeid interesseert ons dus alleen de waarde K en niet die van de massa.

Voorbeeld: Een auto rijdt met een snelheid van 72 km/uur. De bestuurder moet plotseling stoppen en staat na 10 meter stil (de remweg is dus 10 meter). Als de massa van de auto 1000 kg is, hoe groot is dan de remkracht?
Oplossing: Als de auto stil staat, is de eindsnelheid nul. De beweging is een eenparig vertraagde beweging met een beginsnelheid van:

$$72\ km/uur = \frac{72 \times 1000}{3600}\ m/sec = 20\ m/sec\ .$$

Zodat uit: $v_t = v_0 - at$ volgt: $0 = 20 - at$ of: $at = 20$.

Daar de remweg 10 meter is, volgt uit: $s = v_0 t - ½at^2$

$$10 = 20.t - ½at^2 = 20.t - ½\,(at).t.$$

Daar $at = 20$ vinden we: $10 = 20t - 10t = 10t$, dus: $t = 1$, hieruit volgt dat de auto na 1 seconde stil staat. Daar $at = 20$ volgt hieruit dat de versnelling gelijk is aan $a = \frac{20}{t} = \frac{20}{1} = 20\ m/sec^2$.

De kracht waarmee de bestuurder moest remmen was dus $k = ma = 1000.20 = 20.000\ N$.
(opmerking*[3]: Bij het werkelijke remproces bij een auto worden de wielen geblokkeerd, zodat dan de wrijvingskracht tussen de banden en het wegdek de arbeid verricht.)

18,2. Vermogen

De arbeid die door een kracht wordt verricht is onafhankelijk van de tijd die daarvoor wordt gebruikt. In de praktijk is het echter wel van belang te weten in welke tijd een bepaalde arbeid wordt verricht. Daartoe voeren we het begrip vermogen in.

Onder het vermogen verstaan we de hoeveelheid arbeid, die per tijdseenheid wordt verricht.
De eenheid van vermogen is dus de eenheid van arbeid per seconde, dus 1 Nm/sec. Hiervoor is een afzonderlijke naam in gebruik: de Watt (afgekort W). Dus:

$$1\ Newtonmeter\ per\ seconde = 1\ Watt\ (1\ Nm/sec = 1\ W).$$

[3]* Tegenwoordig zijn auto's verplicht uitgerust met ABS. Bij ABS wordt het remmen elektronisch geregeld. Een sensor in de wielen detecteert bij het remmen of een wiel dreigt te blokkeren. Indien dat het geval is, neemt het ABS kort remkracht weg. Wanneer de dreigende blokkering is opgeheven, wordt de remkracht weer hersteld totdat de wielen opnieuw dreigen te blokkeren. Deze techniek wordt ook wel "pompend remmen" genoemd, maar het elektronische ABS kan dit veel sneller en preciezer dan een mens. (Bron: Wikipedia) FV

In woorden:

Vermogen is arbeid per tijdseenheid.

Het vermogen wordt aangegeven met de letter P, zodat geldt: $P = \frac{K.s}{t}$. Daar $\frac{s}{t}$ gelijk is aan de snelheid v bij een eenparige beweging is het vermogen ook te schrijven als $P = K.v$.

Voorbeeld: Werkt een kracht van 25 Newton gedurende 5 sec op een lichaam met een massa van 4 kg, waarbij het lichaam over een afstand van 6 meter verplaatst wordt in de richting van de kracht, dan heeft deze kracht een arbeid verricht die gelijk is aan: $K \times s = 25 \times 6 = 150\ Nm$. Het vermogen dat door de kracht is geleverd is: $\frac{150}{5} = 30\ Nm/sec = 30\ W$. Zou nu bv. in dit voorbeeld onder dezelfde voorwaarden de kracht gedurende 10 sec hebben gewerkt, dan zou de verrichte arbeid (kracht × weg) hetzelfde gebleven zijn; het geleverde vermogen zou nu $\frac{150}{10} = 15\ W$ dus de helft van het eerste vermogen zijn.

Hadden we de tijd twee maal zo klein genomen, dan was het vermogen twee maal zo groot geworden enz. De besproken wetten gelden alleen als de kracht constant is en de beweging eenparig. Is dit niet het geval, dan is het vermogen gedurende de gehele beweging niet constant en kunnen we alleen spreken over het vermogen op een bepaald ogenblik.

We hebben gezien dat het vermogen uitgedrukt wordt in Watt en de arbeid of energie in Nm. Daar het vermogen gelijk is aan de arbeid of energie per tijdseenheid, geldt dus ook dat de arbeid gelijk is aan vermogen × tijd, zodat we kunnen zeggen:

$$1\ Wattseconde = 1\ Newtonmeter\ (1\ W.sec = 1\ Nm).$$

Daar in de praktijk de Watt een wel wat kleine eenheid is voor het vermogen, wordt ook wel als eenheid van vermogen de kilowatt (kW) gebruikt. 1 kilowatt $= 1000$ Watt.
Voor arbeid gebruiken we dan ook wel i.p.v. de wattseconde, de kilowattseconde.
1 kilowattseconde $= 1000$ wattseconde. Liever gebruiken we echter nog i.p.v. kilowattseconden de eenheid kilowattuur (kWh). (Uur wordt aangeduid met de letter h, de eerste letter van het Latijnse woord hora, dat uur betekent.)

Uit bovenstaande regel volgt:

1 kWh $= 3600.000\ Wsec$.

In de elektrotechniek gebruikt men als eenheid van arbeid of energie nooit de eenheid Newtonmeter, doch als eenheid de Joule (afgekort J).

We vinden dus:

$$1\ Wsec = 1\ Nm = 1\ J.$$

In woorden: 1 Wattseconde = 1 Newtonmeter = 1 Joule.

Hiermee kunnen we dus van de mechanische eenheden overgaan op de elektrotechnische en omgekeerd van de elektrotechnische eenheden naar de mechanische.

Ter oefening maken de opgaven 191 t/m 198.
Oplossingen inzenden van de opgaven 199 t/m 205.

19,1. De arbeid verricht door een aantal krachten

Werken er op een lichaam een aantal krachten, dan verrichten bij een verplaatsing van het lichaam enige of alle krachten arbeid. De totale arbeid die verricht wordt, is de som van de hoeveelheden arbeid door ieder van die krachten verricht. We ontbinden alle krachten in componenten die gericht zijn volgens de bewegingsrichting van het lichaam en in componenten die loodrecht op die bewegingsrichting staan. (Dus op dezelfde manier ontbinden als we geleerd hebben bij het bepalen van de resultante van een aantal krachten.)

Alle componenten van de krachten die loodrecht op de bewegingsrichting staan, verrichten geen arbeid. De totale arbeid die door de krachten verricht wordt, bepalen we uit de som der componenten van de krachten die in de richting van de beweging vallen, vermenigvuldigd met de afgelegde weg.

We kunnen ook anders te werk gaan bij het bepalen van de totale arbeid, nl. door eerst de resultante van de krachten te bepalen en daarna de ontbonden component van de resultante te berekenen die in de richting van de weg valt. Deze ontbonden component van de resultante vermenigvuldigd met de weg geeft dan weer dezelfde arbeid.

19,2. De arbeid door een koppel verricht

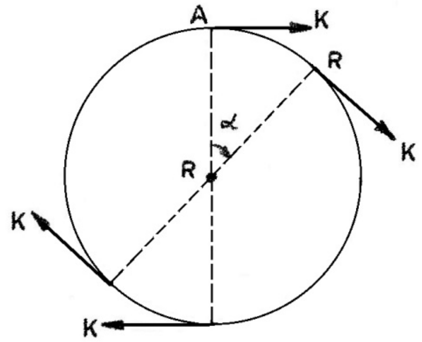

Fig. 19,1.

Een koppel dat gevormd wordt door een stelsel van twee evenwijdige tegengestelde krachten heeft een moment dat gegeven wordt door de formule:

$$M = K \times a$$

Daar de kracht uitgedrukt is in Newton en de arm in meters, is het moment van een koppel uitgedrukt in Newtonmeter. Dit is dus dezelfde eenheid als die we geleerd hebben voor de arbeid of energie. We dienen er echter goed op te letten dat een moment, hoewel het dezelfde eenheid heeft als de arbeid, geen arbeid is. We zeggen wel, dat een koppel arbeid verricht.

Immers, daar het koppel bestaat uit twee krachten en we geleerd hebben dat een kracht, die een lichaam verplaatst, arbeid verricht, zullen beide krachten arbeid verrichten, daar ze het lichaam een draaiende beweging geven.

Iedere kracht verricht bij een koppel een arbeid die gelijk is aan kracht × weg.
De afgelegde weg is een deel van de cirkelboog. In fig. 19,1 is de afgelegde weg de boog AB.

We hebben geleerd dat de gehele cirkelomtrek gelijk was aan $2\pi R$, hierbij was 2π het aantal malen, dat de straal op de cirkelomtrek kon worden afgepast. Is slechte een deel van de omtrek doorlopen, zoals is fig. 19,1. dan is de cirkelboog gelijk aan πR. De arbeid door de kracht verricht is dus gelijk aan:

$$K.\alpha R\,.$$

Beide krachten K samen hebben dus een arbeid verricht die gelijk is aan $2.K.\alpha.R$. De afstand $2R$ is juist de afstand tussen de twee krachten, dus de arm van het koppel, zodat we voor de arbeid ook kunnen schrijven: $A = K(2R)\alpha = .M.\alpha$.

We merken op dat de hoek α is uitgedrukt in radialen. Heeft een der aangrijpingspunten der krachten eenmaal de cirkel doorlopen, dan is de door het aangrijpingspunt van een der krachten afgelegde weg gelijk aan $2\pi R$, zodat de arbeid dan wordt, daar $\alpha = 2\pi$; $A = M.2\pi$.

We hebben geleerd, dat het vermogen gelijk was aan de verrichte arbeid per tijdseenheid. Het vermogen dat door het koppel wordt geleverd vinden we dan door: $A = M.\alpha$ als :

$$P = \frac{M.\alpha}{t}.$$

Nu hebben we geleerd, dat de hoeksnelheid ω gegeven werd als het aantal radialen dat per seconde doorlopen wordt, zodat we voor $\frac{\alpha}{t}$ kunnen schrijven dat dit gelijk is aan ω.

Het door het koppel geleverde vermogen wordt dus gegeven daar de formule:

$$P = M.\omega.$$

Hierin is M uitgedrukt in Newtonmeter, ω in rad/sec en P in watt.

Voorbeeld: Een as wordt aangedreven door een motor. Het aantal omwentelingen van de as is 300 per minuut; het moment van het koppel, dat op de as werkt, is 14 Nm.

Gevraagd wordt het vermogen te berekenen dat door de as wordt opgenomen.

Oplossing: Daar $P = M.\omega$ en $\omega = 2\pi f$ is het vermogen te berekenen.

$f = 300 \text{ omw/mim} = \frac{300}{60} \text{ omw/sec} = 5 \text{ omw/sec}.$ Dus:

$$P = 14.2\pi.5 = 140\pi = 140 \times \frac{22}{7} = 20 \times 22 = 440 \text{ Watt}.$$

19,3. Eenhedenstelsels

We hebben hier de eenheden van de krachten, arbeid en vermogen, steeds bepaald in het giorgistelsel (meter-kilogram, seconde-stelsel).

In dit stelsel was de eenheid van kracht de Newton (N), de eenheid van arbeid was mechanisch uitgedrukt in Newtonmeter (Nm), de elektrische in Joule, en het vermogen was mechanisch uitgedrukt in Newtonmeter/sec (Nm/sec), elektrisch in Watt.

In het centimeter-gram seconde-stelsel (cgs-stelsel) is de eenheid van arbeid de erg, dit is dan de arbeid die verricht wordt door een kracht van 1 dyne als het aangrijpingspunt van de kracht 1 cm verplaatst wordt in de richting van de kracht.

De overeenkomst tussen beide stelsels vinden we uit:

$$1 \textit{ Newton} = 10^5 \textit{ dyne}.$$

Voor arbeid geldt dan:

$$1 \textit{ Nm} = 1\, Joule = 10\, erg.$$

Voor het vermogen geldt dan:

$$1\, Nm/sec = 1\, Watt = 10^7\, erg/sec.$$

In de praktijk (vooral in de fabrieken) wordt vaak gebruik gemaakt van het vermogen van een eenheid die aangegeven wordt als de paardenkracht*[4] (afgekort als pk).

Hiervoor geldt: als we voor de versnelling van de zwaartekracht 10 $meter/sec^2$ nemen:

$$1\, pk = 750.10^{-7} erg/sec = 750\, Joule/sec = 750\, Nm/sec.$$

Ter oefening maken de opgaven 206 t/m 210.

Oplossingen inzenden van de opgaven 211 t/m 215.

4* Het vermogen van stoommachines en later ook dat van motoren werd vroeger in pk uitgedrukt. Maar de pk is tegenwoordig vervangen door de SI-eenheid kW (kilowatt), hoewel men in advertenties voor auto's en in het algemeen de term nog steeds gebruikt.
(Bron: Wikipedia) FV

20,1. De kinetische energie of het arbeidsvermogen van beweging

Als een lichaam met een massa m in rust is, doch op het ogenblik $t = 0$ in beweging komt, doordat er dan een constante kracht K op begint te werken, krijgt het een versnelling, die gelijk is aan: $a = \frac{K}{m}$.

De beweging is eenparig versneld in de richting van de kracht. Na t seconde is de snelheid: $v = at$ en de afgelegde weg is dan: $s = ½\, at^2$.

De arbeid die door de kracht verricht is, is gelijk aan:
$A = K \times s = K.\, ½\, at^2 = ½\, ma.\, at^2 = ½\, ma^2t^2$.

Door $v = at$ vinden we dat: $A = ½\, mv^2$.

Men zegt van een lichaam dat het arbeidsvermogen bezit als het arbeid kan verrichten. Het arbeidsvermogen : $A = ½\, mv^2$ heeft het lichaam te danken aan de snelheid die het bezit als het in beweging is. Dit arbeidsvermogen heet arbeidsvermogen van beweging of kinetische energie. Deze is dus:

$$A = ½\, mv^2$$

Wij wijzen er uitdrukkelijk op, dat hoewel we spreken over het arbeidsvermogen, de kinetische energie niets anders is dan arbeidsenergie, dus geen vermogen. Immers, indien we de eenheid van de kinetische energie bekijken, dan zien we dat A is uitgedrukt in $kg\left(\frac{m}{sec}\right)^2 = kg.\frac{m}{sec^2}.m = N.m$ (kg.m/sec^2 is massa × versnelling, dus gelijk aan een kracht).

Om aan te geven dat de arbeid waarmee we te maken hebben, arbeidsvermogen van beweging of kinetische energie is, gebruiken we het symbool E_k, zodat:

$$E_k = ½\, mv^2.$$

Voorbeeld: Een kogel die afgeschoten wordt, heeft een bepaalde hoeveelheid kinetische energie, immers het projectiel bezit een massa en een snelheid. Hierdoor kan het dus arbeid verrichten. Deze arbeid kan bv. worden omgezet in een botsing met iets of iemand. Een kogel zal dus in een boom dringen.

Een auto die met een bepaalde snelheid rijdt, bezit kinetische energie enz.

20,2. De potentiële energie of het arbeidsvermogen van plaats

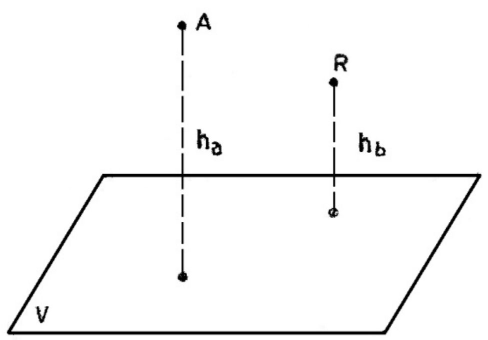

Fig. 20,1.

De potentiele energie of het arbeidsvermogen van plaats is de arbeid die een lichaam kan verrichten ten gevolge van de plaats die het inneemt.

We beschouwen een voorwerp met een bepaalde massa m, waarop een constante kracht K werkt. Loodrecht op de richting van die kracht nemen we een plat vlak V aan. We plaatsen het lichaam in een punt A (zie fig. 20,1) op afstand h_a van het platte vlak V.

Beweegt het lichaam zich nu naar het vlak toe, dan verricht de kracht K, die er op werkt een arbeid, die gelijk is aan $K.\, h_a$.

Bevindt het voorwerp zich op de andere hoogte, bv. h_b en werkt dezelfde kracht K erop in de richting loodrecht op het vlak V naar het vlak V toe, dan is de arbeid die door de kracht verricht wordt gelijk aan $K.\, h_b$. We zien hieruit dat de arbeid kleiner wordt, indien we met eenzelfde kracht K op een geringere hoogte boven V zijn. Wordt de hoogte h groter, dan bezitten we meer arbeidsvermogen, er kan meer arbeid verricht worden.

Deze arbeid die een voorwerp met massa m t.g.v. de plaats die het inneemt t.o.v. een of ander vlak kan verrichten, heet de potentiële energie of het arbeidsvermogen van plaats.

Als voorbeeld hiervan noemen we de aantrekkingskracht van de aarde die op een voorwerp werkt dat zich op een afstand van de grond bevindt. De aantrekkingskracht van de aarde is $G = m.g,$ zoals we weten. Voor de potentiële energie, die we aangeven als E_p, geldt dan:

$$E_p = mgh.$$

Ook hier zien we weer dat de potentiele energie een zuivere arbeid is, immers $m.g = g$ is uitgedrukt in Newton, h in meters, dus E_p in Newtonmeters en dit is de eenheid van arbeid.

Voorbeeld: Een voorwerp met een massa van 4 kg bevindt zich 20 meter boven de grond. Hoe groot in zijn potentiële energie? $g = 10\ m/sec^2$.
Oplossing: Volgens de formule $E_p = mgh$ vinden we:

$$E_p = 4 \times 10 \times 20 = 800\ Nm.$$

Ieder voorwerp bezit dus, door de plaats die het voorwerp inneemt, een potentiële energie t.o.v. een bepaald nulniveau, bv. een plat vlak.

Brengen we dit nulniveau op een andere afstand van het voorwerp, dan verandert de energie van plaats. Stel, een voorwerp met een massa van 5 kg bevindt zich loodrecht boven een plat vlak op een hoogte van 12 meter. Dit platte vlak bevindt zich op een hoogte van 30 meter boven de grond. Stellen we de versnelling van de zwaartekracht weet op 10 m/sec^2, dan is de potentiële energie t.o.v. het gegeven vlak:

$$E_p = 5 \times 10 \times 12 = 600\ Nm.$$

Het voorwerp bevindt zich t.o.v. het aardoppervlak echter op een hoogte van $12 + 30 = 42$ meter, zodat de potentiële energie t.o.v. de grond bedraagt:

$$E_p = 5 \times 10 \times 42 = 2100\ Nm.$$

Indien het voorwerp naar beneden was gevallen, bv. tot het gegeven vlak, dan was de potentiële energie van het voorwerp t.o.v. dit vlak gelijk aan nul geworden, immers de hoogte t.o.v. het vlak was nul. De potentiële energie t.o.v. de grond was dan nog:

$$E_p = 5 \times 10 \times 30 = 1500\ Nm.$$

Vergelijken we nu de drie gevonden energieën met elkaar, dan zien we, dat het voorwerp t.o.v. de grond eerst een E_p had van 2100 Nm en na het vallen een E_p van 1500 Nm. Het verschil in energie is juist de E_p die het voorwerp oorspronkelijk t.o.v. het gegeven vlak had.

Voorbeeld: Een auto met een massa van 2000 kg rijdt met een snelheid van 72 km/uur. Hoe groot is zijn kinetische energie?

Oplossing: $v = 72\ km/uur = \frac{72000}{3600}\ m/sec.$

$$E_k = ½\, mv^2 = ½\ .\ 2000.20^2 = 400.000\ Nm.$$

Ter oefening maken de opgaven 216 t/m 220.
Oplossingen inzenden van de opgaven 221 t/m 225.

21,1. De wet van behoud van arbeid

Energie is altijd in een of andere vorm aanwezig. Het is niet mogelijk dat energie uit niets ontstaat m.a.w. als energie ontstaat, is dit afkomstig uit een andere vorm van energie. Als energie verdwijnt, dan wordt die energie in een andere vorm van energie omgezet.

Er zijn in de natuur vele vormen van energie bekend, zoals warmte, geluid, licht, elektrische energie, mechanische energie, scheikundige energie enz, enz.

Tussen al deze vormen van energie zijn omzettingen mogelijk. In een gloeilamp wordt elektrische energie omgezet in licht en warmte; bij een accu wordt chemische energie omgezet in elektrische energie; in een luidspreker wordt elektrische energie in geluid enz.

Bij al deze omzettingen gaat nooit energie verloren. De totale hoeveelheid in de natuur blijft constant.

21,2. De wet van behoud van arbeid bij een beweging onder invloed van de zwaartekracht

Wanneer een lichaam met een massa m zich op een hoogte h boven de grond bevindt, dan heeft het lichaam een potentiële energie die gelijk is aan $E_p = mgh$. Valt het lichaam naar beneden en bereikt het de grond met een snelheid v, dan is de kinetische energie van het lichaam op het moment dat het de grond bereikt gelijk aan $E_k = ½\, mv^2$.

We hebben geleerd, dat een lichaam op een hoogte h een weg aflegt gelijk aan $h = ½\, gt^2$, de snelheid wordt gevonden uit $v = gt$, hieruit volgt:
$t = \frac{v}{g}$, vullen we dit in, in: $h = ½\, gt^2$, dan vinden we:

$$h = ½\, g \left(\frac{v}{g}\right)^2 \quad \text{of:} \quad h = ½ \frac{v^2}{g^2} = ½ \frac{v^2}{g}.$$

Vullen we deze waarde in, in: $E_k = ½\, mv^2$, dan vinden we:

$$E_k = ½\, m.2gh = mgh.$$

Hieruit volgt dat de potentiële energie van het begin gelijk is aan de kinetische energie bij het einde van de val. De potentiële energie is omgezet in kinetische energie. Aan de wet van behoud van energie is dus voldaan.

Ook tijdens de val blijft deze wet echter geldig. Is bv. het lichaam zo ver gedaald dat zijn afstand boven de grond h_1 is geworden, dan is zijn potentiële energie $E_p = mgh_1$ geworden, dus is met een bedrag $h - h_1$ afgenomen. Zijn snelheid is dan: $v = \sqrt{2(h - h_1)g}$, dus zijn kinetische energie $E_k = ½\, mv^2 = ½\, m.2(h - h_1)g = mg(h - h_1)$. Oorspronkelijk was $E_k = 0$ (beginsnelheid is nul), dus E_k is evenveel toegenomen als E_p is afgenomen.

Deze berekening geldt eveneens als het voorwerp niet losgelaten wordt, doch naar beneden wordt geworpen. Het bezit dan dus reeds een bepaalde snelheid v_0, dus een bepaalde kinetische energie $E_k = ½\, m{v_0}^2$.

De kinetische energie is dan op een bepaald moment gelijk aan deze $½\, m{v_0}^2 +$ een bedrag dat gelijk is aan de vermindering van de potentiële energie.

Treft het lichaam de grond, dan is $E_p = 0$ en alle potentiële energie is omgezet in kinetische energie. Bij de botsing van het voorwerp op de grond wordt deze energie omgezet in warmte, indien er tenminste geen volledige of gedeeltelijke veerkrachtige botsing plaatsvindt, waarbij het lichaam weer omhoog gaat; het krijgt dan immers weer potentiële energie. (We komen hier later op terug.)

Deze wet, die we nu behandeld hebben, geldt alleen als we afzien van wrijving of andere invloeden.

Dus geldt, als wet van behoud van arbeid bij een beweging onder invloed van de zwaartekracht:

$$E_p + E_k = constant.$$

De constante is altijd te berekenen uit de beginvoorwaarde. We zullen dit met een voorbeeld aantonen.

Voorbeeld: Een lichaam met een massa van 5 kg bevindt zich op een hoogte van 50 meter. Hoe groot is de potentiële energie en de kinetische energie op 10 m boven de grond? Hoe groot is dan de snelheid van het lichaam? Hoe groot zijn E_p en E_k op de grond? Hoe groot is dan de snelheid?

Oplossing: Op het hoogste punt geldt: $E_k = 0$ en $E_p = mgh$. De constante is dus gelijk aan: $mgh = 5.10.50 = 2500\ Nm$. Dus geldt gedurende de gehele beweging:

$$E_p + E_k = 2500.$$

Op 10 meter hoogte is $E_p = 5.10.10 = 500\ Nm$, dus:

$$E_k = 2500 - 500 = 2000\ Nm.$$

De snelheid is dan: $\frac{1}{2}\, mv^2 = 2000$, dus: $v^2 = \frac{2\ .\ 2000}{5} = 800$. Dus:

$$v = 20\sqrt{2}\ m/sec.$$

Als het voorwerp op de grond komt, is $E_p = 0$, dus: $E_k = 2500\ Nm$. Alle potentiële energie is overgegaan in kinetische energie.

De snelheid van het voorwerp op het moment dat het op de grond komt, is te berekenen uit:

$$\tfrac{1}{2}\, mv^2 = 2500,\ \text{dus: } v^2 = \frac{2\ .\ 2500}{5} = 1000,\ \text{dus: } v = 10\sqrt{10}\ m/sec.$$

Indien we in plaats van de constante invullen mgh, waarbij we met h_T de hoogte van de top bedoelen, dan geldt gedurende de beweging:

$$mgh + \tfrac{1}{2}\, mv^2 = mgh_T.$$

Delen door m geeft:

$$gh + \tfrac{1}{2}\, v^2 = gh_T.$$

Hieruit blijkt dat we de massa niet eens behoeven te weten om de snelheid waarmee het lichaam een bepaald punt passeert te berekenen. Om de energie op dat moment te berekenen, hebben we echter de waarde van de massa wel nodig.

Voorbeeld: Een lichaam wordt met een snelheid van 80 m/sec loodrecht omhoog geworpen. Hoe hoog komt dit voorwerp?

Oplossing: Daar de potentiële energie op de top gelijk moet zijn aan de kinetische energie op de grond, dus waar het mee omhoog geworpen is, geldt:

$$mgh_T = \tfrac{1}{2}\, m{v_0}^2 \quad \text{of:} \quad h_T = \frac{{v_0}^2}{2g} = \frac{6400}{20} = 320\ m.$$

Voorbeeld: Een vallend lichaam bereikt met een snelheid van 10 m/sec de grond. Van welke hoogte is het gevallen?

Oplossing: De kinetische energie op de grond is de potentiële energie van de top, dus:

$$\tfrac{1}{2}\, mv^2 = mgh_T \quad \text{of:} \quad \tfrac{1}{2}\, v^2 = gh_T,\ \text{dus: } h_T = \frac{v^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5\ meter.$$

Deze voorbeelden kunnen natuurlijk ook met de vergelijking die we bij de valbeweging hebben afgeleid worden uitgerekend.

Het tweede voorbeeld gaat dan als volgt:

$$vt = gt,\ \text{dus: } t = \frac{vt}{g} = \frac{10}{10} = 1\ sec; \qquad h = \tfrac{1}{2}\, gt^2 = \tfrac{1}{2}\ .\ 10.1 = 5\ m.$$

Ter oefening maken de opgaven 226 t/m 230.
Oplossingen inzenden van de opgaven 231 t/m 235.

22,1. Wet van behoud van energie voor een lichaam dat zonder wrijving langs een hellend vlak naar beneden glijdt

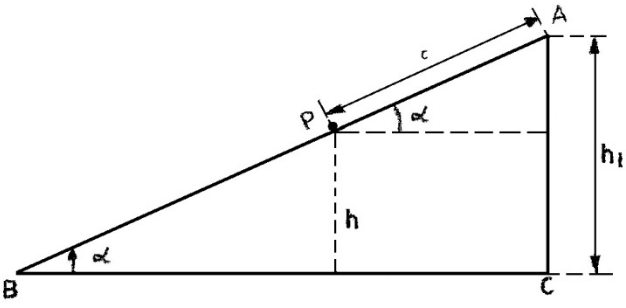

Fig. 22,1.

In fig. 22,1 is een hellend vlak aangegeven met een hellingshoek α. We denken ons op dit vlak een stoffelijk punt met een massa m, dat langs dit vlak zonder wrijving naar beneden kan glijden. Bevindt het stoffelijk punt zich op de tijd $t = 0$ in A, dan is zijn potentiële energie ten opzichte van het horizontale vlak BC gelijk aan:

$$E_p = mgh_1.$$

Na een tijd t bevindt het stoffelijk punt P, dus op een hoogte h boven het horizontale vlak. De potentiële energie is dan $E_p = mgh$.

De Potentiële energie is dus afgenomen met een bedrag $mg(h_1 - h)$.
In verticale richting werkt op het stoffelijk punt een kracht $g = mg$. Deze kracht is te ontbinden in een kracht loodrecht op het vlak, die gelijk is aan $mg\cos\alpha$ en een kracht langs het hellend vlak, die gelijk is aan $mg\sin\alpha$. De kracht $mg\cos\alpha$ wordt opgeheven door de even grote tegengesteld gerichte reactiekracht van het vlak. De kracht $mg\sin\alpha$ brengt het stoffelijk punt in beweging, daar we verondersteld hebben dat er geen wrijving aanwezig was. Uit de formule *kracht* = *massa* × *versnelling* volgt, dat de versnelling langs het hellend vlak bedraagt:

$$\mathrm{a} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha.$$

De snelheid die het stoffelijk punt verkrijgt, indien we veronderstellen, dat het zonder beginsnelheid uit A is vertrokken is: $v = \mathrm{a}t = gt\sin\alpha$. De afgelegde weg langs het hellend vlak is dan: $s = ½\,\mathrm{a}t^2 = ½\,gt^2 sin\alpha$.

De kinetische energie is nu:

$$E_k = ½\,mv^2 = ½\,m(gt\sin\alpha)^2 = ½\,g^2t^2sin^2\alpha.$$

Uit $s = ½\,gt^2\sin\alpha$ volgt: $t^2 = \frac{2s}{g\sin\alpha}$. Vullen we dit in, in de formule voor de kinetische energie, dan vinden we: $E_k = ½\,mg^2\frac{2s}{g\sin\alpha}\,.sin^2\alpha = mgs\sin\alpha.$

Uit fig. 22,1 volgt, dat: $\sin\alpha = \frac{h_1 - h}{s}$ of: $h_1 - h = s\sin\alpha$.
Dit ingevuld in: $E_k = mgs\sin\alpha$ geeft:

$$E_k = mg(h_1 - h).$$

Dit is echter juist het bedrag waarmee de potentiële energie van het stoffelijk punt is afgenomen, zodat ook hier geldt:

$$E_k + E_p = constant.$$

Bij het voorgaande probleem hebben we verondersteld, dat de wrijving gelijk aan nul was. Is er wel wrijving aanwezig en beweegt het voorwerp zich toch langs het hellend vlak naar beneden, dan is de maximale wrijvingskracht fN werkzaam.

De kracht die langs het vlak naar beneden werkt , is dan gelijk aan:

$$mg\sin\alpha - fN = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

De versnelling langs het vlak vinden we uit: $\mathrm{a} = \frac{k}{m} = \frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, waardoor we voor de snelheid vinden: $v = \mathrm{a}t = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$ zodat de kinetische energie gelijk is aan: $½\,mv^2 = ½\,mg^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t^2$.

Daar $s = ½\, at^2 = ½\, g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2$ volgt hieruit:

$$t^2 = \frac{2s}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}\,.$$

Voor de kinetische energie vinden we:

$$E_k = ½\, mg^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2 \,.\frac{2s}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Vullen we voor $s\sin\alpha$ weer de waarde $h - h_1$ in, dan is:

$$E_k = mg(h-h_1).\ \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\sin\alpha} = mg(h-h_1)(1 - f\cot\alpha).$$

Hieruit volgt, daar de afname van de potentiële energie gelijk is aan $mg(h-h_1)$, dat nu niet meer geldt, dat $E_k + E_p = constant.$

Een deel van de energie is omgezet in wrijvingswarmte.
Schrijven we :E_k als $E_k = mg(h-h_1) - mgf\cot\alpha(h-h_1)$, dan is deze wrijvingswarmte blijkbaar gelijk aan: $mgf\cot\alpha(h-h_1)$.

We zullen deze les besluiten met enige uitgewerkte voorbeelden over diverse problemen.

Opgave 1: Op een hellend vlak met hellingshoek α liggen twee even zware lichamen die door een koord met elkaar zijn verbonden. Het ene lichaam ligt beneden het andere. Voor het onderste lichaam is de wrijvingscoëfficiënt ½ . Hoe groot moet de wrijvingscoëfficiënt van het bovenste lichaam minstens zijn, opdat beide lichamen in rust blijven?
Oplossing: Beide lichamen hebben hetzelfde gewicht. De wrijvingskracht van beide lichamen is dus $g\sin\alpha$, zodat de totale wrijvingskracht gelijk is aan $2g\sin\alpha$. Daar we berekenen dat de lichamen juist in evenwicht zijn, geldt tevens voor het onderste lichaam $W_{max} = f_1.\,N = ½\,N$ en voor het bovenste lichaam $W_{max} = f_2 N$, waardoor de totale wrijvingskracht is: $W = f_1 N + f_2 N = (½ + f_2)N$.
Nu geldt dus: $(½ + f_2)N = 2g\sin\alpha$. Daar $N = g\cos\alpha$ vinden we:

$½ + f_2 = \frac{2g\sin\alpha}{N} = \frac{2g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = 2\tan\alpha$ of: $f_2 = 2\tan\alpha - ½$. Daar $\alpha = 30°$ is $\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

We vinden: $f_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} - ½ \approx 1{,}2 - 0{,}5 = 0{,}7$.

Opgave 2: Een lichaam met een massa van 3 kg bevindt zich ten tijde $t = 0$ in een punt O.
Het heeft een snelheid $v_0 = 2m/sec$. Op dat ogenblik begint er een kracht in de richting van de snelheid te werken van $2N$. Hoe groot is de snelheid van het lichaam na 3 seconden? Hoe groot is dan de afgelegde weg?
Oplossing: $v_t = v_0 + at = 2 + \frac{k}{m}\,.3 = 2 + \frac{2}{3}\,.3 = 4m/sec.$

$s_t = v_0 t + ½\, at^2 = 2\,.3 + ½\,.\,\frac{2}{3}\,.9 = 6 + 3 = 9\ meter.$

Opgave 3: Een lichaam met een massa van 2 kg wordt 20 meter boven de grond losgelaten.
Na hoeveel tijd bereikt het de grond? Met welke snelheid bereikt het de grond? Hoe groot is de kinetische op een hoogte van 20 meter, op 15 meter en op de grond? Wat is de potentiële energie?
Oplossing: Volgens de wet van behoud van energie geldt: $mgh_{top} = ½\, mv^2$ of:
$v = \sqrt{2gh_T} = \sqrt{2.10.20} = 20\ m/sec$. Daar $v = gt,$ is $t = \frac{v}{g} = \frac{20}{10} = 2\ seconden.$
De kinetische energie op de top is 0, en op de grond is dit gelijk aan de potentiële energie van de top, dus gelijk aan: $mgh_{top} = 2.10.20 = 400\ Nm$. De potentiele energie als het voorwerp op de grond is, is gelijk aan 0. Willen we nu E_p en E_k berekenen op 15 meter boven de grond, dan is:
$E_p = mgh_{15} = 2.10.15 = 300\ Nm$. De E_p op de top was 400 Nm, zodat E_p is afgenomen met 100 N. Deze energie is overgegaan in kinetische energie. De kinetische energie op 15 m hoogte bedraagt dus 100 Nm.

Ter oefening maken de opgaven 236 t/m 240.
Oplossingen inzenden van de opgaven 241 t/m 245.

23.1. Het zwaartepunt

Als op een lichaam twee evenwijdige krachten werken, vinden we de resultante op de manier, zoals in les 4 is aangegeven. Het aangrijpingspunt van de resultante ligt op de verbindingslijn van de aangrijpingspunten der beide krachten, zodanig dat de afstanden van het aangrijpingspunt van de resultante tot de aangrijpingspunten der krachten zich omgekeerd verhouden als de grootten der componenten. De grootte van de resultante is gelijk aan de som van de grootten der beide krachten; de richting is dezelfde als die van de krachten.

Veranderen we nu de richting van de krachten, doch zodanig dat ze evenwijdig blijven, dan behoudt de resultante hetzelfde aangrijpingspunt en dezelfde grootte. Zijn richting wordt hetzelfde als die der evenwijdige krachten.

Dit aangrijpingspunt van de resultante noemen we het middelpunt van de beide evenwijdige krachten.

Voegen we nog een derde kracht toe, dan geldt ditzelfde voor de resultante van deze derde kracht en de resultante van de eerste twee. Het aangrijpingspunt van de resultante van de drie evenwijdige krachten noemen we het middelpunt van de drie krachten.

Op deze manier doorgaande, kunnen we van een willekeurig aantal krachten het aangrijpingspunt van de resultante bepalen. Als de richting van de evenwijdige krachten verandert, doch zo, dat zij evenwijdig blijven, hetzelfde aangrijpingspunt behouden en niet van grootte veranderen, blijft het middelpunt der krachten hetzelfde.

Een lichaam kunnen we opvatten als een verzameling stoffelijke punten, op ieder waarvan de zwaartekracht werkt.

Op ieder deeltje met de massa m werkt de zwaartekracht, waarvan de grootte mg is en de richting verticaal.

Het middelpunt van al deze evenwijdige krachten noemen we het zwaartepunt van het lichaam.

Brengen we het lichaam in een andere stand, dan blijven alle elementaire krachten even groot en onderling evenwijdig. Ook hun aangrijpingspunten blijven dezelfde; het zwaartepunt blijft dus hetzelfde. De ligging van het zwaartepunt van een lichaam is dus onafhankelijk van de stand van het lichaam.

Van een vlak lichaam ligt het zwaartepunt in het vlak dat dit lichaam begrenst. Denken we ons dit vlakke lichaam bv. bestaand uit vele stoffelijke punten en plaatsen we het lichaam verticaal, dan ligt voor alle stoffelijke punten van dit lichaam de zwaartekracht in het vlak van dit lichaam.
Hun resultante dus ook, dus ook het aangrijpingspunt van deze resultante. Dit aangrijpingspunt is het zwaartepunt. Op dezelfde manier is aan te tonen dat het zwaartepunt van een rechte lijn op die lijn ligt.

We noemen een lichaam homogeen, als gelijke delen van het volume, hoe klein ook genomen, gelijke massa bezitten. Bestaat een lichaam geheel uit een en dezelfde stof, dan kunnen we dit lichaam gewoonlijk wel als homogeen beschouwen.

Een lichaam dat niet homogeen is, noemen we inhomogeen. Bij een homogeen lichaam is de ligging van het zwaartepunt alleen afhankelijk van de vorm van het lichaam.

Vele lichamen bezitten een zekere symmetrie. Het bepalen van het zwaartepunt is dan eenvoudiger, dan het bepalen van het zwaartepunt bij lichamen die geen symmetrie-eigenschappen vertonen.

Het blijkt nu, dat een symmetrievlak van een homogeen lichaam het zwaartepunt bevat.
Heeft een homogeen lichaam twee vlakken van symmetrie, dan ligt het zwaartepunt in ieder van deze vlakken, dus op de snijlijn van deze vlakken.

Heeft een homogeen lichaam een as van snijpunten, dan ligt het zwaartepunt op deze as. Heeft een homogeen lichaam drie vlakken van symmetrie, die elkaar in één punt snijden, dan is dit snijpunt het zwaartepunt. Heeft een homogeen lichaam een punt van symmetrie, zoals bijvoorbeeld het geval is bij een homogene bol, dan is dit middelpunt het zwaartepunt.

Om het zwaartepunt te bepalen van een lichaam maken we zo veel mogelijk gebruik van de symmetrie, indien deze aanwezig is.

We zullen nu enige lichamen beschouwen, waarvan we het zwaartepunt zullen bepalen. Met enigszins ingewikkelde lichamen is het noodzakelijk gebruik te maken van de hogere wiskunde, met name van de integraalrekening. Dit valt echter buiten ons leerprogramma.

Het zwaartepunt van een <u>rechte lijn</u> ligt in het midden van de lijn, want dit is een punt van symmetrie.

Het zwaartepunt van een <u>cirkelomtrek</u> van een <u>cirkelvormig</u> vlak ligt in het middelpunt, want dit is een punt van symmetrie.

Het zwaartepunt van een <u>cirkelcilinder</u> is het snijpunt van de as, die de middelpunten van grond- en bovenvlak verbindt met het vlak op halve hoogte evenwijdig aan grond- en bovenvlak.

Het zwaartepunt van een <u>parallellogram</u>, dus ook dat van een rechthoek, een ruit en een vierkant, is het snijpunt der diagonalen.

Van een <u>driehoek</u> is het zwaartepunt het punt dat ook in de meetkunde het zwaartepunt wordt genoemd.

Het zwaartepunt van een <u>bol</u> ligt in het middelpunt van de bol.

Draait een lichaam om een vaste as, dan is de snelheid van de verschillende delen van dit lichaam niet dezelfde, de snelheid is evenredig met de afstand tot de as zodanig, dat $v = \omega R$. Hierin stelt R de afstand van het beschouwde deeltje tot de as en ω de hoeksnelheid voor. De hoeksnelheid is wel voor alle deeltjes van het draaiende lichaam even groot. De kinetische energie van een deeltje met massa m is ½ $m\omega^2 R^2$. Om de kinetische energie van het gehele draaiende lichaam te bepalen, moeten de kinetische energie voor alle delen van het lichaam optellen. Zoals we weten, stellen we de som van een groot aantal termen voor met het teken sigma Σ, zodat de totale kinetische energie van het draaiende lichaam voor te stellen is als: Σ ½ $m\omega^2 R^2$.

Omdat ω voor alle delen van het lichaam even groot is, kunnen we deze kinetische energie ook schrijven als: ½ $\omega^2 \Sigma m R^2$. De grootheid $\Sigma m R^2$ hangt niet van de snelheid van draaiing af, maar alleen van de vorm en de samenstelling van het lichaam en de plaats van de richting van de as waar het lichaam om draait.

Deze grootheid noemen we het <u>massatraagheidsmoment</u> of kortweg het traagheidsmoment van het lichaam te opzichte van de beschouwde as waar de draaiing om wordt verricht.

Ter oefening maken de opgaven 246 t/m 250.
Oplossingen inzenden van de opgaven 251 t/m 255.

HILVERSUM

24,1. Botsing

Twee lichamen komen met elkaar in botsing als zij zich ten opzichte van elkaar zo bewegen dat zij op een bepaald ogenblik met elkaar in aanraking komen.

We zullen voor het gemak bij de botsingen alleen homogene lichamen nemen met een bekend zwaartepunt. Dus bv. twee homogene bollen waarvan de zwaartepunten in de middelpunten liggen.

De botsing tussen de twee lichamen kan op verschillende manieren geschieden nl.:
Ligt het zwaartepunt der beide botsende lichamen op de verbindingslijn der zwaartepunten, dan spreken we van een centrale botsing. Is dit niet het geval, dan noemen we de botsing niet centraal.

Bij een centrale botsing kunnen we nog twee gevallen onderscheiden:

1e. Als op het ogenblik van de botsing de snelheid van beide lichamen gericht is volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, dan noemen we deze botsing een rechte centrale botsing.

2e. Als op het ogenblijk van de botsing een der beide snelheden of beide snelheden niet gericht is volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, dan noemen we deze botsing een scheve centrale botsing.

Bij de botsing kan het zijn dat de beide lichamen op het ogenblik van de botsing uitsluitend een voortgaande beweging hebben langs een baan die al of niet recht is.
Het kan echter ook zijn dat één der lichamen of beide een draaiende beweging hebben.

Als beide lichamen botsen op wat voor een manier dan ook, wordt er tijdens de botsing geen energie van buitenaf aan de lichamen toegevoerd. Wel kan het ene lichaam een gedeelte van zijn kinetische energie aan het andere overdragen.

Ten gevolge van de botsing kan er een vormverandering van de lichamen of van een van de beide optreden, die na de botsing geheel of gedeeltelijk blijft bestaan. Het is ook mogelijk dat na de botsing de lichamen hun oorspronkelijke vorm weer aannemen. Wordt door een botsing een lichaam blijvend vervormd, dan is voor deze vormverandering energie nodig geweest. Deze energie is aan de kinetische energie van de botsende lichamen onttrokken en in warmte omgezet. Voor het geheel geldt weer de wet van behoud van energie. Verkrijgen de lichamen na de botsing weer geheel hun oorspronkelijke vorm, dan is er geen energie in warmte verlopen gegaan, zodat de totale kinetische energie der botsende lichamen voor en na de botsing hetzelfde moet zijn. We noemen deze soort botsing een volkomen veerkrachtige botsing.

Treedt er een blijvende vormverandering op, dan kan het zijn dat de beide lichamen zich als een geheel samen verder gaan bewegen. Ze hebben dan ten opzichte van elkaar geen snelheid meer. Ten opzichte van de omgeving hebben beide lichamen dan dezelfde snelheid. Deze soort botsing noemen we een volkomen onveerkrachtige botsing.

De snelheid van de met elkaar in contact blijvende lichamen kan ook nul zijn geworden na de botsing.

In alle tussengelegen gevallen noemen we de botsing gedeeltelijk veerkrachtig.

In dit geval bewegen de lichamen zich na de botsing afzonderlijk verder, doch de som van hun kinetische energieën is na de botsing kleiner dan deze som voor de botsing was. Het verschil in energie is weer in warmte omgezet.

We beperken ons bij de botsingen tot de gevallen van de rechte centrale botsing. Beschouwen we twee homogene bollen A en B met respectievelijk massa's m_1 en m_2 die op het ogenblik van de botsing de snelheden v_1 en v_2 bezitten. Deze snelheden zijn dan gericht volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, waarbij deze zwaartepunten in het middelpunt van de bollen zijn gelegen (fig. 24,1).

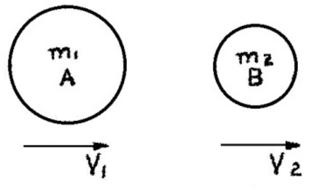

Fig. 24,1.

We veronderstellen dat de snelheden in dezelfde richting werken, terwijl de snelheid van bol A groter is dan die van bol B, dus $v_1 > v_2$. Vanaf het ogenblik van de botsing zal bol A de snelheid van bol B trachten te vergroten, terwijl bol B tracht de snelheid van bol A te verkleinen. Door de krachten die de lichamen op elkaar uitoefenen, ondergaan deze lichamen een vormverandering. Na enige tijd zijn de snelheden der beide lichamen gelijk geworden.
Deze snelheid, die we v_3 zullen noemen, heeft een richting, die gelijk is aan de richting der snelheden v_1 en v_2 en een grootte die gelegen is tussen de grootten van v_1 en v_2 in dus: $v_1 > v_3 > v_2$. Het lichaam B heeft een versnelling gekregen en het lichaam A een vertraging door de krachten die de beide lichamen van elkaar ondervinden.

Nu is de kracht die A op B uitoefent, even groot, doch tegengesteld gericht als de kracht die B op A uitoefent, immers: actie = reactie.

Hierdoor is de toename van de snelheid van bol B gelijk aan de afname van de snelheid van bol A. Voor de beweging geldt dan dat:

$$(v_1 - v_3) : (v_3 - v_2) = m_2 : m_1.$$

Hieruit volgt: $m_2(v_3 - v_2) = m_1(v_1 - v_3)$

of: $m_2v_3 - m_2v_2 = m_1v_1 - m_1v_3.$

$m_2v_3 + m_1v_3 = m_1v_1 + m_2v_2$

of: $v_3(m_1 + m_2) = m_1v_1 + m_2v_2,$

dus: $v_3 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$

De kinetische energie van bol A voor de botsing was ½ $m_1v_1{}^2$ en van bol B ½ $m_2v_2{}^2$. Na de botsing is de totale kinetische energie ½ $(m_1 + m_2)v_3{}^2$. De totale kinetische energie voor de botsing was: ½ $m_1v_1{}^2$ + ½ $m_2v_2{}^2$ en na de botsing ½ $(m_1 + m_2)v_3{}^2$. Trekken we deze energieën van elkaar af dan vinden we:

$$\tfrac{1}{2} m_1v_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2{}^2 - \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)v_3{}^2 = \tfrac{1}{2} m_1v_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2{}^2 - \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1v_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2v_2{}^2 - \tfrac{1}{2} \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Daar v_1 groter is van v_2 vinden we dus een verschil van energie voor- en na de botsing, m.a.w. er is kinetische energie verloren gegaan . We kunnen nu 3 gevallen onderscheiden.

1e. Het kan zijn dat, van de kinetische energie die tijdens de botsing verloren is gegaan niets wordt teruggevonden. De botsing heet dan volkomen onveerkrachtig.

2e. Het kan ook zijn, dat deze energie weer geheel als kinetische energie uit deze lichamen wordt teruggewonnen. Deze botsing heet dan volkomen veerkrachtig.

3e. Het kan ook zijn, dat slechts een gedeelte van deze energie weer als kinetische energie wordt teruggekregen. Deze botsing heet dan gedeeltelijk veerkrachtig.

Bij een volkomen of gedeeltelijk veerkrachtige botsing wordt het contact tussen de lichamen na de botsing verbroken. De tijd gedurende die de lichamen elkaar aanraken, heet de botsingstijd. De afgeleide formules blijven evenzeer geldig als de richtingen der snelheden naar elkaar toe gericht zijn. We noemen dan een snelheid naar rechts positief en een snelheid naar links negatief.

Ter oefening maken de opgaven 256 t/m 259.
Oplossingen inzenden van de opgaven 260 t/m 263.

25.1. Overzicht van de dynamica

Een kracht is de oorzaak van een versnelling; de versnelling is de verandering van de snelheid per tijdseenheid.

De krachten zijn evenredig met de versnellingen die zij aan eenzelfde lichaam geven.
De massa van een lichaam is evenredig met de kracht die nodig is om dit lichaam een versnelling te geven. Geven gelijke krachten aan twee verschillende lichamen een even grote versnelling, dan zijn de massa's der beide lichamen gelijk.

Kracht en versnelling hebben een richting en een grootte, het zijn dus vectoren; een massa heeft geen richting, alleen maar grootte, het is een scalar.

De eenheid van massa is de kilogram, de eenheid van versnelling is m/sec^2. De eenheid van kracht is de Newton. Met deze eenheden geldt de formule: *kracht = massa × versnelling:*

$$K = m.\mathrm{a}$$

Voor de zwaartekracht geldt:

$$G = m.g$$

Hierin is g de versnelling van de zwaartekracht in m/sec^2, meestal wordt $g = 10\ m/sec^2$ genomen. G is de aantrekkingskracht van de aarde, uitgedrukt in Newton.

De versnelling van de zwaartekracht is afhankelijk van de plaats op aarde, hierdoor is ook de aantrekkingskracht van de aarde plaatsafhankelijk. De verhouding $\frac{G}{g} = m$, is echter constant, zodat de massa niet afhankelijk is van de plaats op aarde waar we ons bevinden.

De centripetale versnelling is gelijk aan $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. De centripetale kracht of middelpunt-zoekende kracht is dan:

$$K = m.a = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$$

De centripetale kracht is gelijk, doch tegengesteld gericht aan de centrifugale of middelpunt-vliegende kracht.

Arbeid

Als er op een lichaam een kracht werkt en daardoor het lichaam in beweging brengt, dan zeggen we, dat die kracht arbeid verricht. De arbeid is evenredig met de kracht en de weg die het lichaam onder invloed van die kracht aflegt en tevens met de hoek die de kracht met de weg maakt. En daar

$$A = k.s\ \cos\alpha$$

Daar de kracht is uitgedrukt in Newton, de weg in meters en daar $\cos\alpha$ een onbenoemd getal is, is de arbeid uitgedrukt in Newton-meters.

Werkt de kracht in de richting van de weg, dan is de hoek α gelijk aan nul, zodat geldt:

arbeid = kracht × weg of: $A = K.s.$

staan de kracht en de weg loodrecht op elkaar, dan wordt er geen nuttige arbeid verricht, dus is $A = 0$. Verder merken we op dat arbeid en energie hetzelfde begrip is, dus:

Arbeid en energie zijn gelijkwaardig.

Onder het vermogen verstaan we de hoeveelheid arbeid die per tijdseenheid wordt verricht, dus:

Vermogen = arbeid per tijdseenheid.

De eenheid van vermogen is dus Nm/sec.
De elektrische eenheid van arbeid is de Joule, dus $1\ Nm = 1\ Joule$.
De elektrische eenheid van vermogen is de Watt.

Samenvattend geldt:

$$1\ Nm/sec = 1J/sec = 1\ Watt$$ vermogen

$$1\ Nm = 1\ J = 1\ Wattsec.$$ arbeid

Een koppel is een stelsel van twee evenwijdige even grote, doch tegengesteld gerichte krachten die niet volgens dezelfde werklijn werken. een koppel geeft een lichaam een draaiende beweging. Het moment van een koppel is:

$$M = K.a$$

Waarin K in Newton en a de arm in meters is uitgedrukt is de eenheid van het moment dus uitgedrukt in Nm, dezelfde eenheid als die van de arbeid.

We zeggen wel dat het koppel arbeid verricht. Denk erom, het moment van een koppel is geen arbeid. Het door een koppel geleverde vermogen is:

$$P = M.\omega$$

Hierin is P het vermogen, M het moment van het koppel en ω de hoeksnelheid in radialen per seconde. Kinetische energie of arbeidsvermogen van beweging is de arbeid die een voorwerp met een bepaalde massa kan verrichten ten gevolge van de snelheid die het lichaam heeft. Deze energie stallen we voor door de formule:

$$E_k = ½\, mv^2$$ in Nm.

De potentiële energie of het arbeidsvermogen van beweging is de arbeid die een voorwerp met een bepaalde massa kan verrichten ten gevolge van de plaats die het lichaam inneemt. Deze energie stellen we voor door de formule:

$$E_p = \ mgh$$ in Nm.

De wet van behoud van arbeid bij een beweging onder invloed van de zwaartekracht wordt vastgelegd door de formule:

$$E_p + E_k = constant$$

De constante is te berekenen uit de beginvoorwaarde en geldt verder gedurende de gehele beweging.

De wet van behoud van arbeid geldt zeer algemeen. Populair zegt men wel eens: Er kan geen energie uit niets ontstaan en er kan geen energie verloren gaan. Energie wordt dus in iets anders, bv. in een andere soort van energie omgezet. Nemen we bv. een accu, dan wordt scheikundige energie omgezet in elektrische energie, enz.

Zwaartepunt

Een lichaam is homogeen als gelijk delen van het volume, hoe klein ook genomen, gelijke massa bezitten. Heeft een homogeen lichaam een punt van symmetrie, dan heet dit punt van symmetrie het middelpunt van dit lichaam. Dit middelpunt is dan tevens het zwaartepunt van het homogene lichaam.

Botsing

Bij een centrale botsing ligt het aanrakingspunt der beide botsende lichamen op de verbindingslijn der zwaartepunten. Is dit niet het geval, dan heet de botsing niet centraal. Bij de centrale botsing onderscheiden we 2 gevallen:

1e. Als op het ogenblik der botsing de snelheid van beide lichamen gericht is volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, dan heet de botsing een rechte centrale botsing.

2e. Als op het ogenblik van de botsing een der snelheden of beide snelheden niet geheel gericht is volgens de verbindingslijn der zwaartepunten, dan noemen we de botsing een scheve centrale botsing.

Verder onderscheiden we de volkomen veerkrachtige botsing, de volkomen onveerkrachtige botsing en de gedeeltelijk veerkrachtige botsing (zie blz. 47).

Oplossingen inzenden van de opgaven 236 t/m 240.