



1.1	Stroomsoorten	blz.	1
1.2	Het opwekken van een sinusvormige wisselstroom		4
1.3	Gemiddelde waarde van een sinusvormige wisselstroom en –spanning		7
1.4	Effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom		9
2.1	Wisselspanning aangesloten op een weerstand		11
2.3	Wisselspanning aangesloten op een condensator		11
2.3	Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling van condensator en weerstand		14
2.4	Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van condensator en weerstand		18
2.5	Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie		21
2.6	Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling van zelfinductie en weerstand		23
2.7	Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en weerstand		25
2.8	Serieschakeling van spoelen		27
2.9	parallelschakeling van spoelen		27
2.10	Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling (vervolg)		31
2.11	Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en condensator		39
2.12	Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van een weerstand, zelfinductie en condensator		41
2.13	Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en een condensator		44
3.1	Het principe van de transformator		53
3.2	Vervangingsschema van de transformator		54
3.3	Gedrag van de transformator		56
3.4	Spreiding bij een transformator		57
3.5	Verliezen bij een transformator		58
3.6	De autotransformator		58
3.7	Ontwerp van een transformator		59
3.8	Luchtspleet in de kern		61
3.9	Gedrag van het magnetisch veld bij veranderlijke belasting van de transformator		61
4.1	Impedantie en admittantie diagrammen		63
5.1	Elektriciteitsnetten		69
5.2	Driefasensysteem, sterschakeling en driehoekschakeling		70
5.3	Fasespanning		72
5.4	Gekoppelde spanning en nulleider		73
5.5	Schakeling der verbruikstoestellen		75
5.6	Stromen en spanningen bij sterschakeling		76
5.7	De stromen en spanningen bij driehoekschakeling		77
5.8	Het vermogen bij een driefasensysteem		78



6.1	Overgangsverschijnselen	79
6.2	Weerstand aangesloten op een gelijkspanning	79
6.3	Gelijkspanning aangesloten op een serieschakeling van condensator en weerstand	80
6.4	Ontlading van een condensator over een weerstand	83
6.5	Serieschakeling van weerstand en zelfinductie aangesloten op een Gelijkspanning	84
6.6	Ontlading van een condensator over een zelfinductie	85
6.7	Ontlading van een condensator over een serieschakeling van weerstand en zelfinductie	87
6.8	Dempingsverhouding en logaritmisch decrement	88
6.9	Aperiodische ketens	90
7.1	Complexe getallen	91
7.2	Toepassing van complexe getallen in de wisselstroomtheorie	93
7.3	Berekening stromen en spanningen	97
7.4	Resonantiefrequentie en resonantie-impedantie	101
7.5	Berekening van vermogens in wisselstroomketens	103
7.6	Admittanties	105
7.7	Brugschakelingen voor wisselstroom	109
8.1	Trilling opgebouwd, uit twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en gelijke fase	113
8.2	Trilling opgebouwd, uit twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en verschillende fasen	113
8.3	De som van sinusvormige trillingen met verschillende frequenties	117
8.4	De som van een gelijkspanning en een wisselspanning	117
8.5	De effectieve- en gemiddelde waarde van niet-sinusvormige stromen en spanningen	119
8.6	In amplitude gemoduleerde trillingen	121
8.7	Analyse van het in amplitude gemoduleerd signaal	123
8.8	De effectieve waarde van een in amplitude gemoduleerde trilling	124
8.9	Het vectordiagram van een in amplitude gemoduleerde trilling	125
8.10	De in amplitude gemoduleerde trilling toegevoerd aan een afgestemde kring	128
8.11	Selectiviteit en resonantiebreedte	133
9.1	Gekoppelde kringen (inleiding)	135
9.2	Indirect inductief gekoppelde kringen	137
9.3	De resonantiefrequentie van het gekoppelde stelsel	139
9.4	Resonantiekromme van primaire stroom als functie van de frequentie	140
9.5	De stroom in de secundaire keten	143
9.6	De spanning over de secundaire condensator	145
9.7	Direct inductief gekoppeld systeem	147
9.8	Direct capacitief gekoppeld stelsel	149
9.9	Indirect capacitief gekoppeld stelsel	150
9.10	Het gedrag van een bandfilter bij verandering van de afstemcondensator	153
9.11	Bandfilters waarbij de primaire kring een parallelketen is	155
9.12	De laagfrequent transformator	155
9.13	Variometer	157

R.T.

Inhoud Wisselstroomtheorie.

Nadruk verboden



HILVERSUM

10.1	Algemene eigenschappen van elektrische ketens (inleiding)	159
10.2	De superpositiewet	159
10.3	De reciprociteitswet	162
10.4	De stelling van Thevenin	165
11.1	Fasemodulatie	167
11.2	Fasemodulatie of frequentiemodulatie	169
11.3	De analyse van de frequentie gemoduleerde trilling	170
11.4	Het vectordiagram van een in frequentie gemoduleerd signaal	172
12.1	Lange leidingen en Lechersysteem	173
12.2	Kabelimpedantie	175
12.3	De formule voor de lopende golf	177
12.4	Staande golven bij kortgesloten einde	179
12.5	Staande golven bij open einde	180
12.6	Korte kabelsectie of Lechersysteem	181
12.7	Praktische toepassingen van kabels waarop zich staande golven voordoen	184
12.8	Reflectiefactor	187
12.9	Dubbeldraads en coaxiale geleiders	189
12.10	Het afsluiten van de kabel	189
12.11	aanpassing met behulp van stubs	193

Wisselstroomtheorie. Les 1.

Nadruk verboden 1

1. Wisselstromen- en spanningen.

1.1. stroomsoorten.

In het voorgaande hebben we steeds gebruik gemaakt van stromen en spanningen, die voortdurend in dezelfde richting vloeien of werkzaam zijn. We spreken dan van gelijkstroom en gelijkspanning. Tevens gingen we uit van de gedachte, dat de stroom of spanning op elk tijdstip dezelfde waarde heeft. Een spanning of stroom die aan deze voorwaarde voldoet, wordt aangeduid met de naam: zuivere gelijkspanning of stroom.

Indien we in een assenstelsel op de horizontale as de tijd uitzetten, gedurende welke we de stroomwaarden noteren en op de verticale as de waarden van de stroom, dan verkrijgen we de grafische voorstelling van een gelijkstroom (zie fig. 1,1). Deze grafiek is, indien een zuivere gelijkstroom, weergegeven als een horizontale rechte lijn.

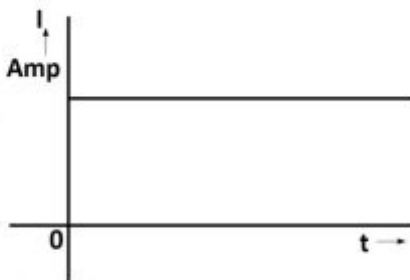


Fig. 1,1. Zuivere gelijkstroom.

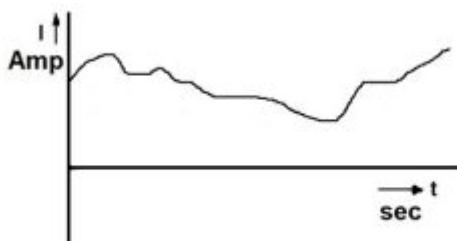


Fig. 1,2. Veranderlijke gelijkstroom.

Veelal zullen we ook met gelijkstromen en spanningen te maken hebben, welke niet steeds dezelfde waarden hebben. We spreken dan van een veranderlijke gelijkstroom- of spanning (zie fig. 1,2).

We kunnen de gelijkspanning of stroom op een bepaalde manier in waarde doen veranderen. Verandert de waarde zeer veel, of is de stroomwaarde op bepaalde momenten nul, dan spreekt men van pulserende gelijkstroom of pulserende gelijkspanning (zie fig. 1,3).

Indien een stroom of spanning niet steeds in dezelfde richting werkzaam is, maar wisselt van richting, dan hebben we te maken met de zogenaamde wisselstroom of wisselspanning. In fig. 1,4 hebben we een wisselstroom weergegeven, waarbij de stroomwaarde steeds dezelfde is, maar wisselt van richting.

We kunnen de waarde van een wisselstroom op verschillende wijzen doen veranderen (zie fig. 1,5). Veranderen de stroom of spanningwaarden in beide richtingen zodanig dat de oppervlakten, aan beide zijden van de horizontale as, ingesloten door de grafiek, gelijk zijn, dan spreekt men van zuivere wisselstroom of spanning (fig. 1,4 en 1,6).

In figuur 1,4 zijn de oppervlakten van de rechthoeken boven en onder de horizontale

R.T.

2 W.T.

Nadruk verboden

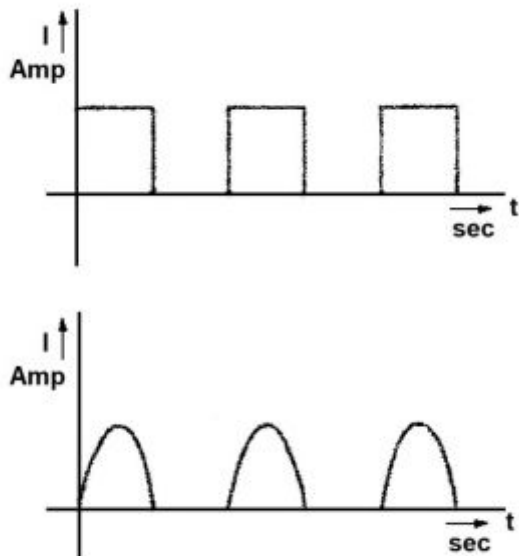


Fig. 1,3. Pulserende gelijkstroom.

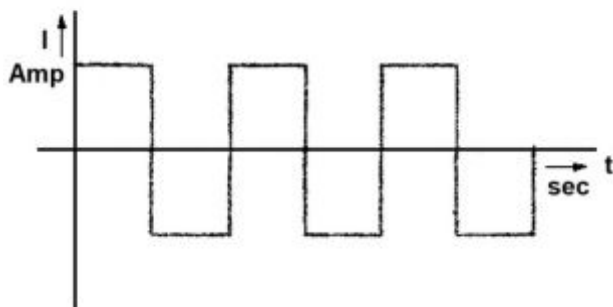


Fig. 1,4. Zuivere wisselstroom.

Deze sinusvormige wisselstroom of spanning wordt veelal sinusoïdale wisselspanning of stroom genoemd. We onderscheiden in het vervolg de sinusoïdale wisselspanning of stroom en de niet sinusoïdale wisselstroom of spanning, waarbij dan onder de laatste die stromen of spanningen worden verstaan welke een gedaante hebben die afwijkt van de sinusvorm. Zoals we in de toekomst zullen zien, zijn echter alle niet sinusvormige stromen of spanningen op te vatten alsof ze zijn opgebouwd uit een of meer groot aantal sinusoïdale wisselspanningen of stromen die onderling in bepaalde opzichten kunnen verschillen.

as, gelijk. In fig. 1,6 zijn de oppervlakken van de figuren, ingesloten door *abcd* en *defg* eveneens gelijk.

Daar bij wisselstroom steeds sprake is van twee verschillende richtingen, waarin de stroom vloeit of de spanning werkzaam is, onderscheiden we die door de ene stroomrichting positief en de andere richting negatief te noemen. De stroomwaarden in de grafieken, die boven de horizontale as getekend zijn, worden positief en de stroom- en spanningswaarden welke onder de horizontale as voorkomen dus negatief genoemd.

Een stroom- of spanningstype, waar we heel veel mee zullen werken, is in fig. 1,7 voor de stroom weergegeven.

Deze stroom verandert gedurende het verstrijken van de tijd, of korter gezegd, de stroom verandert als de functie van de tijd op dezelfde wijze als de sinus van een aangroeiende hoek. Deze figuur wordt sinusoïde genoemd (zie VL.M. 9,1).*

We spreken nu van een sinusvormige wisselstroom. Daar de ingesloten oppervlakken boven en onder de horizontale as, gelijk zijn, is dit dus ook een zuivere wisselstroom.

* VL.M. = vlakke meetkunde (FV)

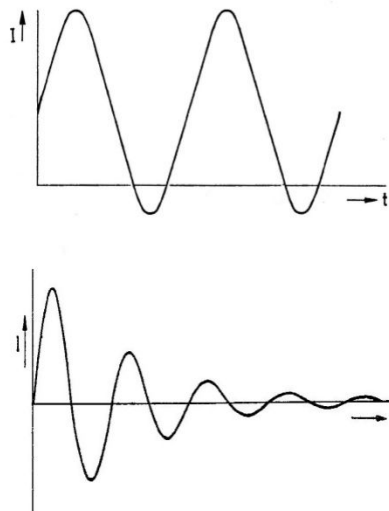


Fig. 1,5. Willekeurige wisselstromen.

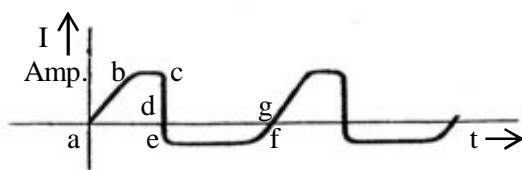


Fig. 1,6. Zuivere wisselstroom.

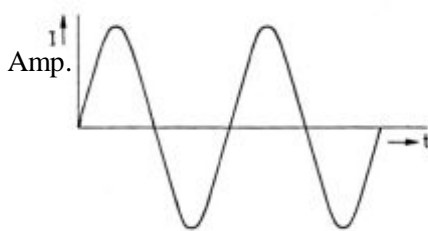


Fig. 1,7. Sinusvormige wisselstroom.

We zullen nu allereerst de gedragingen van sinusoidale wisselstromen en spanningen in verschillende elementen en verschillende schakelingen onderzoeken. De eigenschappen van de schakelingen voor een sinusoidale wisselspanning of stroom zullen we allereerst vastleggen.

Is nu bijvoorbeeld op een schakeling een niet sinusoidale wisselspanning werkzaam, dan kunnen we de effecten voor elk der sinusoidale wisselspanningen waaruit de aangelegde spanning opgebouwd gedacht kan worden vastleggen. Het totale resultaat van de aangelegde spanning kunnen we nu vinden door de verkregen resultaten der sinusoidale spanningen samen te stellen tot een gezamenlijk resultaat.

In het algemeen zal de betreffende schakeling zich voor de verschillende sinusoidale wisselspanningen verschillend gedragen. Het totaal resultaat dat we op bovenomschreven wijze zullen verkrijgen zal dus in het algemeen afwijken van het stroom- of spanningstype dat werd aangesloten.

Alvorens ons met de schakelingen bezig te houden, zullen we eerst nagaan hoe we een sinusoidale wisselspanning kunnen opwekken en ons verdiepen in de wijze waarmee we een sinusvormige stroom of spanning kunnen aangeven.

R.T.

4 W.T.

Nadruk verboden

1.2. Het opwekken van een sinusvormige wisselstroom.

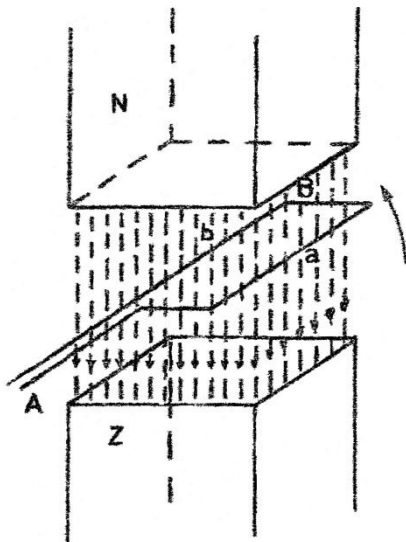


Fig. 1,8. Het opwekken van een sinusvormige wisselstroom.

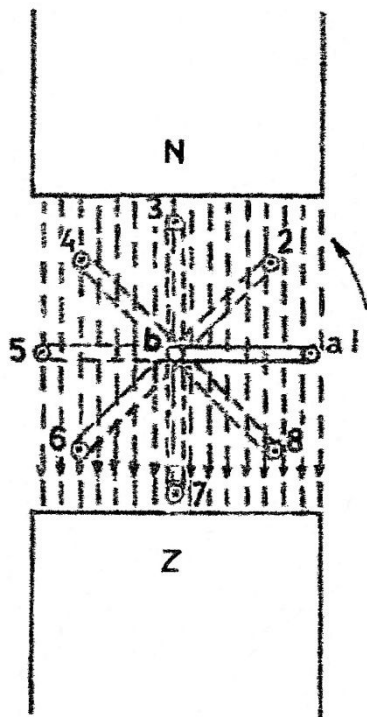


Fig. 1,9. Vooraanzicht van fig. 1,8.

We denken ons een rechthoekig gevormde winding, draaiend om AB in een homogeen magnetisch veld. (zie fig. 1,8)

Afhankelijk van de stand van de winding zal deze meer of minder flux omvatten. Gedurende de draaiing van de winding zal de omvatte flux veranderen en in de winding een emk van inductie doen ontstaan.

De richting van de emk is afhankelijk van het feit of de omvatte flux toe- of afneemt, terwijl de grootte van de emk afhankelijk is van de snelheid waarmee de magnetische flux toe- of afneemt (zie de wet van Faraday).

Ter verduidelijking bezien we fig. 1,9 waarin we het vooraanzicht van fig. 1,8 hebben weergegeven. In stand 1 van de winding zien we het vlak van de winding loodrecht op de richting van de flux staan.

De winding omvat dus een maximum-flux. In stand 2 is de omvatte flux kleiner dan in stand 1.

Gedurende deze draaiing van 1 naar 2 is dus in de winding een emk van inductie ontstaan die in geleider *a* naar ons toe en in geleider *b* van ons af is gericht. Denk hierbij er aan dat de emk van inductie altijd een zodanige richting heeft, dat de fluxverandering wordt tegengewerkt. In de gehele winding zullen deze beide emk's elkaar ondersteunen. Draaien we de winding van 2 naar 3, dan zal eveneens de omvatte flux afnemen en de emk dus in dezelfde richting werkzaam blijven. In stand 3 is de omvatte flux minimaal (windingsvlak evenwijdig met de fluxrichting).

Gedurende de verplaatsing van de winding van 3 naar 4 zal de omvatte flux toenemen. Bij het passeren van stand 3 gaat de afname van de flux over in een toename. Dit zou een omkering van de richting der opgewekte emk van inductie ten gevolge hebben. We moeten echter bedenken, dat de flux nu ook de andere kant van de winding binnentreedt, hetgeen ook een omkering van de richting van de emk ten gevolge moet hebben.



Deze twee invloeden hebben tot resultaat, dat de emk gedurende het passeren van stand 3 niet van richting verandert. De winding draaiend van 3 naar 4 en van 4 naar 5 blijft de omvatte flux toenemen en in stand 5 de maximum-waarde te bereiken.

Gedurende het passeren van stand 5 gaat de fluxverandering van een toename over in een afname, dus zal de emk in een stand even na 5 een andere richting hebben dan gedurende de draaiing van 1 tot 5. Van stand 5 naar stand 6 en van stand 6 naar stand 7 blijft gedurende de beweging de omvatte flux afnemen, om in stand 7 wederom een minimumwaarde te bereiken. Gedurende de passage van stand 7 vindt hetzelfde plaats als we beredeneerd hebben bij stand 3 van de winding. De emk behoudt van stand 5 tot 1 dezelfde richting; echter tegengesteld aan de richting die de emk heeft gedurende de verplaatsing van stand 1 tot stand 5. We zien dus reeds dat in de winding gedurende één omwenteling een wisselspanning tot stand komt.

Indien we de winding met een constante snelheid laten rondwentelen, dan zal de grootte van de emk van inductie niet steeds dezelfde waarde hebben. Laten we de winding beschouwen tijdens het passeren van stand 1. De omvatte flux is dan maximaal en zal, als de winding van even voor stand 1 tot even na stand 1 beweegt niet veranderen. De geleider a beweegt zich dan over een zeer kleine draaiingshoek, evenwijdig met de fluxrichting. Gedurende het passeren van stand 1 zal in de winding dus geen emk van inductie ontstaan. Hetzelfde geldt gedurende het moment dat de winding stand 5 passeert.

Laten we de winding steeds kleine – gelijke – hoekjes draaien in de richting van stand 3, dan zal de fluxverandering bij het verplaatsen van de kleine hoekjes groter worden, naarmate stand 3 dichter wordt genaderd. Bij het bereiken van stand 3 zal dan de grootste fluxverandering plaatsvinden.

Men dient in het oog te houden, dat bij het bereiken van stand 3 de omvatte flux minimaal is, maar dat de verandering van de omvatte flux bij een kleine verandering van de draaiingshoek maximaal is. Bij het passeren van stand 3 zal in de winding de grootste emk van inductie ontstaan. Hetzelfde geldt voor stand 7, echter daar is de richting van de emk tegengesteld aan die in stand 3. We zien dus, indien we de winding een volledige omwenteling laten maken van 1 naar 3, de emk toenemen van nul tot een bepaalde waarde, van 3 naar 5 afnemen tot nul, van 5 naar 7 in tegengestelde richting toenemen van tot een bepaalde waarde en van 7 naar 1 weer afnemen tot nul. Indien we de draaiingshoek in graden uitdrukken en stand 1 laten overeenkomen met 0° , dan komen de standen 3, 5 en 7 respectievelijk overeen met 90° , 180° en 270° . Teruggekomen in stand 1 heeft de winding een hoek van 360° doorlopen.

Bij een draaiingshoek van 0° en 180° is de opgewekte spanning nul volt en bij een draaiingshoek van 90° en 270° is de opgewekte emk maximaal. We zien hier veel overeenkomst met de waarde van een sinus van een aangroeiende hoek van 0° tot 360° . Bewezen kan worden, dat het verloop van de spanning dezelfde gedaante heeft als een sinusoïde.

We kunnen de opgewekte spanning nu grafisch weergeven (zie fig. 1,10). De grootte van de opgewekte spanning is ook afhankelijk van de snelheid waarmee de omvatte verandert, dus de snelheid waarmee de winding draait. Op de momenten dat de winding in fig. 1,9 de standen 3 en 7 passeert, is de sinus van de doorlopen hoek maximaal en gelijk 1. De in de winding geïnduceerde spanning is dan eveneens maximaal. Deze maximum-waarde van de sinusvormige spanning wordt amplitude genoemd en aangeduid met \hat{U} . Zie ook fig. 1,10 bij 90° en 270° .

R.T.

6 W.T.

Nadruk verboden

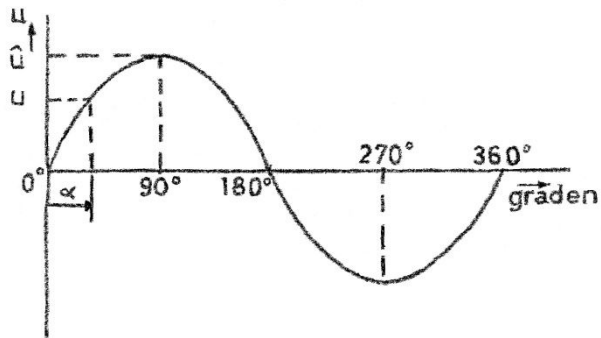


Fig. 1,10. Sinusvormige wisselspanning.

Op alle andere momenten treedt een zogenaamde momentele waarde van de spanning op, die we aanduiden met de letter U .

We kunnen de momentele waarde uitdrukken in de amplitude van de spanning:

$$U = \hat{U} \sin \alpha.$$

Voor elke waarde van de doorlopen hoek α is hieruit de momentele waarde te berekenen indien de amplitude bekend is.

We hebben in het bovenstaande gezien dat het gedurende het doorlopen van een hoek van 360° een spanning in de winding wordt ontwikkeld zoals fig. 1,10 weergeeft.

Bij de volgende rondwenteling van de win-

ding is weer een dergelijke spanning waar te nemen. Laten we de winding in een seconde 5 omwentelingen maken, dan verkrijgen we een spanning zoals fig. 1,11 weergeeft.

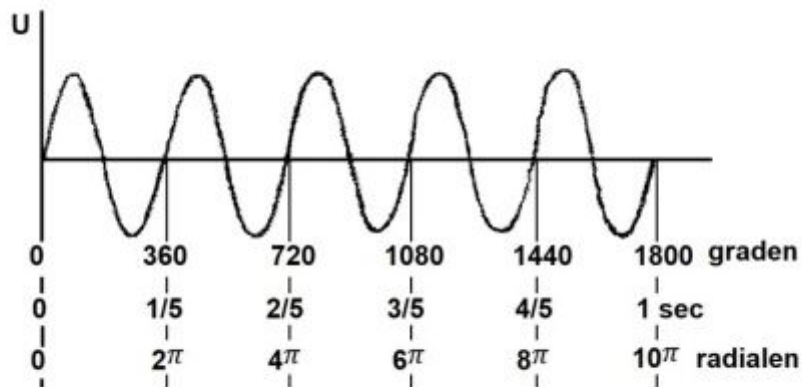


Fig. 1,11. Sinusvormige wisselspanning met een frequentie van 5 Hz.

In deze figuur is o.a. naast de doorlopen hoek in graden ook de tijd, gedurende welke deze spanning tot stand komt, weergegeven. We zien dat na $1/5$ seconde dezelfde spanningsfiguur zich herhaalt.



De spanning bezit een periode. Een periode van een sinusvormige spanning is dat gedeelte, dat zich na het doorlopen van 360° herhaalt. Dus gedurende een omwenteling van de winding wordt een periode van de spanning opgewekt. Het aantal perioden dat per seconde wordt ontwikkeld, wordt de frequentie van de wisselspanning genoemd en aangeduid met de letter f . We zeggen dat de frequentie van de spanning volgens fig. 1,11, vijf perioden per sec. is.

Ook wordt de frequentie wel uitgedrukt in Hertz, symbool Hz of in cycles per sec. afgekort c/s.

De tijd, nodig voor het doorlopen van een periode van de wisselspanning wordt de trillingstijd T genoemd.

De hoek die bij het ronddraaien van de winding per seconde wordt doorlopen, kunnen we uitdrukken in radialen (zie VI.M. 10).

Het aantal radialen dat per sec. wordt doorlopen, wordt ook wel hoeksnelheid of cirkelfrequentie genoemd, dus het aantal radialen per sec. wordt aangegeven met de letter ω (omega). Daar per omwenteling dus 360° of 2π radialen doorlopen wordt, is de cirkelfrequentie gelijk aan $\omega = 2\pi f$ radialen per seconde.

Na t seconden is de doorlopen hoek dus ωt radialen. De momentele waarde van de sinusvormige spanning wordt nu $U = \hat{U} \sin \omega t$. In figuur 1,11 is tevens langs de horizontale as de doorlopen hoek in radialen aangegeven. Wat hiervoor is opgemerkt over de sinusvormige wisselspanning, geldt eveneens voor de sinusvormige stroom. De momentele waarde van een sinusvormige wisselstroom is: $I = \hat{I} \sin \omega t$, waarin I de momentele waarde en \hat{I} de amplitude voorstelt.

Het gedeelte $\sin \omega t$ uit bovenstaande uitdrukking wordt de fase van de spanning of stroom genoemd.

1.3 Gemiddelde waarde van een sinusvormige wisselstroom en – spanning.

Om in de gelegenheid te zijn de resultaten die met een sinusvormige wisselstroom worden verkregen vast te leggen, is het nodig enkele andere grootheden naast de amplitude voor de wisselstroom in te voeren.

Allereerst dan de gemiddelde waarde. We kunnen ons het beste een idee vormen betreffende de gemiddelde waarde, door te bedenken, dat gedurende het tijdvak $t - t_0$ een zekere elektrische lading wordt verplaatst, zie fig. 1,12.

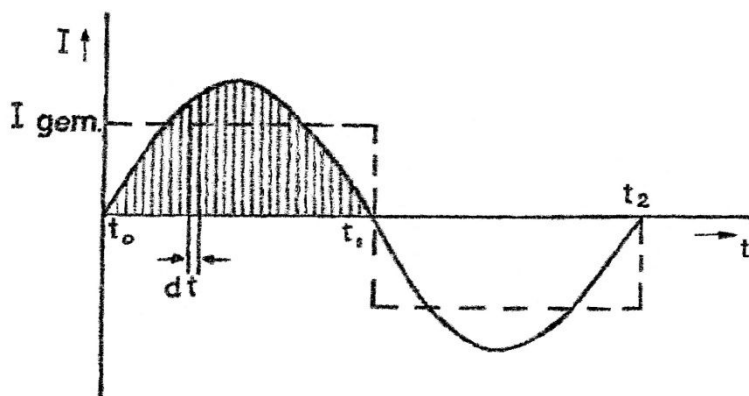


Fig. 1,12. Bepaling gemiddelde waarde van sinusvormige wisselstroom.

R.T.

8 W.T.

Nadruk verboden

De gemiddelde waarde is nu die gelijkstroom, die in dezelfde tijd $t_0 - t_1$, dezelfde lading verplaatst. Daar de stroomwaarde gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ steeds verandert, verdelen we het tijdvak $t_0 - t_1$ in zeer kleine tijdvakjes dt , zo klein, dat we gedurende zo'n klein tijdvakje de stroom constant mogen denken. Gedurende elk zo'n klein tijdvakje wordt een lading $I dt$ verplaatst. We tellen nu alle kleine ladingen $I dt$, gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$, bij elkaar op en vinden dan de totaal verplaatste lading. Deze lading delen we nu door de totale tijd ($t_0 - t_1$) en vinden dan een gelijkstroomwaarde, die in dezelfde tijd, dezelfde lading verplaatst als de wisselstroom van $t_0 - t_1$. Voor de gemiddelde waarde wordt dan gevonden:

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{I}.$$

Gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ is ten gevolge van de stroomrichting de lading in een bepaalde (positieve) richting verplaatst. Van t_1 tot t_2 vloeit de stroom in tegengestelde (negatieve) richting. De lading zal dus ook in negatieve richting worden verplaatst. Daar de lading welke gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ wordt verplaatst even groot, echter tegengesteld van richting is, als gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$, is dus gedurende de gehele periode van de wisselstroom de totale ladingsverplaatsing nul en dus ook de gemiddelde waarde gelijk aan nul.

De gemiddelde waarde van een halve periode van een sinusvormige wisselstroom is dus

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{I}.$$

en de gemiddelde waarde van één of meer volledige perioden is gelijk nul.

De gemiddelde waarde van een halve periode van een sinusvormige wisselspanning is derhalve:

$$U_{gem} = \frac{2}{\pi} \hat{U}.$$

We zien dus dat de gemiddelde waarde van een sinusoidale wisselspanning, over een periode of langer tijdvak gemeten, gelijk nul is. Dit geldt eveneens voor elke zuivere wisselspanning of stroom. Immers, dan zijn de oppervlakken van de figuur onder en boven de horizontale as even groot en over een periode gemeten tezamen nul.

We moeten echter wel bedenken, dat de gemiddelde waarde voor een stroom- of spanningsfiguur aan een zijde van de horizontale as alleen dan gelijk is aan $\frac{2}{\pi}$ maal de amplitudewaarde, indien de spanning of stroom een sinusoidaal verloop heeft.

Voor ieder ander stroom- of spanningstype zullen we, zoals we later zullen zien, een andere gemiddelde waarde verkrijgen en zal dus voor elke andere stroom- of spanningsgrafiek moeten worden berekend.

Is de stroom of spanning geen zuivere wisselstroom of spanning, dan kan dus ook de gemiddelde waarde van een periode of langere tijd niet nul zijn.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 1 t/m 8.



1.4. Effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom.

Een tweede grootheid die veel gebezigd wordt, om een sinusvormige wisselspanning of – stroom aan te duiden is de effectieve waarde.

Onder de effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom wordt verstaan, die gelijkstroom, die in dezelfde tijd en in dezelfde weerstand, dezelfde energie levert als de wisselstroom.

We stellen ons een sinusvormige stroom gaande door een weerstand voor (zie fig. 1,13). Deze stroom zal op elk moment een energie leveren aan de weerstand, die gelijk is aan: $I^2 R = \hat{I}^2 R \sin^2 \omega t$. De energie is recht evenredig met het kwadraat van de momentele waarde van de wisselstroom. De energie-ontwikkeling zal dus op gelijke wijze veranderen als het kwadraat van de momentele waarde. Tot de grafiek die het verloop van het kwadraat van de stroomsterkte weergeeft, kunnen we als volgt komen.

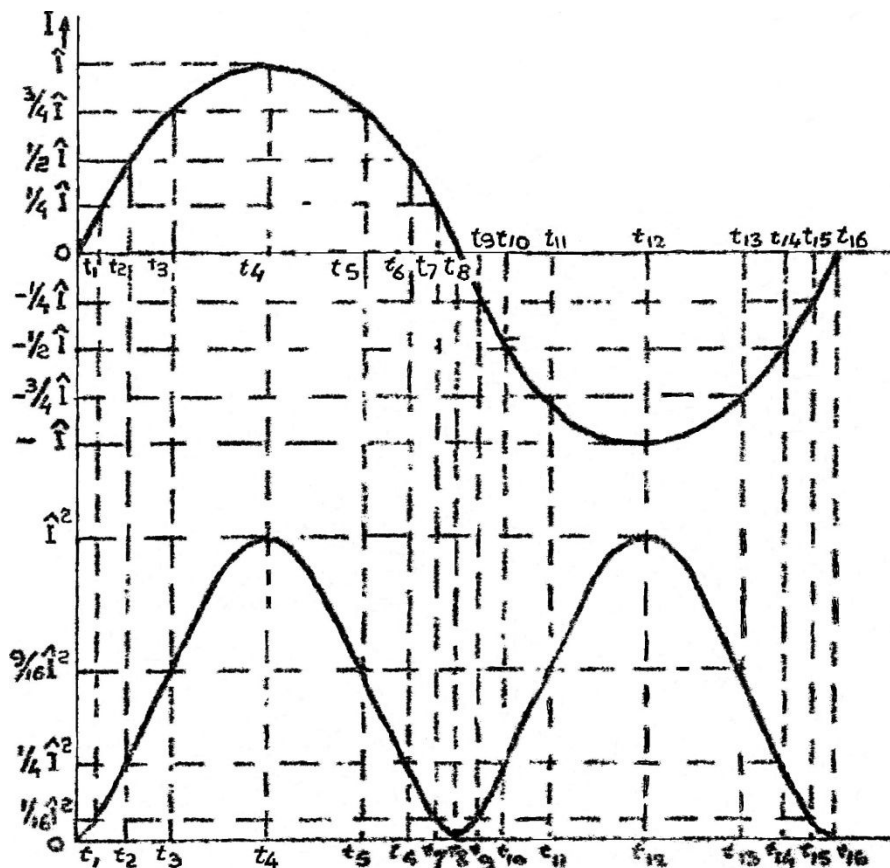


Fig.1.13. Bepaling effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom.

Op tijdstippen t_2 en t_6 is de momentele waarde van de stroom $\frac{1}{2} \hat{I}$. Het kwadraat hiervan is $\frac{1}{4} \hat{I}^2$. In de onderste figuur zetten we deze waarde uit bij t_2 en t_6 . De momentele waarde van de stroom op de tijdstippen t_1 en t_7 is $\frac{1}{4} \hat{I}$; het kwadraat hiervan is $\frac{1}{16} \hat{I}^2$. Op de momenten t_3 en t_5 is de stroom $\frac{3}{4} \hat{I}$ en het kwadraat $\frac{9}{16} \hat{I}^2$. Gedurende het tijdvak t_8 tot t_{16} is de momentele waarde van de stroom negatief.

R.T.

10 W.T.

Nadruk verboden

Op momenten t_{10} en t_{14} dus $-\frac{1}{2}\hat{I}$. Het kwadraat wordt echter positief en wel $\frac{1}{4}\hat{I}$. Dat dit resultaat positief is, evenals voor alle tijdstippen tussen t_8 en t_{16} , is makkelijk voor te stellen; immers zowel bij positieve als bij negatieve richting wordt in de weerstand energie (warmte) ontwikkeld.

Indien we de verkregen waarden bij de desbetreffende tijdstippen in de onderste figuur uitzetten en door een lijn verbinden, verkrijgen we de grafiek van 1,13 die het verloop van het kwadraat van een sinusvormige stroom weergeeft. Op gelijke wijze verandert de energieontwikkeling ten gevolge van een sinusvormige stroom.

Op soortgelijke wijze als in fig. 1,12 kunnen we nu in de onderste figuur van 1,13 de tijd in zeer kleine tijdvakjes verdelen; per tijdseenheid de energie bepalen en de energie van al die tijdvakjes bij elkaar optellen.

Deze totale energie stellen we gelijk aan de energie die een gelijkstroom in dezelfde tijd, gaande door dezelfde weerstand, ontwikkelt. De benodigde gelijkstroom is hieruit te bepalen en wordt de effectieve waarde van de sinusvormige wisselstroom genoemd.

Voor de effectieve waarde wordt dan gevonden:

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{I} \text{ en voor de spanning:}$$

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{U}.$$

$\sqrt{2}$ kunnen we gelijkstellen aan 1,41.

Tussen de gemiddelde en de effectieve waarde van een sinusvormige wisselstroom of spanning bestaat een vaste verhouding, de vormfactor, deze is gelijk aan:

$$\frac{I_{eff}}{I_{gem}} = \frac{\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}\hat{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} = 1,11.$$

Bij de bepaling van de effectieve waarde van een stroom of spanning moeten we bedenken dat datgene dat we nu hebben afgeleid alleen geldt voor de sinusoïdale wisselspanning of stroom.

Voor elk ander stroom- of spanningstype zal weer een andere vorm voor de effectieve waarde worden gevonden.

De vormfactor is alleen een gegeven voor de verhouding van de effectieve waarde en de gemiddelde waarde over een halve periode gemeten van een sinusoïdale wisselspanning of stroom.

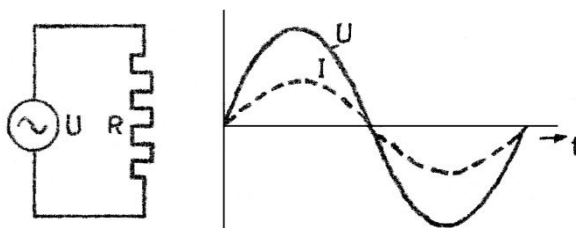
In de praktijk, namelijk vooral in de elektrotechniek, bezigt men veelal de effectieve waarde van een wisselstroom of spanning daar de stroom of spanning in het algemeen gebruikt wordt voor het leveren van energie.

In de radiotechniek zullen we meermalen de amplitudewaarde van de wisselstroom of spanning gebruiken.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 9 t/m 11.

Hoofdstuk 2.Wisselspanningen, aangesloten op reactanties en impedanties.2.1. Wisselspanning aangesloten op een weerstand.

Indien een sinusvormige wisselspanning aangesloten wordt op een weerstand, dan zal een wisselstroom optreden, die in gelijke tred met de spanning verandert. Bij toenemende spanning ontstaat een toenemende stroom, bij afnemende spanning een afnemende stroom enz. (zie fig. 2,1). We zeggen nu dat de stroom in fase (in gelijke tred) is met de spanning. De amplitude van de stroom is nu te berekenen uit:



$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}.$$

Indien de aangelegde spanning is voorgesteld door $U = \hat{U} \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de stroom bepaald door:

$$I = \frac{\hat{U}}{R} \sin \omega t.$$

Fig. 2,1. Wisselspanning aangesloten op een weerstand.

daar de stroom in fase is met de spanning, wordt de fase in beide gevallen dus $\sin \omega t$.

2.2. Wisselspanning aangesloten op een condensator.

Zoals we hebben gezien, zal, indien een condensator wordt aangesloten op een gelijkspanning, er een laadstroom optreden, totdat de condensator geladen is. Daarna blijft de stroom in de keten gelijk aan nul. In een keten met een condensator kan dus geen gelijkstroom vloeien. We zeggen dan wel dat een condensator voor gelijkstroom een oneindig grote weerstand bezit.

Sluiten we een wisselspanning aan op een condensator, dan zal hetgeen plaatsvindt veel gecompliceerder zijn, daar de spanning verandert in waarde en omkeert van richting.

Indien de spanning U_a (fig. 2,2) van nul tot een zekere waarde aangroeit, zal een laadstroom optreden. Deze laadstroom heeft tot gevolg dat de condensator een lading krijgt en dus ook een spanning zal bezitten. Deze spanning U_1 is in tegengestelde zin werkzaam ten opzichte van de aangelegde spanning U_a . De aangelegde spanning zal dus tegengewerkt worden door de spanning op de condensator,

Stellen we ons voor dat de aangelegde spanning U_a van nul tot een zeer kleine waarde aangroeit, dan kunnen we ons een ogenblik indenken, dat de condensator nog geen spanning heeft en er dus geen tegenwerking in de keten optreedt. De stroom zal dan een grote waarde hebben en zelfs een maximum waarde hebben. Een ogenblik daarna zal de condensator wel een spanning bezitten en U_a tegenwerken. Ten gevolge hiervan zal de stroom kleiner worden. Naarmate de condensator verder wordt opgeladen, dus een grotere spanning U_1 krijgt, zal de stroom kleiner worden. Op het moment dat U_a de maximum-waarde bereikt, kunnen we deze spanning gedurende een kort ogenblik constant denken (de grafiek loopt dan horizontaal).

R.T.

12 W.T.

Nadruk verboden

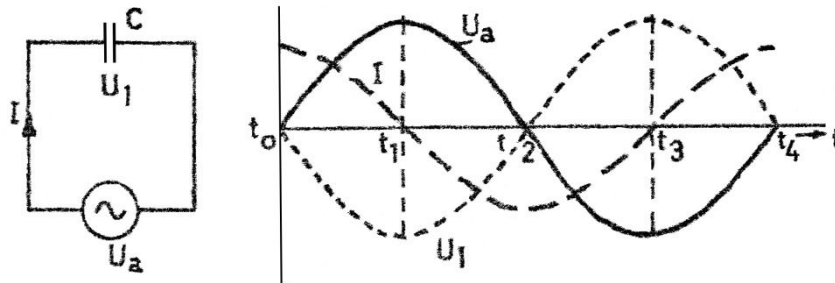


Fig. 2,2. Wisselspanning aangesloten op een condensator.

De condensator is dan ook tot de maximum-waarde opgeladen en heeft een spanning van gelijke grootte als U_a , echter tegengesteld van richting werkzaam. Deze beide spanningen (U_a en U_1) heffen elkaar op en er kan dus geen stroom in de keten vloeien. In Fig. 2,2 zien we gedurende het tijdvak t_0 tot t_1 U_a van nul tot positief maximum toenemen, U_1 van nul tot negatief maximum toenemen en I van positief maximum tot nul afnemen.

In het tijdvak van t_1 tot t_2 neemt U_a van positief maximum af tot nul. Ten gevolge hiervan zal de condensator zich gaan ontladen. Immers daar U_a afneemt, zal ook U_1 gaan afnemen, want deze kan niet groter zijn dan U_a . Naarmate de waarde van U_a sneller afneemt, moet U_1 ook sneller afnemen, dus meer lading opgeven, ofwel een grotere ontladestroom voeren.

Dat U_a , naarmate het tijdstip t_2 meer wordt genaderd, sneller gaat afnemen, volgt uit het verloop van de sinusoïde, deze gaat steeds steiler verlopen. Zo zien we de ontladestroom aangroeien van nul tot maximum-waarde. Deze ontladestroom is onder de horizontale as weergegeven, daar deze een richting heeft tegengesteld aan die van de laadstroom. Gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ zien we dus U_a afnemen van de positieve maximum-waarde tot nul, U_1 afnemen van de negatieve maximum-waarde tot nul en I toenemen van nul tot negatief maximum.

Gedurende het tijdvak $t_2 - t_3$ gaat U_a in tegengestelde richting aangroeien en in het tijdvak $t_3 - t_4$ van negatief maximum afnemen tot nul. In deze tijdvakken gebeurt precies hetzelfde als we hebben beredeneerd voor het tijdvak $t_0 - t_2$, echter in tegengestelde richting.

Beschouwen we fig. 2,2 eens in zijn geheel, dan zien we, dat de stroom niet meer in gelijke tred is met de aangelegde spanning; op de momenten dat U_a maximum is, is de stroom nul en omgekeerd. De stroom heeft nu een faseverschuiving ten opzichte van de spanning. De stroom is over een hoek van 90° of $\pi/2$ radialen verschoven ten opzichte van de spanning en wel voorijlend. We zien de stroom van nul tot $\pi/2$ van positief maximum afnemen tot nul, terwijl de spanning dezelfde verandering ondergaat van $\pi/2$ tot π . De stroom ijlt dus 90° voor op de aangelegde spanning.



Indien we een wisselspanning van een bepaalde waarde en met een zekere frequentie op een condensator aansluiten, dan zal er een bepaalde stroom optreden. De stroom wordt bepaald door de grootte van de weerstand die de condensator voor de wisselstroom vormt. Daar deze weerstand een zeer bijzonder karakter heeft – immers hij veroorzaakt ook 90° faseverschuiving – wordt deze aangeduid met de naam schijnbare weerstand of reactantie.

De reactantie van een condensator is te berekenen uit:

$$R_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \text{ ohm.}$$

In deze uitdrukking is ω de cirkelfrequentie van de aangelegde spanning en C is uitgedrukt in farad. We zien, dat de reactantie van een condensator omgekeerd evenredig is met de frequentie en met de capaciteit.

Naarmate de frequentie en de capaciteit groter worden, neemt de capacatieve reactantie af; terwijl bij afname van de frequentie of vermindering van de capaciteit, de schijnbare weerstand juist toeneemt. Wordt de frequentie van de aangelegde spanning gelijk aan nul, d.w.z. dat een gelijkspanning op de condensator wordt aangesloten, dan blijkt dat de reactantie oneindig groot wordt, dus de stroom nul zal worden.

Of de frequentie nu toe- of afneemt, of dat de capaciteit van grootte verandert, wijzigt echter niets in de faseverschuiving tussen de stroom en de spanning; deze blijft 90° .

Is de momentele waarde van de aangelegde wisselspanning aangegeven met $U_a = \hat{U} \sin \omega t$, dan is de amplitude van de optredende wisselstroom, volgens de wet van Ohm, bepaald door:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\frac{1}{\omega C}} = \hat{U}_a \cdot \omega C.$$

Bij het bepalen van de fase van de stroom moeten we bedenken dat de stroom $\frac{\pi}{2}$ radialen voorijlt, dus de fase van de stroom is $\frac{\pi}{2}$ groter dan de fase van de aangelegde spanning.

De momentele waarde van de stroom is dus bepaald door: $I = \hat{U} \omega C \left(\sin \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$.

In de meetkunde hebben we gezien, dat een sinusoïde werd ontwikkeld met behulp van een draaiende lijn. Een sinusvormige wisselspanning of stroom kunnen we ook ontstaan denken door een roterende lijn. De roterende lijn stelt nu een spanningswaarde of stroomwaarde voor.

We kunnen de wisselstroomproblemen nu voorstellen door deze roterende lijnen. We bereiken hiermee, dat we een beter overzicht krijgen van hetgeen in een schakeling plaatsvindt en dat we ook gemakkelijker de grootheden kunnen herkennen.

We kunnen de aangelegde spanning aangeven door de lijn \hat{U}_a in fig. 2,3, waarbij we moeten bedenken, dat deze lijn met een hoeksnelheid ω roteert. Algemeen gebruikelijk is het, de draairichting linksom, dus tegen de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk te kiezen. We geven dit aan door een pijl met vermelding van de hoeksnelheid ω . De stroom door de condensator ijlt 90° voor op deze spanning, dus geven we deze aan door een lijn die 90° vooruitgedraaid is t.o.v. de aangelegde spanning.

Op deze wijze ontstaat een vectordiagram en de lijnen die daarin voorkomen, zoals \hat{U}_a en \hat{I} worden vectoren genoemd.

De lengte van de vectoren is bepaald door de amplitude van de stroom en van de spanning.

Deze waarden kunnen op bepaalde schaal in tekening worden gebracht. Daar er echter een vaste

verhouding bestaat tussen de amplitude en de effectieve waarde van de stroom en de spanning, kunnen met de vectoren, zij het op andere schaal, ook de effectieve waarden worden aangegeven.

Daar de effectieve waarden constante groot-heden zijn; niet meer afhankelijk van de tijd, kunnen we de vectoren ook tekenen zonder ons er in te verdiepen op welk tijdstip de vec-toren getekend moeten worden.

Dit geeft veel vereenvoudiging daar we slechts de vectoren onderling hebben te beoor-delen.

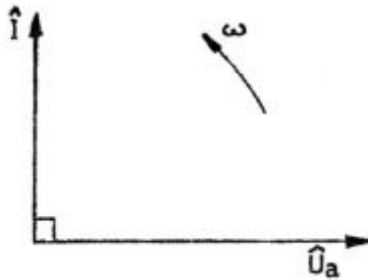


Fig. 2,3. Vectordiagram van stroom en spanning bij een condensator.

2.3. Wisselspanning, aangesloten op een serieschakeling van condensator en weerstand.

In de schakeling volgens fig. 2,4 zal de aangelegde spanning U_a een stroom door de keten ten gevolge hebben, die door de weerstand en condensator dezelfde waarde heeft. De stroom die in deze keten optreedt, is in fig. 2,5 door de getrokken sinusoïde weergegeven.

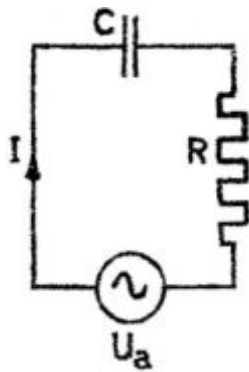


Fig. 2,4. Serieschakeling van condensator en weerstand.

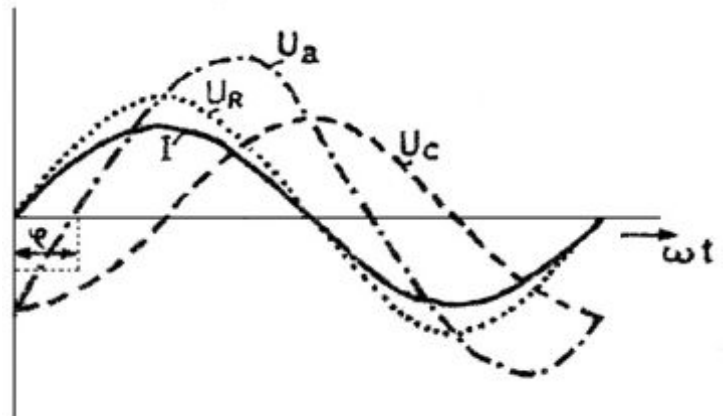


Fig. 2,5. Stroom en spanningen als functie van de tijd voor de schakeling volgens fig. 2,4.

Deze stroom veroorzaakt een spanning $U_R = I \times R$ over de weerstand, welke in fase is met de stroom. Deze spanning is door een gestippelde sinusoïde weergegeven. Over de condensator ontstaat, ten gevolge van de stroom, een spanning $U_C = I \times \frac{1}{\omega C}$, die 90° of $\frac{\pi}{2}$ radialen na-ijlt op de stroom, (zie gestreepte lijn in fig. 2,5). Het verloop van de aangelegde spanning, die genoemde stroom ten gevolge heeft, kunnen we nu vastleggen, door op elk moment de som te nemen van de momentele waarden van de spanningen U_R en U_C .



Op de momenten dat deze spanningen tegengestelde richtingen hebben, nemen we het verschil van de momentele waarden. We verkrijgen de streep-stiplijn, die het verloop van U_a weergeeft. We zien dat deze spanning een hoek φ , die kleiner is dan 90° , na-ijlt op de stroom in de keten.

We gaan nu dezelfde keten, volgens fig. 2,4, nog eens bekijken, maar nu met behulp van een vectordiagram. Hiertoe plaatsen we allereerst de stroomvector I (zie fig. 2,6). Deze stroom veroorzaakt een spanning U_R over de weerstand in fase met de stroom.

Deze vector laten we dus samenvallen met de stroomvector. Verder wordt over de condensator een spanning U_C teweeggebracht, die 90° op de stroom na-ijlt. Deze tekenen we dus loodrecht naar beneden.

De aangelegde spanning U_a moet nu een zodanige waarde hebben, dat deze gelijk is aan de totale spanning, die over R en C wordt ontwikkeld. De gezamenlijke waarde van U_R en U_C kunnen we, nu deze beide vectoren een rechte hoek met elkaar vormen, vinden door op U_R en U_C een rechthoek te construeren en in deze rechthoek een diagonaal te tekenen.

Deze diagonaal is nu de meetkundige som van U_R en U_C en stelt de grootte en richting van U_a voor. We zien ook hier dat U_a een hoek φ na-ijlt op U_R . Deze hoek is kleiner dan 90° .

Met behulp van het verkregen vectordiagram

zijn we in de gelegenheid enige grootheden van de schakeling volgens fig. 2,4 te berekenen.

Door toepassing van de stelling van Pythagoras, kunnen we een verband opschrijven tussen de spanningen die in dit diagram zijn getekend.

De stelling van Pythagoras luidt:

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de hypotenusa gelijk aan de som van de kwadraten van beide rechthoekszijden.

Dus voor de rechthoekige driehoek, die gevormd wordt door U_a , U_R en U_C (de stippellijn aan het einde van U_R is gelijk aan U_C), geldt:

$$U_a^2 = U_R^2 + U_C^2 \text{ of:}$$

$$U_a^2 = I^2 R^2 + I^2 \frac{1}{\omega^2 C^2} \text{ en}$$

$$U_a^2 = I^2 \left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right).$$

Door aan beide zijden van het = -teken de wortel te trekken, verkrijgen we:

$$U_a = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Delen we nu beide zijden van het = -teken door I dan vinden we:

$$\frac{U_a}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

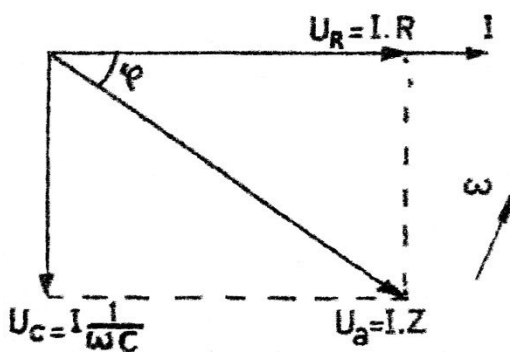


Fig. 2,6. Vectordiagram betreffende fig. 2,4 en 2,5.

R.T.

16 W.T.

Nadruk verboden

We weten, dat een spanning gedeeld door een stroom een weerstand oplevert.

Hier zal het quotiënt $\frac{U_a}{I}$ dus de weerstand aangeven, die de gegeven schakeling aan de stroom biedt.

Daar deze weerstand niet op te vatten is als een gewone weerstand, omdat hij een faseverschuiving ten gevolge heeft, geven we deze aan met de naam impedantie (Z).

$$\text{Dus: } \frac{U_a}{I} = Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

De faseverschuiving die optreedt tussen stroom en spanning is nu te bepalen door de tangens van hoek φ vast te leggen.

$$\tan \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I \times \frac{1}{\omega C}}{I \times R} = \frac{1}{\omega C R}.$$

We moeten echter wel bedenken, dat φ nu de hoek is waarmede de spanning na-ijlt op de stroom of omgekeerd: de hoek waarmede de stroom voorijlt op de spanning

Soms is het nodig de cosinus van de hoek van faseverschuiving te bepalen. De cosinus van een hoek is bepaald door het quotiënt van de aanliggende rechthoekszijde en de hypotenusa van een rechthoekige driehoek. In de driehoek gevormd door U_R , U_C en U_a is $\cos \varphi = \frac{I \times R}{I \times Z}$ of:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Is de aangelegde spanning gegeven door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is nu de momentele waarde van de stroom bepaald door:

$$I = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \varphi),$$

waarin $\frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$ de amplitude van stroom voorstelt en φ de de faseverschuiving

tussen I en U_a . Indien we het vectordiagram nog eens bekijken, dan zien we dat de daarin voorkomende vectoren, de verhoudingen weergeven van de spanningen, die zich in het circuit voordoen.

Deze verhoudingen blijven ongewijzigd bestaan, indien we alle vectoren door hetzelfde getal delen. De spanningsvectoren kunnen alle voorgesteld worden door het product van de stroom en weerstand, reactantie of impedantie. Delen we alle vectoren door I dan houden we vectoren over die de weerstand, reactantie en impedantie voorstellen (zie fig. 2,7).

Hieruit blijkt dus dat we ook een vectordiagram kunnen maken door de weerstand, reactantie en impedantie als vectoren uit te zetten. Het is gemakkelijk in te zien, dat de grootheden zoals impedantie, $\tan \varphi$ en $\cos \varphi$ ook uit dit diagram zijn af te leiden.

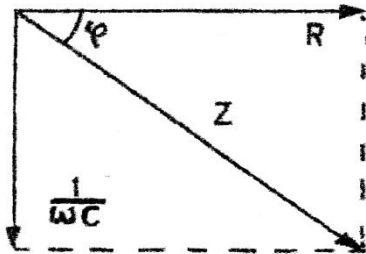


Fig. 2,7. Vectordiagram voor reactantie en impedantie.

Voorbeeld: Voor de schakeling volgens fig. 2,4 is gegeven: $\hat{U}_a = 100 \text{ V}$; $R = 30 \Omega$; $C = 25000 \text{ pF}$ en $\omega = 10^6$. Bereken de stroom in de keten, de spanning over R en over C, de tangens en de cosinus van de hoek van faseverschuiving.

Oplossing:

De stroom in de keten is bepaald door:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{100}{\sqrt{900 + \frac{1}{10^{12} \cdot 625 \cdot 10^{-12}}}}$$

$$= \hat{I} = \frac{100}{\sqrt{900 + \frac{10^6}{625}}}. \hat{I} = \frac{100}{\sqrt{900 + 1600}} = \frac{100}{\sqrt{2500}} = \frac{100}{50} = 2 \text{ A.}$$

De spanning over de weerstand is te berekenen uit:

$$\hat{U}_R = \hat{I} \cdot R = 2 \times 30 = 60 \text{ V.}$$

De spanning over de condensator is: $\hat{U}_C = \hat{I} \frac{1}{\omega C}$.

$$\hat{U}_C = 2 \times \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 2 \times \frac{10^3}{25} = 2 \times 40 = 80 \text{ V.}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-9} \cdot 30} = \frac{1}{75 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^2}{75} = \frac{4}{3}.$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{I \cdot R}{I \cdot Z} = \frac{60}{100} = 0,6.$$

Voorbeeld: Op een serieschakeling van een weerstand en een condensator is een wisselspanning \hat{U}_a van 200 V werkzaam. Over de weerstand is een spanning aanwezig van $\hat{U}_R = 100 \text{ V}$. Hoe groot is de capaciteit van de condensator als verder nog gegeven is:

$\omega = 10^6$ en $R = 500 \Omega$.

Oplossing: Het verband tussen de voorkomende spanningen is:

$$\hat{U}_a^2 = \hat{U}_R^2 + \hat{U}_C^2. \text{ Hieruit is de spanning over C te berekenen.}$$

$$4 \cdot 10^4 = 10^4 + \hat{U}_C^2.$$

$$\hat{U}_C^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ of } \hat{U}_C = 100\sqrt{3} \text{ volt} = 173 \text{ volt.}$$

De stroom in de keten is bepaald door: $\hat{I} = \frac{\hat{U}_R}{R} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} \text{ A.}$

De reactantie van de condensator is te berekenen uit:

$$\hat{U}_C = \hat{I} \times \frac{1}{\omega C} \text{ of } \frac{1}{\omega C} = \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}} = \frac{100\sqrt{3}}{\frac{1}{5}} = 500\sqrt{3} \Omega.$$

R.T.

18 W.T.

Nadruk verboden

$$\frac{1}{\omega C} = 500\sqrt{3} \text{ of } C = \frac{1}{\omega \cdot 500\sqrt{3}} = \frac{1}{10^6 \cdot 500\sqrt{3}} = \frac{1}{5 \cdot 10^8 \sqrt{3}} \text{ farad.}$$

In pF wordt dit:

$$\frac{10^{12}}{5 \cdot 10^8 \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 10^3}{1,73} = 1156 \text{ pF.}$$

2.4. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van condensator en weerstand.

Bij de parallelschakeling van weerstand en condensator (fig. 2,8) zien we, dat op beide onderdelen dezelfde spanning staat en wel U_a .

De stroom I_t , die de krachtbron levert, splitst zich nu in twee delen I_R en I_C . De stroom door de weerstand is nu bepaald door: $I_R = \frac{U_a}{R}$

en de stroom door de condensator $I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \cdot \omega C$.

We zullen allereerst het vectordiagram van de gegeven schakeling ontwikkelen (fig. 2,9).

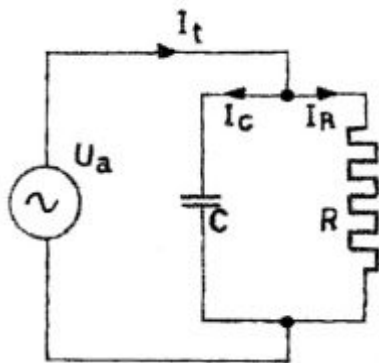


Fig. 2,8. Wisselspanning aangesloten op parallelschakeling van condensator en weerstand.

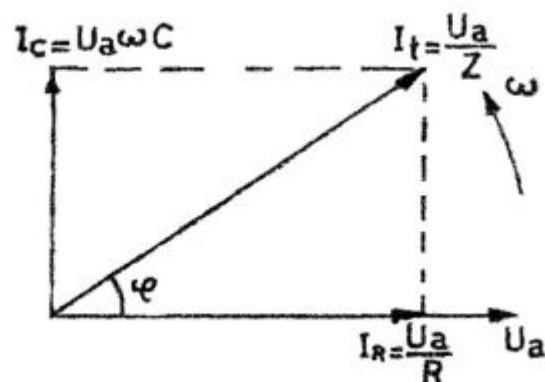


Fig. 2,9. Vectordiagram van parallelschakeling van weerstand en condensator.

We tekenen eerst een vector die U_a voorstelt. De vector die I_R aangeeft moet samenvallen met U_a , daar tussen deze grootheden geen faseverschuiving optreedt. De vector voor de stroom door de condensator moet 90° voorijlen op U_a . Het resultaat van beide stromen, de grootte en richting van I_t , vinden we weer door op beide stromen, I_R en I_C , een rechthoek te construeren en in deze rechthoek de diagonaal te tekenen. De verkregen diagonaal stelt I_t voor en is volgens de stelling van Pythagoras bepaald door:

$$I_t^2 = I_R^2 + I_C^2.$$

De totaalstroom I_t heeft een faseverschuiving ten opzichte van U_a , die door φ is aangegeven.

In bovengenoemde uitdrukking voor I_t kunnen we de reeds gegeven waarden voor I_R en I_C invullen. Dit geeft:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2} + U_a^2 \omega^2 C^2.$$

Delen we beide kanten van het = -teken door U_a^2 dan verkrijgen we:

$$\frac{I_t^2}{U_a^2} = \frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2. \text{ en na worteltrekking: } \frac{I_t}{U_a} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 16 t/m 24.



Het quotiënt $\frac{I_t}{U_a}$ is de omgekeerde waarde van weerstand of in dit geval impedantie Z , dus:

$$\frac{I_t}{U_a} = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R}$$

De impedantie is nu:

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

De faseverschuiving is wederom bepaald door (fig. 2,9):

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{U_a \omega C}{\frac{U_a}{R}} = R \omega C, \text{ waarbij de stroom dus een hoek } \varphi \text{ voorijlt op de aangelegde spanning.}$$

De cosinus van de hoek van faseverschuiving is:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a}{R} \times \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

Stellen we de aangelegde wisselspanning voor door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de totale stroom voor te stellen door:

$$I_t = \hat{I}_t \sin(\omega t + \varphi) =$$

$$I_t = \frac{\hat{U}_a}{\frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U}_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} \sin(\omega t + \varphi).$$

Voorbeeld: Bepaal de grootte en fase van de totaalstroom, die een parallelschakeling van condensator en weerstand opneemt, alsmede de stroom door de weerstand en condensator.

Gegeven is: $\hat{U}_a = 50 \text{ V}$, $\omega = 10^6$, $C = 1250 \text{ pF}$ en $R = 600 \Omega$.

Oplossing: de totaalstroom is te berekenen uit:

$$I_t = \frac{U_a}{\frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}} = \frac{U_a \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} = \frac{50 \sqrt{36 \cdot 10^4 \cdot 10^{12} \cdot 125^2 \cdot 10^{-22} + 1}}{600}.$$

$$I_t = \frac{50 \sqrt{5625 \cdot 10^{-4} + 1}}{600} = \frac{\sqrt{1,5625}}{12} = \frac{1,25}{12} = 0,104 \text{ A.}$$

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{50}{600} = \frac{1}{12} \text{ A} = 0,083 \text{ A.}$$

$$I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \cdot \omega \cdot C = 50 \times 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-11} = 0,0625 \text{ A.}$$

$$\tan \varphi = \omega C R = 10^6 \cdot 125 \cdot 10^{-11} \times 600 = 0,75.$$

R.T.

20 W.T.

Nadruk verboden

Zonder, zoals op bovengenoemde wijze is aangegeven, de totaalstroom uit te rekenen met behulp van de impedantie, kunnen we I_t ook bepalen met behulp van I_R en I_C indien we bedenken dat:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \text{ dus } I_t = \sqrt{0,083^2 + 0,0625^2} = 0,104 \text{ A.}$$

In het vectordiagram volgens fig. 2,9 stellen alle stroomvectoren het quotiënt voor van de aangelegde spanning \hat{U}_a en de desbetreffende weerstand of schijnbare weerstand.

Door alle stroomvectoren te delen door \hat{U}_a , (de verhouding tussen de vectoren verandert hierdoor niet) verkrijgen we vectoren die de omgekeerde waarden van weerstand, reactantie en impedantie voorstellen (zie fig. 2,10). Uit dit vectordiagram komen we ook tot de omgekeerde waarde

van de impedantie met behulp van de stelling van Pythagoras, nl. $\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$.

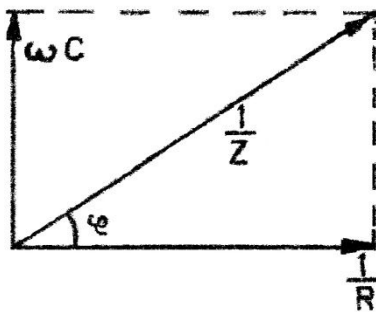


Fig. 2,10. Vectordiagram voorstellende admittantie van fig. 2,8.

De omgekeerde waarde van weerstand duiden we aan met de naam conductantie.

De omgekeerde waarde van reactantie met de naam susceptantie en de omgekeerde waarde van impedantie met de naam admittantie.

Bij de serieschakeling hebben we gezien, dat we de waarde van de impedantie kunnen bepalen door de wortel uit de som van de kwadraten van de weerstand en reactantie. Bij de parallelschakeling kunnen we de admittantie bepalen door de wortel uit de som van de kwadraten te nemen van de conductantie en susceptantie.

Voorbeeld: op een parallelschakeling van een condensator van 1000 pF en een weerstand van 2000 Ω is een spanning werkzaam met een amplitude van 500 V en een frequentie van 314000 Hz.

Bereken de stromen in de takken en de totaalstroom.

Oplossing: De stroom door de weerstand is $\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_R}{R} = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} \text{ A}$.

De stroom door de condensator is:

$$\hat{I}_C = \hat{U}_a \cdot \omega \cdot C = 500 \times 2\pi \cdot 314 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} = 500 \times 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9} = 1 \text{ A.}$$

De admittantie van de schakeling is:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + (2\pi \cdot 314 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-18}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + (2 \cdot 10^6)^2 \cdot 10^{-18}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + 4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-18}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^6} + \frac{4}{10^6}} = \sqrt{\frac{1+16}{4 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{17}{4 \cdot 10^6}}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{4,12}{2 \cdot 10^3} \text{ dus: } \hat{I}_t = \hat{U}_a \times \frac{1}{Z} = 500 \times \frac{4,12}{2 \times 10^3} = 1,03 \text{ A.}$$

$\tan \varphi$ is wederom te berekenen uit ωCR (zie fig. 2,9).

$$\tan \varphi = 2\pi \cdot 314 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^3 = 4$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 25 t/m 31.

2.5. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie

Tussen de klemmen van de zelfinductie in fig. 2,11 is een sinusvormige wisselspanning U_a aangesloten. Deze wisselspanning heeft een stroom door de zelfinductie tot gevolg. Daar dit een veranderlijke stroom is, zal deze een veranderlijk magnetische flux in de spoel veroorzaken. Deze veranderende magnetische flux heeft tot resultaat, dat in de spoel een emk van zelfinductie ontstaat. De richting van deze emk zal zodanig zijn, dat de aangelegde wisselspanning wordt tegengewerkt.

We stellen ons voor dat de weerstand van de draad, waaruit de spoel gewikkeld is, zo klein is, dat deze verwaarloosd mag worden.

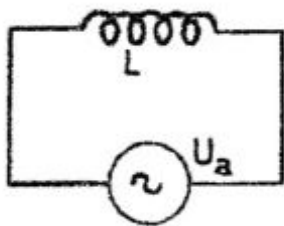


Fig. 2,11. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie.

We gaan uit van de gedachte dat in de spoel een sinusvormige wisselstroom optreedt, die in fig. 2,12 is weergegeven door de getrokken sinusoïde.

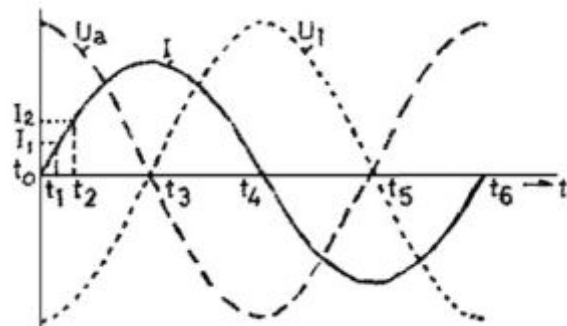


Fig. 2,12. Wisselspanning aangesloten op een zelfinductie.

Daar de fluxveranderingen verondersteld worden in fase te zijn met de stroomveranderingen, kunnen we de emk van zelfinductie afleiden uit de veranderingen van de stroom.

Op de tijdstippen t_3 en t_5 doorloopt de stroom en dus ook de flux de maximale waarde. We kunnen ons een zeer kort ogenblik de stroom constant denken. Op dit moment dus geen stroomverandering, dus ook geen emk van zelfinductie. Op de momenten t_3 en t_5 is de emk van zelfinductie dus nul.

Als de stroom van nul op het tijdstip t_0 gaat toenemen tot de waarde I_1 op tijdstip t_1 , ontstaat in de spoel een emk van zelfinductie. De stroomtoename gedurende het tijdvak t_1 en t_2 is kleiner dan de voorgaande, dus is ook de emk van zelfinductie kleiner. In gelijke tijdvakken na t_2 zal de stroom steeds minder toenemen en de emk van zelfinductie dus steeds kleiner worden, totdat de emk op het tijdstip t_3 gelijk nul wordt. Kiezen we de bovengenoemde tijdvakken zeer klein, dan komen we tot de conclusie dat de stroom het snelst verandert, als deze de minimumwaarde passeert, dus van nul tot een zeer kleine waarde aangroeit. De emk van zelfinductie is dus maximaal op het tijdstip t_0 .

Gedurende het tijdvak t_3 en t_4 gaat de stroom afnemen tot nul en zal sneller afnemen naarmate we dichterbij het tijdstip t_4 komen of zal sneller afnemen naarmate de stroom een kleinere waarde krijgt. Zo is de emk van zelfinductie op het tijdstip t_4 weer maximum. Ditzelfde geldt voor het tijdstip t_6 ,

Dus op de tijdstippen t_3 en t_5 is de emk van zelfinductie nul en op de tijdstippen t_0 , t_4 en t_6 maximaal.

R.T.

22 W.T.

Nadruk verboden

Bij het passeren van de tijdstippen t_3 en t_5 gaat de stroom van aangroeiende gedaante over in afnemende gedaante. De emk van zelfinductie zal op deze momenten dus moeten omkeren van richting.

In het tijdvak t_0 en t_3 neemt de stroom in positieve richting toe; de emk van zelfinductie zal dus in negatieve richting moeten werken (zie U_1 in fig. 2,12; gestippelde sinusoïde). Gedurende het tijdvak t_3 en t_4 neemt de stroom in positieve richting af, dus moet de emk U_1 in dezelfde (positieve) richting werkzaam zijn. Een in negatieve richting toenemende stroom ontstaat in het tijdvak t_4 en t_5 . De emk U_1 is dus in positieve richting werkzaam om gedurende het tijdvak t_5 en t_6 weer in negatieve richting te gaan werken, daar nu de stroom in negatieve richting afneemt. We zien dus de emk van zelfinductie (U_1) ontstaan als een sinusoïde, die 90° na-ijlt op de stroom door de spoel. Indien in deze keten de stroom zal verlopen zoals we hebben aangegeven, dan zal deze emk van zelfinductie op elk moment opgeheven moeten worden door de aangelegde spanning. Immers de emk van zelfinductie heeft een zodanige richting, dat deze de oorzaak van zijn ontstaan, en dat is de aangelegde spanning, tegenwerkt. De aangelegde spanning U_a kan dus getekend worden door de sinusoïde, die in tegenfase is met U_1 . U_a is in fig. 2,12 weergegeven door de gestreepte sinusoïde.

We zien nu dat de aangelegde spanning 90° voorijlt op de stroom, ofwel, de stroom ijlt 90° na op de aangelegde spanning.

Bij de zelfinductie ontstaat dus een faseverschuiving tegengesteld aan die bij de condensator. Het vectordiagram voor stroom en spanning bij een zelfinductie is in fig. 2,13 weergegeven.

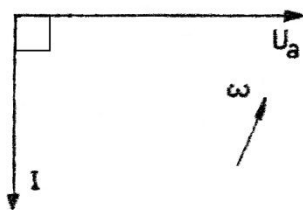


Fig. 2,13. Vectordiagram voor stroom en spanning bij een zelfinductie.

Indien we op een zelfinductie een wisselspanning aansluiten, treedt er dus een wisselstroom op. De waarde van deze wisselstroom is ook hier weer bepaald door de schijnbare weerstand of reactantie van de zelfinductie.

Deze reactantie is te berekenen uit $R_L = 2\pi fL$ of $R_L = \omega l \Omega$, waarin L uitgedrukt is in henry, f de frequentie of ω de cirkelfrequentie is van de aangesloten wisselspanning.

We zien dat de reactantie van een spoel evenredig is met de frequentie en met de zelfinductie. Naarmate de frequentie en de zelfinductie kleiner worden, wordt de reactantie ook kleiner. We zien tevens, dat de spoel voor gelijkstroom (frequentie is nul) een reactantie nul heeft. De reactantie van een spoel is dus onafhankelijk van de grootte van de stroom of de spanning. De faseverschuiving die een spoel tussen stroom en spanning veroorzaakt, is onafhankelijk van de frequentie of van de grootte van de zelfinductie, de stroom en de spanning, dus steeds 90° .

Is de momentele waarde van de aangelegde spanning gegeven, bv. $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de momentele waarde van de stroom te bepalen; deze is dan: $I = \frac{\hat{U}_a}{\omega L} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 32 t/m 39.

2.6. Wisselspanning aangesloten en op een serieschakeling van zelfinductie en weerstand.

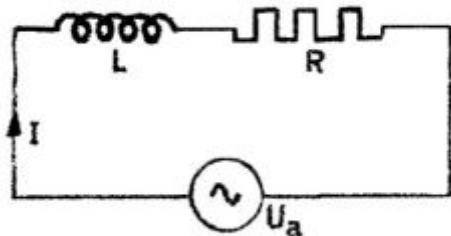


Fig. 2,14. Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling van spoel en weerstand.

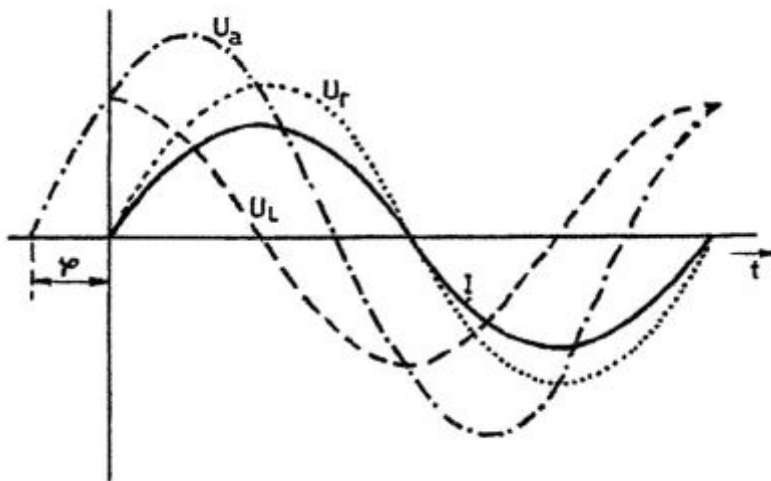


Fig. 2,15. Stroom en spanningen als functie van de tijd voor de schakeling volgens fig. 2,14.

Ten gevolge van het aansluiten van een wisselspanning op de schakeling volgens fig. 2,14 zal in de keten een wisselstroom optreden.

In fig. 2,15 is de in de keten optredende stroom door een getrokken lijn weergegeven. Deze stroom heeft over de weerstand een spanning U_R tot gevolg, die in fase is met de stroom. (Een weerstand veroorzaakt faseverschuiving van 0° .) Zie in fig. 2,15 de gestippelde kromme.

Over de zelfinductie ontstaat een spanning, die 90° voorijlt ten opzichte van de stroom en die in fig. 2,15 is weergegeven door een gestreepte kromme.

We kunnen het verloop van U_a vastleggen door op elk moment de som te nemen van de momentele waarden van U_R en U_L , indien deze spanningen dezelfde richting hebben. Als deze spanningen U_R en U_L tegengestelde richtingen hebben, vinden we de momentele waarde van U_a uit het verschil van de momentele waarden van U_R en U_L . We moeten hierbij bedenken, dat op elk moment de aangelegde spanning gelijk moet zijn aan het totaal aan spanning dat over $Len R$ staat.

In fig. 2,15 is U_a weergegeven door de streep-stiplijn. Deze spanning ijlt nu een hoek φ vóór op de stroom in de keten.

Om voor de schakeling volgens fig. 2,14 een vectordiagram te ontwikkelen, plaatsen we eerst weer de vector die de stroom voorstelt (zie fig. 2,16). De vector voor de spanning over de weerstand valt samen met de stroom, want de fase tussen deze grootheden is nul.

De spanning U_L over de spoel wordt een hoek van 90° voorijlend ten opzichte van de stroom uitgezet. De aangelegde spanning U_a is nu weer te construeren door de diagonaal te tekenen in de rechthoek die met U_R en U_L gevormd wordt. We zien hier de aangelegde spanning een hoek φ voorijlen op I . Bedenken we, dat de stippellijn, die de uiteinden van U_a en U_R verbindt, gelijk is aan U_L , dan is met behulp van de stelling van Pythagoras weer gemakkelijk in te zien, dat het volgende verband tussen de voorkomende wisselspanningen bestaat:

$$U_a^2 = U_R^2 + U_L^2.$$

R.T.

24 W.T.

Nadruk verboden

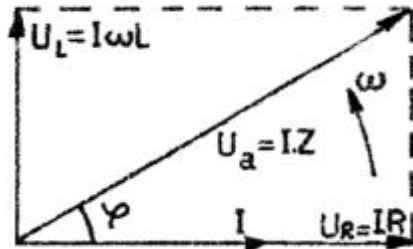


fig. 2,16. Vectordiagram voor de schakeling volgens fig. 2,14.

aanliggende rechthoekszijde in de driehoek, gevormd door U_a , U_L en U_R dus:

$$\tan \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I \times \omega L}{I \times R} = \frac{\omega L}{R}$$

De cosinus van hoek φ is bepaald door de aanliggende rechthoekszijde, te delen door de hypotenusa.

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U_a} = \frac{I \times R}{I \times Z} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

In fig. 2,16 kunnen we alle spanningsvectoren weer door I delen (zonder de verhouding tussen de vectoren te schaden). We krijgen nu het vectordiagram volgens fig. 2,17. Dit diagram houdt de vectoren in die de weerstand R , de reactantie ωL en impedantie Z voorstellen.

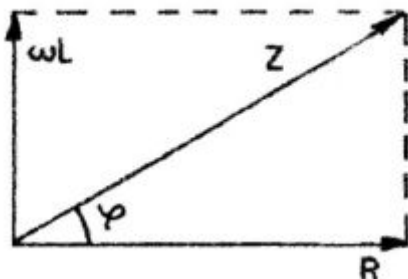


Fig. 2,17. Vectordiagram voor de impedantie van fig. 2,14.

stroom van 0,2 A. De faseverschuiving die de keten veroorzaakt, is zodanig dat $\cos \varphi = 0,8$, $L = 150 \mu H$, $R = 400 \Omega$. Bereken ω , U_R , U_L en U_a .

Oplossing: Met behulp van $\cos \varphi$ is te bepalen hoe groot ω is. Daartoe brengen we de gegeven $\cos \varphi$ in een driehoek in tekening, waarin de aanliggende zijde van hoek φ op 8 en de hypotenusa op 10 gesteld wordt (zie fig. 2,18). Met behulp van de stelling van Pythagoras is de overstaande rechthoekszijde te bepalen:

$$10^2 = x^2 + 8^2, \quad 100 - 64 = x^2, \quad x = 6.$$

$$\text{Hieruit volgt, dat } \tan \varphi = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \text{We weten: } \tan \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Dus } \omega = \frac{3R}{4L} = \frac{3 \times 400}{4 \times 150 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 40 t/m 48.

Daar $U_R = I \times R$ en $U_L = I \times \omega L$ gaat deze vorm over in:

$$U_a^2 = I^2 \times R^2 + I^2 \times \omega^2 L^2.$$

Deling door I^2 geeft:

$$\frac{U_a^2}{I^2} = R^2 + \omega^2 L^2,$$

en na worteltrekking:

$$\frac{U_a}{I} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Het quotiënt $\frac{U_a}{I}$ geeft de impedantie Z van de serieschakeling van een zelfinductie en een weerstand:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

De tangens van de hoek φ is weer bepaald door de verhouding van de overstaande en

Is de aangelegde spanning in fig. 2,14 gegeven door: $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de stroom door de keten als volgt uit te drukken:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

In deze uitdrukking stelt $\frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ de amplitude van de stroom voor en de stroom ijlt na op de aangelegde spanning.

Voorbeeld: Door een serieschakeling van een zelfinductie en een weerstand vloeit een

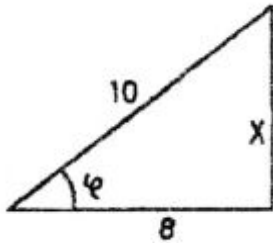


Fig. 2,18. Bepaling tan φ uit $\cos \varphi$.

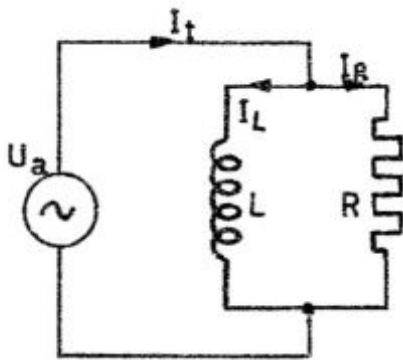


Fig. 2,19. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van L en R .

de stelling van Pythagoras uit de driehoek, gevormd door I_t , I_R en I_L te berekenen: $I_t^2 = I_R^2 + I_L^2$.

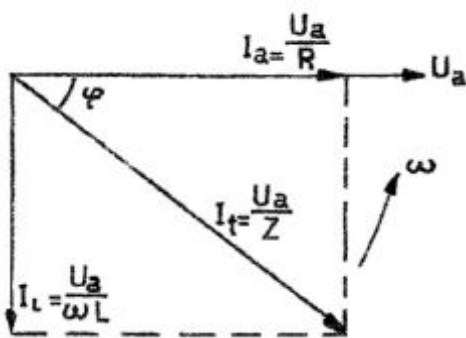


Fig. 2,20. Vectordiagram voor fig. 2,19.

De spanning over de weerstand is $U_R = I \times R = 0,2 \times 400 = 80 \text{ V}$.

De spanning over de spoel is $U_L = I \times \omega L = 0,2 \times 2 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-6} = U_L = 60 \text{ V}$.

De aangelegde spanning is dus:

$$U_a = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{6400 + 3600} = 100 \text{ V}.$$

2.7. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en weerstand.

De aan de keten toegevoerde stroom I_t splitst zich in twee delen, nl.: I_L door de spoel en I_R door de weerstand (fig. 2,19).

Op de spoel en op de weerstand is dezelfde spanning nl. U_a werkzaam.

We plaatsen de vector, die de spanning U_a voorstelt, horizontaal in fig. 2,20. De stroom door de weerstand kan nu door een vector voorgesteld worden, die samenvalt met de aangelegde spanning, daar deze stroom in fase met de spanning is.

De vector, die de stroom door de spoel aangeeft, moet een hoek van 90° maken met de aangelegde spanning. Deze stroom ijlt 90° na op de spanning U_a .

Uit de beide vectoren I_L en I_R kan nu met behulp van een rechthoek op deze beide stromen, de totaalstroom I_t afgeleid worden. I_t wordt weer voorgesteld door de diagonaal in deze rechthoek en is met

De stroom door de weerstand is $I_R = \frac{U_a}{R}$ en de stroom door de spoel is $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$. Dit gesubstitueerd in de uitdrukking voor I_t geeft:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2} + \frac{U_a^2}{\omega^2 L^2}.$$

Deling aan beide zijden van het = -teken geeft:

$$\frac{I_t^2}{U_a^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}$$

en na worteltrekking:

$$\frac{I_t}{U_a} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}.$$

Het quotiënt $\frac{I_t}{U_a}$ stelt de omgekeerde waarde voor van de impedantie; dus:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}.$$

R.T.

26 W.T.

Nadruk verboden

De beide termen onder het wortelteken een gelijknamige noemer geven, brengt:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 + R^2}{\omega^2 L^2 R^2}}.$$

De impedantie is nu:

$$Z = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 R^2}{\omega^2 L^2 + R^2}} = \frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}.$$

De tangens van hoek φ is nu volgens fig. 2,20:

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{U_a}{\omega L}}{\frac{U_a}{R}} = \frac{R}{\omega L}.$$

De cosinus van hoek φ is:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a}{Z}} = \frac{Z}{R} = \frac{\frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}{R} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Stellen we de aangelegde spanning wederom voor door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan is de totaalstroom:

$$I_t = \frac{\hat{U}_a}{\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}} \sin(\omega t - \varphi) = \hat{U}_a \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R} \sin(\omega t - \varphi).$$

In deze uitdrukking is: $\frac{\hat{U}_a}{\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}} = \hat{U}_a \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R}$ de amplitude van de totaalstroom.

In deze uitdrukking voor de amplitude van de stroom is:

$\frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ de impedantie en $\frac{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{\omega L R}$ de admittantie van de schakeling.

Voorbeeld: Voor de schakeling volgens fig. 2,19 is gegeven:

$$\omega = 2 \cdot 10^6, L = 300 \mu H, R = 300 \Omega \text{ en } I_L = 0,2 A$$

Bereken: U_a, I_R, I_t en $\tan \varphi$.

Oplossing:

Indien we de spanning over de spoel uitrekenen, hebben we tevens de aangelegde spanning:

$$U_a = I_L \times \omega L = 0,2 \times 2 \cdot 10^6 \times 300 \cdot 10^{-6} = 120 V.$$

De stroom door de weerstand is nu:

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{120}{300} = 0,4 A.$$

De totaalstroom is bepaald door:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,2^2} = \sqrt{0,16 + 0,04} = \sqrt{0,20} = 0,446 A.$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 49 t/m 53.

2.8. Serieschakeling van spoelen

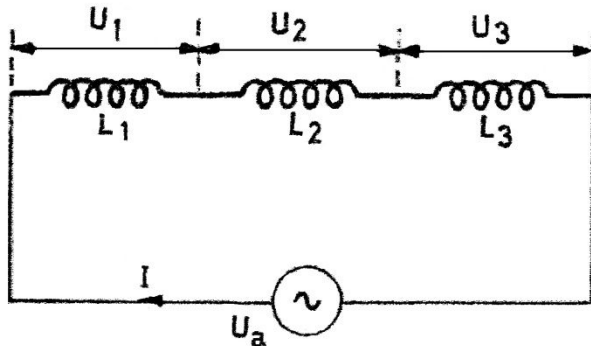


Fig. 2,21. Serieschakeling van drie spoelen

Indien we enige spoelen in serie schakelen, zal de door de keten gaande stroom spanningen over de spoelen ontwikkelen, die alle 90° voorrijlen op de stroom in de keten (fig. 2,21). Deze spanningen zijn achtereenvolgens:

$$U_1 = I\omega L_1, \quad U_2 = I\omega L_2, \quad U_3 = I\omega L_3.$$

Deze drie spanningen zijn dus onderling in fase, dus: $U_a = U_1 + U_2 + U_3$.

Noemen we de totale zelfinductie, die in de keten werkzaam is L_t , dan zal hiervoor gelden:

$$U_a = I\omega L_t.$$

Voor bovenvermeld verband tussen de

spanningen kunnen we schrijven: $I\omega L_t = I\omega L_1 + I\omega L_2 + I\omega L_3$.

Alle termen gedeeld door $I\omega$ geeft:

$$L_t = L_1 + L_2 + L_3.$$

De vervangingszelfinductie van enige in seriegeschakelde spoelen is dus gelijk aan de som van de geschakelde zelfinducties.

2.9. Parallelschakeling van spoelen

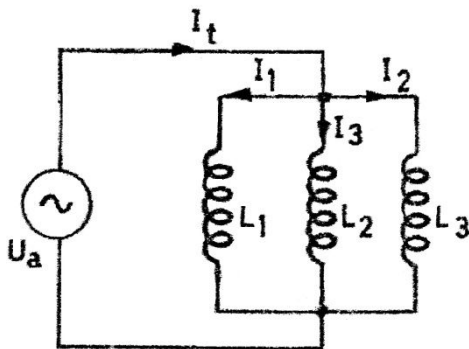


Fig. 2,22. Parallelschakeling van drie zelfinducties.

In fig. 2,22 zijn drie parallel geschakelde spoelen getekend. Over elk der spoelen is de spanning U_a werkzaam.

De stromen door de spoelen zijn:

$$I_1 = \frac{U_a}{\omega L_1}, \quad I_2 = \frac{U_a}{\omega L_2}, \quad I_3 = \frac{U_a}{\omega L_3}.$$

Deze stromen zijn alle 90° verschoven t.o.v. de spanning U_a , dus onderling zijn deze stromen in fase.

Noemen we de totaal gevormde zelfinductie van de keten L_t dan geldt:

$$I_t = \frac{U_a}{\omega L_t}.$$

Voor de stromen kunnen we schrijven:

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3. \quad \text{Dus:}$$

$$\frac{U_a}{\omega L_t} = \frac{U_a}{\omega L_1} + \frac{U_a}{\omega L_2} + \frac{U_a}{\omega L_3}.$$

Alle termen gedeeld door U_a en vermenigvuldigd met ω geeft:

$$\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}.$$

De omgekeerde waarde van de vervangingszelfinductie van enige parallel geschakelde spoelen is dus bepaald door de som van de omgekeerde waarden van de geschakelde zelfinducties.

2.10. Wisselspanning aangesloten op een condensator van weerstand, zelfinductie en condensator

a. Impedantie

in het voorgaande hebben we gezien, dat een weerstand geen faseverschuiving tussen wisselstroom en spanning ten gevolge heeft. Een condensator heeft een faseverschuiving van 90° tot

R.T.

28 W.T.

Nadruk verboden

gevolg, waarbij de spanning na-ijlt op de stroom en een zelfinductie veroorzaakt een faseverschuiving, waarbij de spanning 90° voorijlt op de stroom. Bovengenoemde drie organen zijn in fig. 2,23 in serie geschakeld aangesloten op een wisselspanning. We gaan uit van de gedachte, dat een spanningsbron

U_a een stroom I door de keten veroorzaakt.

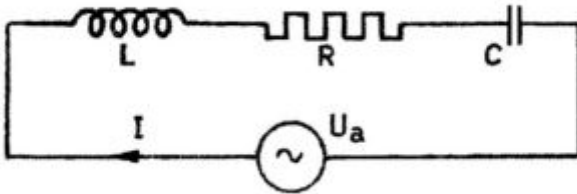


Fig. 2,23. Serieschakeling van zelfinductie weerstand en condensator.

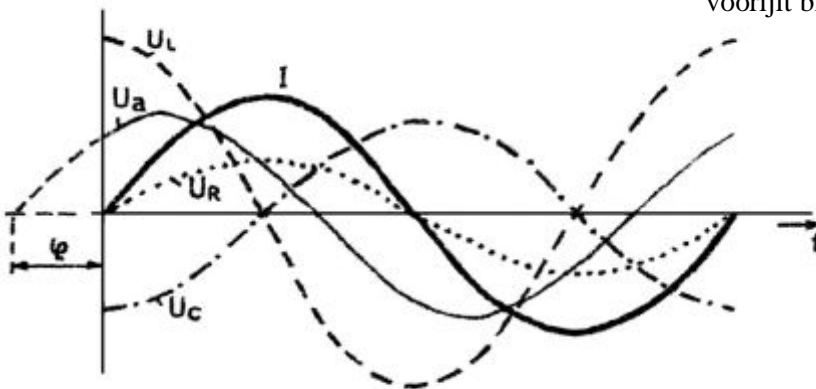


Fig. 2,24. Grafieken van stroom en spanningen in schema fig. 2,23.

In fig. 2,24 is deze stroom door een getrokken lijn weergegeven. Daardoor ontstaat een spanning U_R over de weerstand. Deze spanning is in fase met de stroom I en is in de figuur door een stippelijntje weergegeven.

Verder heeft de stroom een spanning U_L over de zelfinductie tot gevolg, welke 90° voorijlt bij de stroom (in fig. 2,24 de gestreepte lijn) en tenslotte een spanning U_C over de condensator, die 90° na-ijlt op de stroom I (zie de streepstiplijn).

Deze drie spanningen zijn de spanningen nodig om de, in den beginne aangenomen stroom, door de desbetreffende onderdelen van de schakeling te zenden.

De aangelegde spanning U_a moeten we in deze drie delen U_R , U_L en U_C verdeeld denken. We zien in fig. 2,24 nu, dat de spanningen U_L en U_C juist tegengesteld verlopen, ofwel 180° in fase verschoven zijn. De gezamenlijke waarde van deze spanningen is dus op elk moment gelijk aan het verschil van U_L en U_C .

De momentele waarde van de aangelegde spanning U_a kunnen we nu vinden door het verschil van U_L en U_C op te tellen bij de momentele waarde van de spanning U_R over de weerstand (dun getrokken lijn in fig. 2,24).

In de figuur zien we dat de aangelegde spanning een zekere hoek φ voorijlt op de stroom in de keten.

We zullen nu het gedrag van de keten volgens fig. 2,23 verder onderzoeken aan de hand van een vectordiagram.

In fig. 2,25 is de stroom in de keten door een horizontale vector I weergegeven. De spanning over de weerstand $U_R = I \times R$ kan nu door een vector, die samenvalt met I , worden weergegeven. (De fase tussen U_R en I is gelijk nul.)

De spanning over de spoel U_L is door een vector voorgesteld die 90° voorijlt ten opzichte van I en de spanning over de condensator door een vector U_C die 90° na-ijlt op I . Door nu U_L te verminderen met U_C vinden we de vector die $U_L - U_C$ voorstelt. Deze vector, door middel van een rechthoek

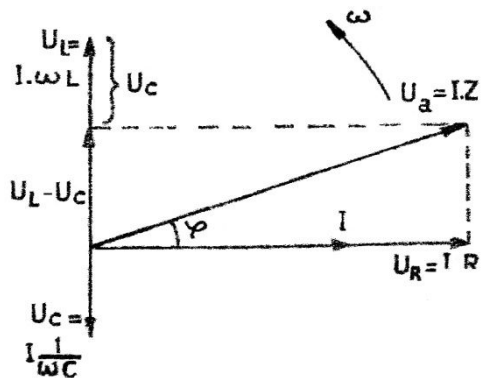


Fig. 2,25. Vectordiagram betreffende fig. 2,23.

met inductief gedrag.

Beide zijden van het = -teken delen door I^2 geeft:

$$Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ en na worteltrekking:}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Deze uitdrukking geeft dus de impedantie weer van de serieschakeling van zelfinductie, weerstand en condensator. We kunnen uit deze uitdrukking ook duidelijk constateren dat de invloed van de zelfinductie in de keten tegengewerkt wordt door de condensator. De impedantie van een keten met serieschakeling van spoel, condensator en weerstand, is dus kleiner dan de impedantie van een keten die alléén bestaat uit de serieschakeling van spoel en weerstand, indien de condensatorreactantie kleiner is dan $2 \times$ de reactantie van de spoel. Ook zouden we kunnen zeggen: de impedantie van een serieschakeling van een spoel, condensator en weerstand, is dus kleiner dan de impedantie van een serieschakeling van condensator en weerstand, indien de reactantie van de spoel kleiner is dan $2 \times$ de reactantie van de condensator. De faseverschuiving, die ontstaat tussen de aangelegde spanning en de stroom in de keten, is weer bepaald door de tangens van hoek φ in de rechthoekige driehoek gevormd door U_R , $U_L - U_C$ en U_a .

$$\tan \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I\omega L - I\frac{1}{\omega C}}{IR} = \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

De hoek van faseverschuiving kan ook bepaald worden door de cosinus van hoek φ .

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{U_a} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Bij voorgaande beschouwingen hebben we verondersteld, dat de spanning over de spoel groter is dan de spanning over de condensator. De spanning over de zelfinductie overheerst dus op de spanning over de condensator. In het vectordiagram volgens fig. 2,25 blijkt ook de vector $U_L - U_C$ 90° voor te

samengesteld met U_R , stelt ons in staat de diagonaal te tekenen welke de aangelegde spanning U_a voorstelt. De spanning U_a ijlt volgens de figuur een hoek φ voor op I .

Uit de rechthoekige driehoek gevormd door de vectoren $U_L - U_C$ en U_R met de vector U_a volgt met behulp van de stelling van Pythagoras:

$$U_a^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2.$$

Daar $U_a = IZ$, $U_R = IR$, $U_L = I\omega L$ en $U_C = I\frac{1}{\omega C}$, wordt de verkregen uitdrukking voor de spanning:

$$I^2 Z^2 = I^2 R^2 + \left(I\omega L - I\frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ of}$$

$$I^2 Z^2 = I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ en}$$

$$I^2 Z^2 = I^2 \left\{ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right\}.$$

R.T.

30 W.T.

Nadruk verboden

ijlen op I en derhalve ijlt ook U_a voor op I en wel met een hoek φ . De zelfinductie heeft dus een grotere invloed in de keten dan de condensator. De keten gedraagt zich inductief. Omgekeerd kunnen we dus ook zeggen: in een keten waarin de zelfinductie overheerst, ijlt de aangelegde spanning vóór op de stroom.

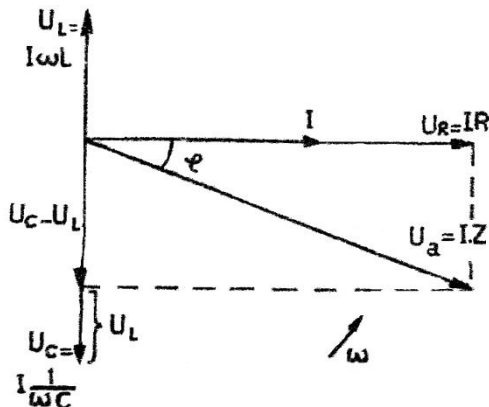


Fig. 2,26. Vectordiagram betreffende fig. 2,23 met capaciteitsgedrag.

De hoek van faseverschuiving wordt eveneens door dezelfde uitdrukking voor $\tan \varphi$ en $\cos \varphi$ bepaald. Alleen geeft de uitdrukking voor $\tan \varphi$ nu een negatieve waarde, waardoor wordt aangegeven dat de spanning nu na-ijlt op de stroom.

Is de momentele waarde van de aangelegde spanning gegeven door $U_a = \hat{U}_a \sin \omega t$, dan zijn de momentele waarden van de overige spanningen aan te duiden door:

$$\begin{aligned} U_R &= \hat{I}R \sin \omega t, \\ U_L &= \hat{I}\omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ en} \\ U_C &= \hat{I} \frac{1}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

De uitdrukking voor de stroom is nu:

$$I = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

In deze laatste uitdrukking kan φ zowel positief als negatief zijn; afhankelijk van het feit of de keten zich inductief of capaciteitsgedraagt.

Gaan we uit van de gedachte dat de spanning over de condensator groter is dan de spanning over de zelfinductie, dan verkrijgen we het vectordiagram volgens fig. 2,26.

Het verschil tussen de spanning over de zelfinductie en die over de condensator levert nu een vector op welke 90° na-ijlt op de stroom. De condensator overheerst in de keten. De keten gedraagt zich nu capaciteits.

In een keten waarin de capaciteit overheerst, ijlt de aangelegde spanning na op de stroom in de keten.

Voor de impedantie van de keten vinden we dezelfde vorm als in het voorgaande. De lezer ga dit zelf na.

2.10. Wisselspanning aangesloten op een serieschakeling (vervolg)b. Faseresonantie

In het voorgaande is reeds waargenomen dat in de serieschakeling volgens fig. 2,23 de invloed van de condensator de invloed van de zelfinductie tegenwerkt of omgekeerd.

We willen nu het geval eens onder ogen nemen dat de invloed van de zelfinductie juist even groot is als die der condensator. In dit geval moet dus U_L gelijk aan U_C zijn, of $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.

Daar nu $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, wordt dus de impedantie van de keten gelijk aan R , hetgeen wil zeggen dat de keten geen faseverschuiving tussen stroom en aangelegde spanning veroorzaakt en dat de impedantie de kleinst mogelijke waarde heeft aangenomen. Uit dit laatste volgt eveneens dat de stroom, die nu te berekenen is uit $I = \frac{U_a}{R}$, haar maximumwaarde heeft verkregen.

Het geval waarbij in een dergelijke keten de stroom in fase met de aangelegde spanning is, wordt faseresonantie of korter resonantie genoemd.

Om dus faseresonantie voor de keten volgens fig. 2,23 te verkrijgen, is het nodig dat $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Gaan we uit van de van de gedachte dat de keten bestaat uit een bepaalde zelfinductie en capaciteit, dan is faseresonantie te verkrijgen door de frequentie van de aangelegde spanning een zodanige waarde te geven dat $\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$. Door de beide zijden van het = -teken te delen door L en te vermenigvuldigen met ω_r verkrijgen we:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} \text{ en na worteltrekking: } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Daar $\omega_r = 2\pi f_r$ krijgen we na deling door 2π :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

De formule geeft ons dus de frequentie waarbij faseresonantie optreedt. Deze formule duidt men wel aan met de naam: formule van Thomson en de frequentie met de naam: faseresonantiefrequentie.

We kunnen ons ook het geval voorstellen dat de aangelegde spanning een bepaalde frequentie heeft en de keten een bepaalde zelfinductie en een veranderlijke condensator bezit. Door de condensator nu zo te veranderen dat weer voldaan wordt aan $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, kunnen we ook voor resonantie zorgdragen.

De hiervoor benodigde capaciteit van de condensator is nu te berekenen uit:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Vermenigvuldigen aan beide zijden van het = - teken geeft:

$$\frac{1}{C} = \omega^2 L.$$

Omkering van beide leden van deze gelijkheid geeft:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Met deze waarde van C hebben we de keten dus in resonantie gebracht bij de frequentie ω .

Is echter de zelfinductie in de keten veranderlijk en hebben de capaciteit van de condensator en de frequentie van de aangelegde spanning een bepaalde waarde, dan kunnen we door de zelfinductie te wijzigen de keten ook in resonantie brengen.

R.T.

32 W.T.

Nadruk verboden

Ook nu moet weer voldaan worden aan $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Door beide leden te delen door ω , vinden we $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, hetgeen de benodigde zelfinductie geeft om met de gegeven capaciteit en frequentie resonantie tot stand te brengen.

Voorbeeld: Een serieschakeling bestaat uit een zelfinductie van $1000 \mu H$, een capaciteit van $2500 pF$ en een weerstand van 800Ω .

Bereken de impedantie van deze keten voor een cirkelfrequentie $\omega_1 = 10^6$ en voor een cirkelfrequentie $\omega_2 = 5 \cdot 10^5$. bereken in beide gevallen ook de tangens van de hoek van faseverschuiving.

Eveneens wordt gevraagd te berekenen de frequentie waarbij de keten resonantie vertoont.

Oplossing: De impedantie van de keten voor de frequentie ω_1 is te berekenen uit:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}. \quad \text{De gegeven getalwaarden hierin gesubstitueerd geeft:}$$
$$Z_1 = \sqrt{(800)^2 + \left(10^6 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-10}}\right)^2}.$$
$$Z_1 = \sqrt{64 \cdot 10^4 + (10^3 - 400)^2} = \sqrt{64 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^4}. \quad Z_1 = \sqrt{10^6} = 1000 \Omega.$$

De impedantie wordt voor ω_2 :

$$Z_2 = \sqrt{64 \cdot 10^4 + \left(5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{5 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-10}}\right)^2}.$$
$$Z_2 = \sqrt{64 \cdot 10^4 + (500 - 800)^2} = \sqrt{64 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4}. \quad Z_2 = \sqrt{73 \cdot 10^4} = 858 \Omega.$$

Voor de frequentie ω_1 is $\tan \varphi = \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} = \frac{10^3 - 400}{800} = \frac{3}{4}$.

Voor de frequentie ω_2 is $\tan \varphi = \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R} = \frac{500 - 800}{600} = \frac{1}{2}$.

De resonantiefrequentie is te berekenen uit:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{of beide leden gekwadraterd:}$$
$$f_r^2 = \frac{1}{40LC} = \frac{1}{40 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-10}} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10} \quad f_r = 10^5 \text{ Hz.}$$

Voorbeeld: Een serieschakeling van een weerstand R van 100Ω , een zelfinductie L van $500 \mu H$ en een condensator C_1 van $500 pF$ moet in resonantie worden gebracht voor een frequentie $f = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$. Hiertoe schakelt men nog een condensator C_2 in serie met C_1 . Hoe groot moet C_2 zijn?

Oplossing: De benodigde totale capaciteit die de kring moet bezitten om voor $f = 5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ in resonantie te zijn is te berekenen uit $C_t = \frac{1}{\omega^2 L}$ of $C_t = \frac{1}{(2\pi f)^2 L} = \frac{1}{40 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{5 \cdot 10^9} F = 200 pF$.

De beide in serie geschakelde condensatoren leveren een capaciteit die bepaald is door:

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$
$$\frac{1}{200} = \frac{1}{500} + \frac{1}{C_2}.$$
$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{200} - \frac{1}{500} = \frac{5-2}{1000} = \frac{3}{1000}.$$
$$C_2 = \frac{1000}{3} = 333 \frac{1}{3} pF.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 60 t/m 64.

c. Kwaliteitsfactor of opslingerfactor

In het voorgaande hebben we reeds vermeld, dat de impedantie van de keten minimaal wordt indien de keten in resonantie is. De impedantie is dan gelijk aan de weerstand, die in de keten is opgenomen.

Is op de keten een spanning U_a werkzaam met een frequentie gelijk aan de resonantiefrequentie dan zal ten gevolge van de minimum impedantie een maximum stroom optreden welke is $I_r = \frac{U_a}{R}$.

Deze stroom ontwikkelt een spanning over de condensator en een spanning over de zelfinductie welke elkaar opheffen. Over de spoel en de condensator tezamen valt dus geen spanning. Over de weerstand valt dus een spanning die gelijk is aan de aangelegde spanning U_a . Ongeacht de grootte van de reactantie van spoel en condensator, met als voorwaarde dat ze gelijk zijn, valt over deze onderdelen samen geen spanning. Over de condensator alleen is echter wel een spanning aanwezig evenals over de zelfinductie.

De spanning over de zelfinductie is in resonantie bepaald door:

$$U_L = I_r \times \omega_r L = \frac{U_a}{R} \omega_r L = U_a \frac{\omega_r L}{R} \quad \text{of} \quad \frac{U_L}{U_a} = \frac{\omega_r L}{R}.$$

De verhouding $\frac{U_L}{U_a}$ noemt men de opslingerfactor of kwaliteitsfactor Q van de keten, dus:

$Q = \frac{\omega_r L}{R}$. De opslingerfactor kunnen we ook uitdrukken in de capaciteit van de condensator.

$$U_C = I_r \frac{1}{\omega_r C} = \frac{U_a}{R} \frac{1}{\omega_r C} = U_a \frac{1}{\omega_r C R} \quad \text{of} \quad \frac{U_C}{U_a} = \frac{1}{\omega_r C R}.$$

Daar de spanningen U_L en U_C gelijk zijn, kunnen we dus ook schrijven:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}.$$

Is de resonantiefrequentie niet bekend, dan kunnen we de kwaliteitsfactor ook berekenen uit de grootheden van de keten.

Hier toe vullen we in $Q = \frac{\omega_r L}{R}$ voor $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ in. We verkrijgen dan:

$$Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Voorbeeld: Op een serieschakeling van zelfinductie $L = 450 \mu H$, capaciteit $C = 1250 pF$ en een weerstand $R = 10 \Omega$ wordt een wisselspanning van 2 volt met een cirkelfrequentie $\omega = 10^6$ aangesloten,

Bereken de spanning over de weerstand, capaciteit en zelfinductie.

Bereken de resonantiefrequentie en bepaal wederom de spanning over de weerstand, condensator en zelfinductie. Hoe groot is de opslingerfactor?

Oplossing: De impedantie van de schakeling is:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{100 + \left(10^6 \cdot 450 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 1250 \cdot 10^{-12}}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{100 + (450 - 800)^2} = \sqrt{100 + 350^2} = \sqrt{122600} = 350 \Omega.$$

De stroom in de keten is $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{2}{350} = \frac{1}{175} A$.

De spanning over de weerstand is $U_R = I \times R = \frac{1}{175} \times 10 \quad U_R = \frac{10}{175} = \frac{2}{35}$ volt.

De spanning over de capaciteit is $U_C = I \times \frac{1}{\omega C}$.

$$U_C = \frac{1}{175} \times \frac{1}{10^6 \cdot 1250 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{175} \times 800 = \frac{32}{7} = 4 \frac{4}{7} \text{ volt.}$$

De spanning over de zelfinductie is $U_L = I \times \omega L$.

$$U_L = \frac{1}{175} \times 10^6 \cdot 450 \cdot 10^{-6} = \frac{450}{175} = \frac{18}{7} = 2 \frac{4}{7} \text{ volt.}$$

R.T.

34 W.T.

Nadruk verboden

De resonantiefrequentie is $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{450 \cdot 10^{-6} \cdot 1250 \cdot 10^{-12}}}$.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{10^{18}}{450 \cdot 1250}} = \sqrt{\frac{10^{18}}{562500}} = \frac{10^9}{750} = \frac{4 \cdot 10^6}{3}.$$

De stroom bij de resonantiefrequentie is $I_r = \frac{U_a}{R} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ A}$.

De spanning over de weerstand is nu $U_R = U_a = 2 \text{ volt}$. De spanning over de zelfinductie en dus tevens de spanning over de condensator is

$$U_L = U_C = I_r \times \omega_r L. \quad U_L = U_C = \frac{1}{5} \times \frac{4 \cdot 10^6}{3} \cdot 450 \cdot 10^6 = 120 \text{ volt}.$$

De opslingerfactor is dus: $Q = \frac{U_L}{U_a} = \frac{120}{2} = 60$.

Dit laatste antwoord hadden we natuurlijk ook kunnen vinden door deze direct uit de vorm $Q = \frac{\omega_r L}{R}$ te berekenen.

d. Het gedrag van de keten bij verschillende frequenties

Is op de serieschakeling van $L_1 C$ en R een spanning met de resonantiefrequentie werkzaam, dan gedraagt de keten zich alsof deze alléén bestaat uit een weerstand. immers de zelfinductie en capaciteit heffen elkaar op. Is op de keten een frequentie werkzaam die niet gelijk is aan de resonantiefrequentie, dan wordt de invloed van de capaciteit niet opgeheven door de zelfinductie.

Welke van de beide reactanties overheerst, wordt nu bepaald door het feit of de frequentie hoger of lager is dan de resonantiefrequentie. Gaan we weer uit van het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is, dan is $\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0$. Voor een frequentie hoger dan de resonantiefrequentie wordt ωL groter dan $\omega_r L$ en $\frac{1}{\omega_r C}$ kleiner dan $\frac{1}{\omega C}$. De zelfinductie heeft nu een grotere reactantie van de capaciteit en zal nu overheersen in de keten.

In de keten kunnen we nu dus werkzaam denken een reactantie van een zelfinductie L_v die bepaald is door $\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega L_v$.

Door beide leden te delen door ω vinden we de zelfinductie die nu in serie met de weerstand werkzaam gedacht kan worden. Dus:

$L_v = L - \frac{1}{\omega^2 C}$. De keten gedraagt zich nu inductief en zal de stroom na-ijlen op de aangelegde spanning. Voor de impedantie van de keten kunnen we dus een frequentie, hoger dan de resonantiefrequentie, schrijven $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_v^2}$.

Is de werkzame frequentie lager dan de resonantiefrequentie, dan zal de reactantie van de zelfinductie kleiner zijn dan in het resonantiegeval, terwijl de reactantie van de condensator groter zal zijn dan in geval van resonantie. De capaciteit heeft nu een grotere reactantie dan de zelfinductie en zal dus overheersen in de keten.

We kunnen dus werkzaam denken een reactantie van een capaciteit C_v die bepaald is door:

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{1}{\omega C_v}.$$

Beide leden vermenigvuldigen met ω geeft:

$$\frac{1}{C} - \omega^2 L = \frac{1}{C_v}.$$

De termen voor het = -teken van gelijke noemer voorzien geeft:

$$\frac{1 - \omega^2 LC}{C} = \frac{1}{C_v}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 65 t/m 67.



Na omkering van beide leden van deze gelijkheid verkrijgen we de waarde van de capaciteit, die nu in serie werkzaam gedacht kan worden met de weerstand

$$C_v = \frac{C}{1 - \omega^2 LC}$$

De keten gedraagt zich capacitief; de stroom zal voorijlen op de aangelegde spanning. Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie kunnen we dus voor de impedantie schrijven:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_v^2}}$$

Voorbeeld: Een weerstand van 100Ω , een condensator van 1000 pF en een zelfinductie van $800 \mu\text{H}$ zijn in serie geschakeld. Bereken de vervangingscapaciteit of zelfinductie van deze keten voor frequenties $\omega_1 = 10^6$ en $\omega_2 = 2 \cdot 10^6$.

Oplossing: We berekenen allereerst de resonantiefrequentie van de keten.

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9}}}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 10^{-14}}} \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{-7}} \approx 1,1 \cdot 10^6$$

De frequentie ω_1 is dus lager dan de resonantiefrequentie; de keten gedraagt zich capacitief. De vervangingscapaciteit is te berekenen uit:

$$C_v = \frac{C}{1 - \omega_1 LC} = \frac{10^{-9}}{1 - 10^{12} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9}} = \frac{10^{-9}}{1 - 0,8} = \frac{10^{-9}}{0,2} = 5000 \text{ pF}$$

We zien, dat deze vervangingscapaciteit groter is dan de geschakelde. Dit zal duidelijk zijn, als men bedenkt, dat de reactantie van de vervangingscondensator kleiner is dan de reactantie van de geschakelde condensator, dus de capaciteit moet groter zijn.

Voor de frequentie ω_2 gedraagt de keten zich inductief, want deze is hoger dan de resonantiefrequentie.

$$L_v = L - \frac{1}{\omega^2 C} = 8 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-9}}$$

$$L_v = 8 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{4 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-5} = 550 \mu\text{H}$$

e. resonantiekromme

uit het feit, dat de stroom in het resonantiegeval maximaal is, volgt dat voor alle frequenties die niet gelijk zijn aan de resonantiefrequentie de stroom kleiner zal zijn. Dit is ook te concluderen uit de uitdrukkingen die we gevonden hebben voor de impedantie in 2,10d.

Voor steeds lagere waarden van de frequentie gaat de capaciteit meer en meer overheersen.

De waarde van de reactantie der vervangingscondensator wordt steeds groter, dus de impedantie steeds groter en de stroom steeds kleiner. Naarmate de frequentie meer af gaat wijken van de resonantiefrequentie wordt de stroom dus kleiner. Voor frequenties hoger dan de resonantiefrequentie zal de zelfinductie meer en meer gaan overheersen en dus de reactantie hiervan steeds groter worden.

De impedantie (zie 2,10d) zal dus ook groter worden naarmate de frequentie hoger wordt en de stroom dus kleiner.

Het gedrag van de keten als functie van de frequentie kunnen we het beste overzien als we een grafiek maken waarin de stroom als functie van de frequentie bij constante aangelegde spanning wordt uitgezet. Een dergelijke figuur wordt resonantiekromme genoemd.

In fig. 2,27 zijn enige resonantiekrommen voor een drietal schakelingen van L , C en R getekend. Om het mogelijk te maken op gemakkelijke wijze de eigenschappen van enige ketens, bestaande uit een serieschakeling van L , C en R , te vergelijken, tekenen we op de verticale as niet werkelijke stroom-

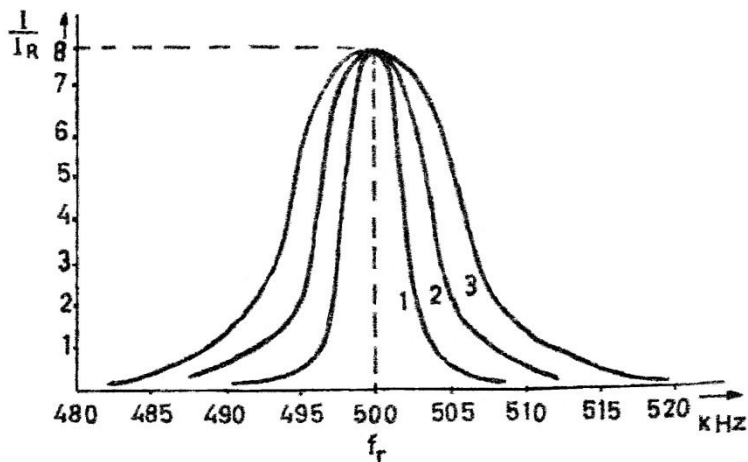


Fig. 2,27. Resonantiekrommen van drie ketens, bestaande uit serieschakeling van L , C en R bij gelijke R .

We nemen aan dat de stroom bij de resonantiefrequentie door 8 eenheden wordt weergegeven.

Verder bepalen we de stroom I bij andere frequenties en de verhouding $\frac{I}{I_r}$ tussen deze stroom en de stroom bij resonantie. De punten van de resonantiekromme bij een andere dan de resonantiefrequentie, vinden we nu, door de gevonden verhouding te vermenigvuldigen met de gekozen maat (8 eenheden) voor de stroom I_r .

We hebben in 2,10d gezien, dat de impedantie op te vatten is als bestaande uit een weerstand en een reactantie. De weerstandswaarde is onafhankelijk van de frequentie, de reactantie daarentegen sterk van de frequentie afhankelijk. Naarmate de weerstand kleiner is, zal de impedantie meer veranderen bij een frequentiewijziging. Bij frequentie toe- of afname, uitgaande van de resonantiefrequentie, zal de impedantie sneller toe- en de stroom dus sneller afnemen, naarmate de weerstand kleiner is. Bij kleine weerstand zal de resonantiekromme dus spitsiger moeten verlopen dan bij grote weerstand. Want in dit laatste geval is het van de frequentie onafhankelijke deel van de impedantie groter.

In fig. 2,27 zijn drie resonantiekrommen getekend, genummerd 1, 2 en 3, waarvan de keten, behorende bij kromme 1 de kleinste en de keten behorende bij kromme 3 de grootste weerstand bevat.

Zoals blijkt uit de figuur waren alle drie ketens op dezelfde resonantiefrequentie (500 kHz) afgestemd.

De stroomwaarden die bij de resonantiefrequentie optreden, zijn in alle drie gevallen verschillend, echter steeds door 8 eenheden voorgesteld.

Deze 8 eenheden stellen in kromme 1 bv. een stroom van 80 mA, in kromme 2, 50 mA en in kromme 3, 30 mA voor.

We zien dat kromme 1 het sterkst reageert op een frequentieverandering. Of op kring 1 een spanning werkzaam is met de resonantiefrequentie, of een even grote spanning met een iets afwijkende frequentie, doet dus een groot verschil in stroomwaarde ontstaan. Bij 2 en 3 is dat verschil kleiner.

waarde op, maar de verhouding tussen de optredende stroom bij willekeurige frequentie en stroom bij de resonantiefrequentie. De stroom I_r , die bij de gekozen waarde van de aangelegde spanning optreedt bij de resonantiefrequentie wordt allereerst bepaald. Voor deze stroomwaarde, die we dus uitgedrukt vinden in ampère of mA, kiezen we een bepaalde schaal. Dus bv. 10 mA wordt in de tekening weergegeven door 1 cm.



Het is niet alleen de grootte van de weerstand die invloed uitoefent op de vorm van de resonantiekromme. De grootte van de zelfinductie L en de capaciteit C hebben daar ook invloed op.

We gaan nu enkele serieschakelingen van L , C en R onderzoeken, die alle dezelfde conductieve weerstand hebben, echter verschillende waarden van L en C . We kiezen de waarden van L en C zodanig, dat alle kringen op dezelfde resonantiefrequentie zijn afgestemd dus \sqrt{LC} is voor alle kringen gelijk.

Beschouwen we eerst een keten die een grote zelfinductie L en kleine capaciteit C bezit. We moeten bedenken dat voor frequenties groter dan de resonantiefrequentie de vervangingszelfinductie groter is naarmate L groter is, nl. $L_v = L - \frac{1}{\omega^2 LC}$, dus is het van de frequentie afhankelijke gedeelte van de vervangingsimpedantie $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_v^2}$ ook groter. De keten zal dus sterker op de frequentieverandering reageren dan in het geval dat de zelfinductie een kleinere waarde heeft. De flank van de resonantiekromme zal dus steiler verlopen. De kleine waarde van de capaciteit C zal ten gevolge hebben dat de vervangingscapaciteit voor frequenties kleiner dan de resonantiefrequentie ook een kleine waarde zal hebben ($C_v = \frac{C}{1 - \omega^2 LC}$). Bij een kleine waarde van C_v is echter de reactantie van de vervangingscapaciteit groter dan bij een grote waarde van C_v . De vervangingsimpedantie voor frequenties kleiner dan de resonantiefrequentie bezit nu weer een groot van de frequentie afhankelijk gedeelte en zal dus sterker reageren op een frequentieverandering dan indien C_v groot en dus $\frac{1}{\omega C_v}$ klein is. De resonantiekromme zal dus bij kleine C voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie steiler verlopen, naarmate de capaciteit kleiner is. We zien hier dus uit dat de resonantiekromme een meer spits verloop zal hebben, naarmate L groter en C kleiner zijn gekozen. De verhouding $\frac{L}{C}$ is dus een belangrijk gegeven ten aanzien van het verloop van de resonantiekromme of ten aanzien van het gedrag van de keten. Om dus een serieketen van L , C en R te vormen, die een scherpe resonantiekromme heeft, is het nodig R klein en $\frac{L}{C}$ groot te kiezen.

Bezien we nu nog even de kwaliteitsfactor of opslingerfactor $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, dan concluderen we dus dat een grote Q -factor samen gaat met een scherpe resonantiekromme.

In fig. 2,28 zijn drie resonantiekrommen getekend voor kringen met dezelfde weerstand, gelijke resonantiefrequentie en met verschillende waarden van L en C . Voor kromme 1 is $\frac{L}{C}$ het grootste en voor kromme 3 het kleinste.

Voorbeeld: Bereken de stroomverandering die ontstaat te gevolge van een frequentieverandering van f_r tot $f_r = 5 \text{ kHz}$.

a. In een keten bestaande uit: $R = 10 \Omega$, $C = 400 \text{ pF}$ en $L = 1000 \mu\text{H}$.

b. In een keten bestaande uit: $R = 10 \Omega$, $C = 1000 \text{ pF}$ en $L = 400 \mu\text{H}$.

De aangesloten wisselspanning is 10 volt.

Oplossing: We bepalen eerst de resonantiefrequentie.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{of} \quad f_r^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-10}}$$

$$f_r^2 = \frac{1}{16 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^{12}}{16} \quad f_r = \frac{10^6}{4} = 25 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Daar de producten LC in beide gevallen gelijk zijn, zijn dus de resonantiefrequenties voor beide ketens gelijk.

R.T.

38 W.T.

Nadruk verboden

De stroom welke in beide gevallen voor de resonantiefrequentie optreedt, is:

$$I_r = \frac{U_a}{R} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A. De impedantie is bepaald door:}$$

a. $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. De werkzame frequentie is nu $255 \cdot 10^3 \text{ Hz}$.

$$Z = \sqrt{100 + \left(2\pi \cdot 255 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}\right)^2}$$

$$Z = \sqrt{100 + \left(510\pi - \frac{10^7}{2040\pi}\right)^2} = \sqrt{100 + \left(510\pi - \frac{10^5\pi}{204}\right)^2} =$$

$$Z = \sqrt{100 + (510\pi - 490\pi)^2} = \sqrt{100 + (20\pi)^2} = \sqrt{100 + 4000}$$

$$Z = \sqrt{4100} = 64 \Omega.$$

De stroom is nu $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{10}{64} = 0,156 \text{ A}$.

De verandering van de stroom is $1 - 0,156 = 0,844 \text{ A}$.

b. $Z = \sqrt{100 + \left(2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{2\pi \cdot 255 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{100 + \left(204\pi - \frac{10^5}{51\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{100 + (204\pi - 196\pi)^2} = \sqrt{100 + (8\pi)^2} = \sqrt{100 + 640}$$

$$Z = \sqrt{740} = 27,2 \Omega.$$

De stroom is nu $I = \frac{U_a}{Z} = \frac{10}{27,2} = 0,367 \text{ A}$.

De verandering van de stroom is $1 - 0,367 = 0,633 \text{ A}$.

We zien hier ook uit dat de tweede keten minder sterk op de frequentieverandering reageert dan de eerste keten, hetgeen we te danken hebben aan de grotere waarde van $\frac{L}{C}$ voor de eerste kring.

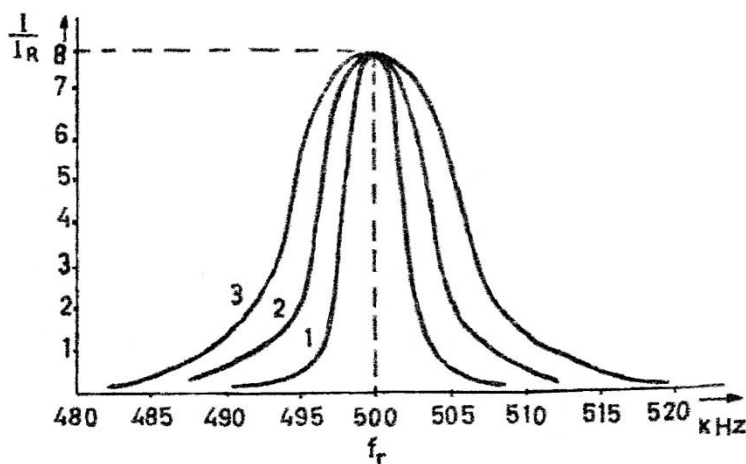


Fig. 2,28. Drie resonantiekrommen van serieschakeling L , C en R bij gelijke waarden van R en f_r en verschillende waarden van L en C .

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 68 t/m 73.

2.11. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie en condensator

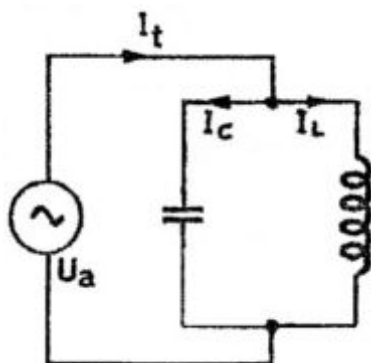


Fig.2,29. Parallelschakeling van zelfinductie en condensator.

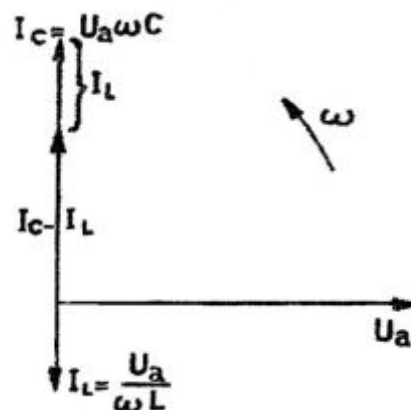


Fig. 2,30. Vectordiagram betreffende de de schakeling volgens fig. 2,29.

De schakeling die we nu zullen behandelen is in fig. 2,29 weergegeven. De aangelegde spanning U_a veroorzaakt een stroom door de zelfinductie die bepaald is door $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$ en door de condensator een stroom $I_C = \frac{U_a}{\frac{1}{\omega C}} = U_a \omega C$.

De stroom I_L ijlt 90° na en de stroom I_C 90° vóór op de aangelegde spanning. In het vectordiagram volgens fig. 2,30 zijn U_a , I_C en I_L door vectoren weergegeven. We zien hier weer duidelijk dat de stromen I_C en I_L in tegenfase, of 180° in fase verschoven, verlopen.

De stroom, die de krachtbron U_a moet leveren is nu bepaald door het verschil van I_C en I_L . Dus $I_t = I_C - I_L$ en zien we dat de totaalstroom I_t 90° voorijlt op de aangelegde spanning U_a . De schakeling gedraagt zich als een zuivere condensator. De reactantie van deze condensator is te berekenen uit:

$$I_t = I_C - I_L = U_a \omega C_v = U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L}.$$

Alle termen delen door U_a geeft:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}.$$

Na omkering van beide leden vinden we:

$$\frac{1}{\omega C_v} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}.$$

Dit is dus tevens de totale impedantie die deze keten oplevert.

In bovenstaand geval hebben we verondersteld dat de stroom I_C groter was dan de stroom I_L . We gaan nu uit van de veronderstelling dat de stroom I_C kleiner is dan I_L . Het zal duidelijk zijn dat de vector I_t die bepaald is door $I_L - I_C$ 90° na-ijlt op de spanning U_a . De keten gedraagt zich nu inductief en de reactantie van de vervangingszelfinductie L_v is nu te berekenen uit:

$$I_t = I_L - I_C \quad \text{of} \quad \frac{U_a}{\omega L_v} = \frac{U_a}{\omega L} - U_a \omega C.$$

Deling door U_a geeft:

$$\frac{1}{\omega L_v} = \frac{1}{\omega L} - \omega C \quad \text{of} \quad \frac{1}{\omega L_v} = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L}.$$

Dus: $\omega L_v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$

R.T.

40 W.T.

Nadruk verboden

Dit is ook weer de totale impedantie die door deze keten wordt gevormd,

Tenslotte kunnen we ons het geval voorstellen dat de stroom I_L gelijk is aan I_C .

Uit het vectordiagram blijkt dat de totaalstroom $I_t = 0$. Dit wil zeggen: hoewel de krachtbron U_a een spanning beschikbaar stelt, heeft deze geen stroom tot gevolg. De impedantie moet in dit geval oneindig groot zijn, immers $Z = \frac{U_a}{0} = \infty$.

De stromen I_L en I_C kunnen alleen gelijk zijn indien $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Hieraan wordt voldaan bij de frequentie $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de resonantiefrequentie van deze schakeling. We moeten hierbij bedenken dat een oneindig grote impedantie geen faseverschuiving ten gevolge kan hebben. Voor de resonantiefrequentie levert deze keten dus een maximum-impedantie; dit in tegenstelling met de serieschakeling van L , C en R .

Hierboven zijn we tot de conclusie gekomen, dat in het geval dat de aangelegde spanning een frequentie bezit gelijk aan de resonantiefrequentie van de keten, I_t gelijk aan nul is. door de zelfinductie en capaciteit treden echter wel stromen op; deze beide stromen zijn dan gelijk. Deze toestand doet zich voor enige tijd nadat de spanning U_a wordt ingeschakeld en zal zich gedurende het verdere verloop van de tijd ook handhaven. Direct na het inschakelen van U_a treden echter andere verschijnselen op, waarop we later nader zullen ingaan. Deze verschijnselen worden algemeen aangeduid met inschakelverschijnselen.

Voor frequenties groter dan de resonantiefrequentie is de reactantie van de condensator kleiner dan die van de zelfinductie. De stroom I_C zal dus groter zijn dan I_L . De keten gedraagt zich zoals we in het voorgaande hebben gezien capacitief. De vervangingscapaciteit is te vinden door de hierboven vermelde uitdrukking:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} \text{ te delen door } \omega, \text{ dus: } C_v = C - \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie zal de stroom door de spoel groter zijn dan de stroom door de condensator. De keten gedraagt zich inductief. De waarde van de vervangingszelfinductie is nu te bepalen uit:

$$\omega L_v = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}. \text{ Deling door } \omega \text{ geeft: } L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC},$$

Voorbeeld: Op een parallelschakeling van een zelfinductie van $400 \mu H$ en een condensator van $500 pF$ wordt een spanning U_a aan gesloten van $10 V$ met een frequentie $\omega = 2 \cdot 10^6$. Bereken de stroom I_L , I_C en I_t en tevens de waarde van de vervangingsspoel of -condensator.

Oplossing: De stroom door de condensator is:

$$I_C = U_a \omega C = 10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{100} A.$$

De stroom door de zelfinductie:

$$I_L = \frac{U_a}{\omega L} = \frac{10}{2 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{80} A.$$

Hieruit blijkt al dat de stroom door de zelfinductie groter is dan de stroom door de condensator.

De keten gedraagt zich inductief.

$$\text{De totaalstroom is: } I_t = I_L - I_C = \frac{1}{80} - \frac{1}{100} = \frac{1}{400} A.$$

Deze stroom ijlt dus 90° na op U_a .

De vervangingszelfinductie is:

$$L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{1 - 4 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,2}.$$

$$L_v = 2 \cdot 10^{-3} H.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 74 t/m 76.

2.12. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van een weerstand zelfinductie en condensator

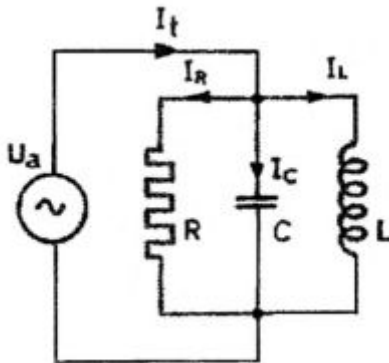


Fig. 2,31. Parallelschakeling van L , C en R .

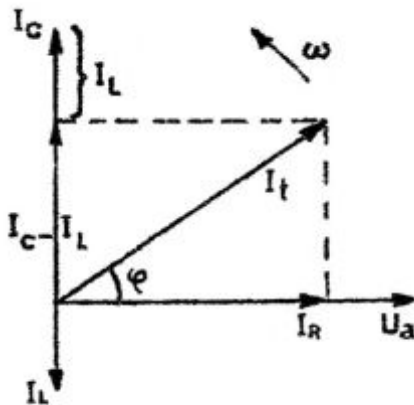


Fig. 2,32. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,31.

$$\frac{U_a^2}{Z^2} = \frac{U_a^2}{R^2} + U_a^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2.$$

Alle termen gedeeld door U_a^2 geeft:

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2$$

En na worteltrekking:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

Deze uitdrukking stelt de admittantie van de gegeven schakeling voor. Indien we alle vectoren die in fig. 2,32 een stroom voorstellen, delen door U_a dan resteert een vectordiagram waarin de vectoren de admittantie $\frac{1}{Z}$, de susceptanties ωC en $\frac{1}{\omega L}$ en de conductanties $\frac{1}{R}$ voorstellen.

De impedantie kunnen we nu vinden door beide leden van de uitdrukking voor de admittantie

Het schema, waarin de parallelschakeling van een spoel, condensator en weerstand is aangesloten op een wisselspanning, is in fig. 2,31 weergegeven. Op alle drie geschakelde onderdelen is dezelfde spanning U_a werkzaam.

De stroom door de weerstand is in fase met U_a en is bepaald door $I_R = \frac{U_a}{R}$.

De stroom door de zelfinductie die 90° na-ijlt op U_a is bepaald door $I_L = \frac{U_a}{\omega L}$ en de

stroom door de condensator, die 90° voorijlt op U_a , is gelijk aan $I_C = U_a \omega C$.

Daar I_C 90° voorijlt en I_L 90° na-ijlt op U_a zijn deze stromen dus in tegenfase. Dit komt duidelijk tot uiting in het bijkomende vector-diagram dat in fig. 2,32 is weergegeven.

De stroom die de krachtbron aan de spoel en condensator gezamenlijk levert, is dus bepaald door het verschil van I_C en I_L .

De totaalstroom I_t wordt nu gevormd door $I_C - I_L$ en I_R die 90° ten opzichte van elkaar verschoven zijn. I_t is nu weer te construeren door de diagonaal in de rechthoek, die bij de twee vectoren past, te tekenen.

Hieruit volgt met behulp van de stelling van Pythagoras dat:

$$I_t^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2.$$

De totaalstroom I_t is gelijk aan de aangelegde spanning U_a gedeeld door de totale impedantie, dus: $I_t = \frac{U_a}{Z}$.

De stromen vervangen door de quotiënten van aangelegde spanning en betreffende weerstand geeft:

$$\left(\frac{U_a}{Z} \right)^2 = \left(\frac{U_a}{R} \right)^2 + \left(U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L} \right)^2$$

R.T.

42 W.T.

Nadruk verboden

om te keren. Dit geeft:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

De faseverschuiving, die de schakeling volgens fig. 2,31 tussen de stroom I_t en de aangelegde spanning U_a teweeg brengt, is volgens fig. 2,32 bepaald door:

$$\tan \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{U_a \omega C - \frac{U_a}{\omega L}}{\frac{U_a}{R}}.$$

Alle termen gedeeld door U_a geeft:

$$\tan \varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} \quad \text{of} \quad \tan \varphi = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

De cosinus van hoek φ is nu:

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_t} = \frac{\frac{U_a}{R}}{\frac{U_a}{Z}} = \frac{Z}{R}.$$

De waarde van Z hierin gesubstitueerd geeft:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

In het voorgaande hebben we verondersteld, dat de stroom door de condensator groter was dan de stroom door de zelfinductie of anders gezegd, dat de susceptantie ωC groter was dan de susceptantie $\frac{1}{\omega L}$. Het resultaat hiervan was, dat de stroom I_t voorijlt op de aangelegde spanning U_a . De schakeling gedraagt zich capaciteef. De vervangingssusceptantie van de spoel en de condensator is nu:

$$\omega C_v = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad \text{of} \quad C_v = C - \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Deze vervangingssusceptantie ωC_v staat nu parallel aan de weerstand R , dus de admittantie kunnen we ook als volgt aangeven:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C_v^2}.$$

Indien de stroom door de zelfinductie groter was verondersteld dan de stroom door de condensator, dan was $\frac{1}{\omega L}$ groter geweest dan ωC . De stroom I_t zou dan na-ijlen op de spanning U_a , de keten gedraagt zich inductief. De vervangingssusceptantie is dan bepaald door:

$$\frac{1}{\omega L_v} = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L};$$

Waaruit volgt:

$$\frac{1}{L_v} = \frac{1 - \omega^2 LC}{L} \quad \text{of} \quad L_v = \frac{L}{1 - \omega^2 LC}.$$

De totale admittantie wordt nu:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L_v^2}}.$$

Gaan we uit van de gedachte dat de reactanties en dus ook de susceptanties van de spoel en de condensator gelijk zijn, dan levert de krachtbron geen stroom aan deze beide onderdelen.

Immers $I_C - I_L = 0$.



De totaalstroom I_t is nu gelijk aan de stroom door de weerstand, dus $I_t = \frac{U_a}{R}$.

De schakeling veroorzaakt geen faseverschuiving tussen I_t en U_a . De keten is weer in faseresonantie.

De frequentie waarbij dit optreedt, de resonantiefrequentie, moet nu zo zijn, dat $\omega_r C - \frac{1}{\omega_r L} = 0$, dus de resonantiefrequentie is gelijk aan $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Voor het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is, is de admittantie van de schakeling minimaal ofwel de impedantie maximaal. De stroom I_t zal in het resonantiegeval dus minimaal zijn en gelijk aan $I_{tr} = \frac{U_a}{R}$.

Terwijl de totaalstroom bij resonantie minimaal is, kan door de spoel en de condensator toch een vrij grote stroom vloeien. We moeten bedenken dat we de situatie weer beoordelen enige tijd nadat de spanning U_a werd ingeschakeld en de inschakelverschijnselen zijn gepasseerd.

De verhouding tussen de stroom door één der reactanties en de totaalstroom in resonantie duidt men aan met de kwaliteitsfactor of opslingerfactor Q . Dus:

$$Q = \frac{I_L}{I_{tr}} = \frac{\frac{U_a}{\omega_r L}}{\frac{U_a}{R}} = \frac{R}{\omega_r L} \quad \text{of} \quad Q = \frac{I_C}{I_{tr}} = \frac{U_a \omega_r C}{\frac{U_a}{R}} = R \omega_r C$$

en door ω_r te vervangen door $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ wordt deze kwaliteitsfactor:

$$Q = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Voorbeeld: Op een parallelschakeling van $L = 1000 \mu H$, $C = 200 pF$ en $R = 3000 \Omega$ wordt een spanning U_a aangesloten van 100 V. De frequentie van de aangelegde spanning is $\omega = 10^6$.

Bereken de stroom door elk van de onderdelen, de totaalstroom en de tangens van de hoek van faseverschuiving. Bereken eveneens de bovengenoemde stromen en de opslingerfactor voor het geval dat de resonantiefrequentie werkzaam is.

Oplossing: We berekenen eerst de takstromen.

$$I_L = \frac{U_a}{\omega L} = \frac{100}{10^6 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{10} \text{ A.}$$

$$I_R = \frac{U_a}{R} = \frac{100}{3000} = \frac{1}{30} \text{ A.}$$

$$I_C = U_a \cdot \omega C = 100 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{50} \text{ A.}$$

De totaalstroom I_t is nu:

$$I_t = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{900} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right)^2}$$

$$I_t = \sqrt{\frac{1}{900} + \frac{16}{2500}} = \sqrt{\frac{169}{22500}} = \frac{13}{150} \text{ A.}$$

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{50}}{\frac{1}{30}} = \frac{4}{50} \times 30 = 2 \frac{2}{5}$$

Hierbij ijlt de stroom na op de aangelegde spanning, daar de keten zich inductief gedraagt.

De resonantiefrequentie is: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}} \cdot \omega_r = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-13}}} = \frac{10^7}{\sqrt{20}} = 224 \cdot 10^4$.

De stroom door de condensator is in het resonantiegeval:

$$I_{cr} = U_a \omega_r C = 100 \times 224 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 0,0448 \text{ A.}$$

De stroom door de zelfinductie is in dit geval ook 0,0448 A.

De opslingerfactor is: $Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{0,0448}{\frac{1}{30}} = 1,34$.

2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en een condensator

In het voorgaande hebben we steeds verondersteld, dat de zelfinducties die worden gebruikt geen weerstand bevatten. Dankzij de dikwijls grote draadlengte en kleine doorsnede van de gebezigde draad heeft deze draad echter een zekere weerstand. Deze weerstand kunnen we in serie geschakeld met de zelfinductie werkzaam denken. Later zullen we zien dat deze weerstand nog door andere factoren wordt beïnvloed. Bij nauwkeurige beschouwingen zou bij de condensator ook een weerstand in rekening moeten worden gebracht, echter deze is ten opzichte van die van de zelfinductie zo klein, dat wij hem niet in rekening brengen.

De parallelschakeling van zelfinductie met weerstand en de condensator is in fig. 2,33 weergegeven.

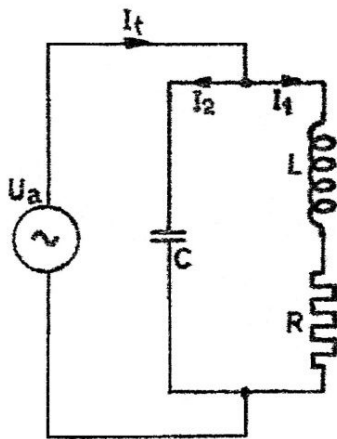


Fig. 2,33. Parallelschakeling van condensator spoel met weerstand.

Door nu een parallellogram te construeren met behulp van de vectoren I_1 en I_2 kan de vector die de totaalstroom I_t voorstelt getekend worden, door de diagonaal in het parallellogram aan te brengen.

De faseverschuiving die I_t bezit ten opzichte van U_a is nu door de hoek φ aangegeven.

In het voorgaande hebben we de vectoren in de juiste positie getekend, zonder ons te verdiepen in de grootte der vectoren. Het is natuurlijk mogelijk de vectoren op de juiste lengte, dat wil zeggen, op de juiste schaal te tekenen. We spreken daartoe af voor de stroomvectoren dat 1 cm lengte een bepaald aantal mA of A voorstelt en voor de spanningsvectoren dat 1 cm een bepaald aantal volts voorstelt.

Is voor bovenstaande schakeling de waarde van de onderdelen en de aangelegde spanning gegeven, dan beginnen we met voor I_1 een zekere stroom aan te nemen en de vector op schaal te tekenen. Met deze aangenomen waarde voor I_1 kunnen we nu alle andere grootheden berekenen en de vectoren tekenen. De juiste waarden van de voorkomende vectoren bepalen we nu als volgt. We bepalen de verhouding tussen de waarden die de gevonden vector U_a voorstelt en de werkelijk aangelegde spanning. Door alle vectoren nu met deze verhouding te vermenigvuldigen vinden we de werkelijke waarden van stromen en spanningen.

We zullen met behulp van een vectordiagram nagaan welk verband er bestaat tussen de aangelegde spanning U_a en de totaalstroom I_t .

We ontwikkelen eerst het vectordiagram voor de serieschakeling van L en R (zie fig. 2,34).

De stroom I_1 die door de spoel en weerstand optreedt geven we door een horizontale vector weer. De spanning over de weerstand is in fase met deze stroom en wordt weergegeven door de vector $I_1 \omega L$, 90° voorijlend op I_1 . Met behulp van deze beide spanningen vinden we de vector die de totale spanning over deze serieschakeling voorstelt. De totale spanning is tevens gelijk aan de aangelegde spanning U_a en is dus ook werkzaam over de condensator. De stroom I_2 die door en de condensator vloeit, ijlt 90° voor op U_a , dus kan nu ook in tekening worden gebracht.



2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en condensator (vervolg)

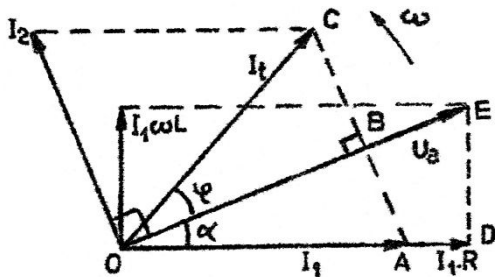


Fig. 2,34. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,33.

We zullen nu ook weer uit het vector-diagram de impedantie van de schakeling afleiden. De hoek die U_a voorrijt op I_1 geven we met α aan. In fig. 2,34 zien we dat $\triangle OBA$ een rechthoekige driehoek is, want $AC \parallel I_2$.

Volgens de stelling van Pythagoras is $I_t^2 = OB^2 + BC^2$. Daar $BC = I_2 - AB$ wordt $I_t^2 = OB^2 + (I_2 - AB)^2$.

In de rechthoekige driehoek is:

$\cos \alpha = \frac{OB}{I_1}$ en $\sin \alpha = \frac{AB}{I_1}$, waaruit volgt dat:

$OB = I_1 \cos \alpha$ en $AB = I_1 \sin \alpha$. waaruit volgt dat: $OB = I_1 \cos \alpha$ en $AB = I_1 \sin \alpha$.

Deze uitdrukkingen in I_t^2 gesubstitueerd, geven:

$$I_t^2 = I_1^2 \cos^2 \alpha + (I_2 - I_1 \sin \alpha)^2$$

Het laatste deel van deze vorm stelt het kwadraat van een tweeterm voor; een zogenaamd merkwaardig product van het type: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

De uitwerking geeft nu:

$$I_t^2 = I_1^2 \cos^2 \alpha + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha + I_1^2 \sin^2 \alpha.$$

$$I_t^2 = I_1^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha.$$

Uit de meetkunde weten we reeds dat $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ dus:

$$I_t^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin \alpha.$$

Uit de rechthoekige driehoek ODE volgt dat:

$$\sin \alpha = \frac{DE}{OE} = \frac{I_1 \omega L}{U_a} = \frac{I_1 \omega L}{I_1 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Reeds is bekend dat $I_2 = U_a \omega C$ en $I_1 = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$. De uitdrukking voor I_t^2 wordt nu:

$$I_t^2 = \frac{U_a^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + U_a^2 \omega^2 C^2 - 2 \cdot \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} U_a \omega C \cdot \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

U_a^2 buiten de haken gebracht geeft:

$$I_t^2 = U_a^2 \left(\frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \text{ of:}$$

$$I_t^2 = U_a^2 \left(\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 \right) \text{ en na worteltrekking:}$$

$$I_t = U_a \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Beide zijden van het = -teken gedeeld door U_a :

$$\frac{I_t}{U_a} = \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Daar $\frac{I_t}{U_a}$ voorstelt de admittantie $\frac{1}{Z}$ is de impedantie van deze schakeling dus:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}}.$$

Uit fig. 2,34 is verder af te leiden dat: $\tan \varphi = \frac{BC}{OB}$ of $\tan \varphi = \frac{AC - AB}{OB} = \frac{I_2 - I_1 \sin \alpha}{I_1 \cos \alpha}$.

R.T.

46 W.T.

Nadruk verboden

We hebben uit de rechthoekige driehoek reeds bepaald: $\sin \alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

Gemakkelijk is in te zien dat $\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

De grootheden met de uitdrukkingen voor I_1 en I_2 gesubstitueerd in de uitdrukking voor $\tan \varphi$ geeft:

$$\tan \varphi = \frac{U_a \omega C - \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}{\frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}} = \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

Dus:
$$\tan \varphi = \frac{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L}{R}.$$

In het voorgaande verondersteld geval, ijld de stroom I_t vóór op U_a . De keten gedraagt zich capaciteef. Voor andere waarden van de frequentie of bij dezelfde frequentie, maar bij andere waarden van de capaciteit en de zelfinductie kan de stroom na-ijlen op U_a ; dus de keten een inductief gedrag hebben. Ook is het mogelijk dat de stroom I_t in fase is met de aangelegde spanning U_a . Er heerst dan resonantie.

We zullen dit geval van resonantie nader onderzoeken. Resonantie wil zeggen, de fasehoek φ is gelijk nul, dus, die waarde van de frequentie waarbij $\tan \varphi = 0$, is de resonantiefrequentie.

$$\tan \varphi = \frac{\omega_r C(R^2 + \omega_r^2 L^2) - \omega_r L}{R} = 0.$$

Deze breuk is nul, indien de teller gelijk is aan nul, dus:

$$\omega_r C(R^2 + \omega_r^2 L^2) - \omega_r L = 0 \quad \text{of} \quad \omega_r (CR^2 + \omega_r^2 L^2 C - L) = 0.$$

Deze som neemt de waarde nul aan voor het geval dat $\omega_r = 0$ (heeft geen betekenis) en voor het geval dat $CR^2 + \omega_r^2 L^2 C - L = 0$ of $\omega_r^2 L^2 C = L - CR^2$.

Beide leden gedeeld door $L^2 C$ geeft:

$$\omega_r^2 = \frac{L - CR^2}{L^2 C} = \omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$$

En na worteltrekking vinden we voor de waarde van de resonantiefrequentie:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

Indien we de waarde van de impedantie willen bepalen, kunnen we in de uitdrukking voor de admittantie ω^2 vervangen door bovenstaande waarde van de resonantiefrequentie. Dit wordt:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2\omega_r^2 LC}{R^2 + \omega_r^2 L^2} + \omega_r^2 C^2 \quad \text{en met de waarde voor } \omega_r^2:$$

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2LC \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right)}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) C^2.$$

De haakjes weggewerkt geeft:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{1 - 2 + \frac{2R^2 C}{L}}{R^2 + \frac{L}{C} - R^2} + \frac{C}{L} - \frac{R^2 C^2}{L^2} \quad \text{of:}$$

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{-1 + 2 \frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} + \frac{C}{L} - \frac{R^2 C^2}{L^2}.$$

Alle termen onder dezelfde noemer brengen geeft:

$$\frac{1}{Z_r^2} = \frac{-1 + 2 \frac{R^2 C}{L} + 1 - \frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} = \frac{\frac{R^2 C}{L}}{\frac{L}{C}} = \frac{R^2 C^2}{L^2}.$$

$$\frac{1}{Z_r} = \frac{RC}{L} \quad \text{of} \quad Z_{res} = \frac{L}{CR}.$$



Deze impedantie stelt dus een weerstand voor daar de faseverschuiving nul is. Dit is dan tevens de maximum-waarde die de impedantie kan aannemen. Voor alle andere frequenties, dus buiten resonantie is de impedantie kleiner. Bij constante aangelegde spanning zal de stroom in het resonantiegeval dus minimaal zijn.

Dit komt ook weer tot uiting in de resonantiekromme die we van deze schakeling kunnen opnemen bij constante waarde van de aangelegde spanning U_a .

We verkrijgen een kromme zoals in fig. 2,35 is weergegeven. De scherpte van de "piek", die de resonantiekromme bezit, hangt weer af van de grootte van de weerstand en de verhouding $\frac{L}{C}$. Bij kleine weerstand en grote waarde van de verhouding $\frac{L}{C}$ zal de piek het scherpst zijn. Naar aanleiding van het feit, dat de keten in het resonantiegeval een grote impedantie voor de stroom bezit, noemt men deze keten wel sperkring. Ook wordt deze keten wel aangeduid met de naam vliegwielerkring, daar hier een grote stroom door de spoel en condensator kan optreden, rondgaande stroom genoemd, terwijl de doorgaande stroom I_t betrekkelijk klein kan zijn. De verhouding van deze twee stromen wordt gebruikt om de kwaliteitsfactor van de kring tot uitdrukking te brengen.

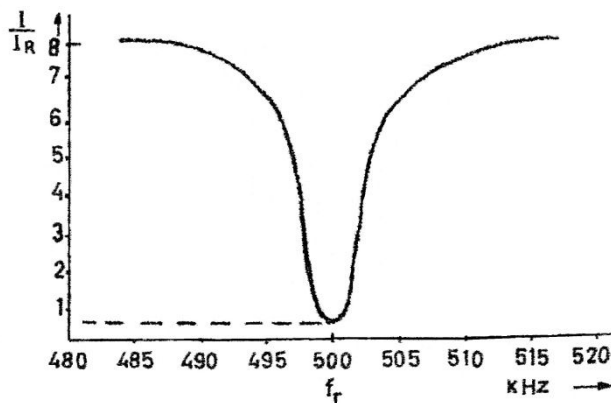


Fig. 2,35. Resonantiekromme van de schakeling volgens fig. 2,33 bij constante spanning.

$$Q = \frac{I_C}{I_t} = \frac{U_a \omega C}{\frac{U_a}{\frac{L}{CR}}} \rightarrow Q = \frac{\omega CL}{CR} = \frac{\omega L}{R}$$

Indien de weerstand R klein is ten opzichte van ωL kunnen we met een kleine benadering schrijven: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ en $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dus voor de Q -factor:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Het is ook mogelijk van deze keten een resonantiekromme op te nemen, terwijl de stroomwaarde die wordt toegevoerd aan de keten constant wordt gehouden. Naarmate de impedantie groter wordt, is een grotere spanning nodig om de stroom door de kring te handhaven. Deze spanning zetten we nu als functie van de frequentie uit en we verkrijgen fig. 2,36.

Voorbeeld: Op de schakeling volgens fig. 2,33 wordt een spanning aangesloten van 100 V.

Bereken de stroom door de spoel en door de condensator en de totaalstroom.

$$L = 200 \mu H, C = 5000 pF, R = 100 \Omega, \omega = 10^6$$

Bereken deze stromen eveneens, indien de aangelegde spanning de resonantiefrequentie bezit.

Oplossing: We berekenen eerst de takstromen:

$$I_2 = U_a \omega C = 100 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2} A$$

$$I_1 = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-18}}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 4 \cdot 10^4}} = \frac{100}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} A \rightarrow I_1 = \frac{1}{5} \sqrt{5} = 0,446 A$$

R.T.

48 W.T.

Nadruk verboden

Voor de totaalstroom berekenen we:

$$I_t = U_a \sqrt{\frac{1 - 2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2} = 100 \sqrt{\frac{1 - 2 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{10^4 + 4 \cdot 10^4} + 10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-18}}$$

$$I_t = 100 \sqrt{\frac{1 - 0,16}{5 \cdot 10^4} + \frac{25}{10^6}} = 100 \sqrt{\frac{20 - 3,2 + 25}{10^6}} = 100 \sqrt{\frac{41,8}{10^6}}$$

$$I_t = \frac{100 \cdot 6,46}{10^3} = 0,646 \text{ A.}$$

De resonantiefrequentie van de schakeling is:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-9}} - \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-12}} - \frac{1}{4 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3}{10^{-12}}} = 10^6 \sqrt{3} = 1,73 \cdot 10^6.$$

De takstromen zijn nu:

$$I_{2r} = U_a \omega_r C = 100 \cdot 1,73 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 0,865 \text{ A.}$$

$$I_{1r} = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + \omega_r^2 L^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 3 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}} = \frac{100}{\sqrt{13 \cdot 10^4}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = 0,28 \text{ A.}$$

$$I_{tr} = \frac{U_a}{\frac{L}{CR}} = \frac{U_a CR}{L} = \frac{100 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{4} \text{ A.}$$

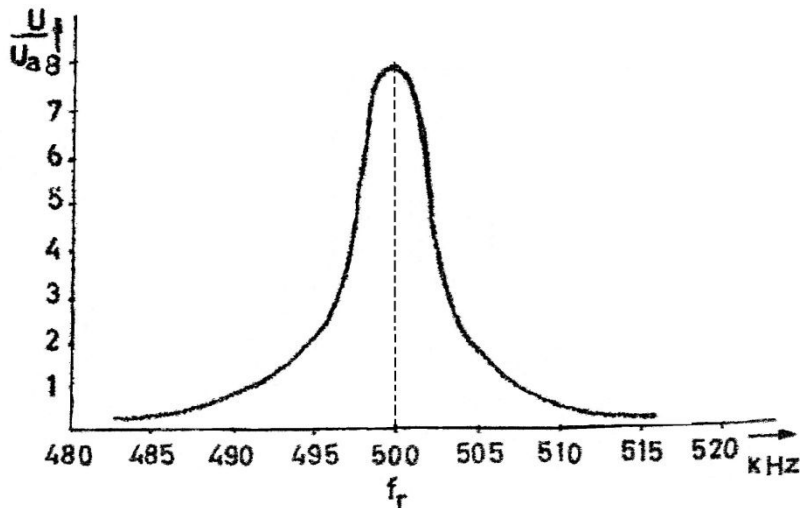


Fig. 2,36. Resonantiekromme van de schakeling van fig. 2,33 bij constante stroom.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 80 t/m 85.

2.13. Wisselspanning aangesloten op een parallelschakeling van zelfinductie met weerstand in serie en condensator (vervolg)

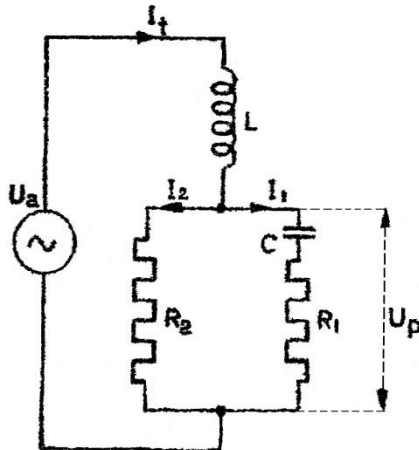


Fig. 2,37 Voorbeeld.

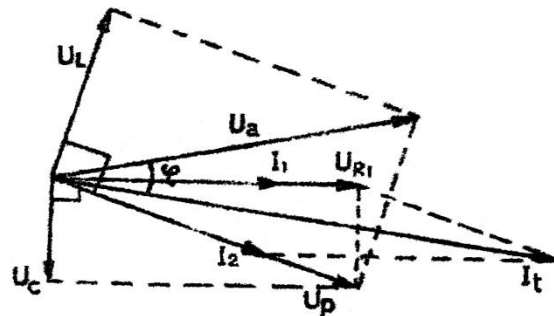


Fig. 2,28. Vectordiagram van de schakeling volgens fig. 2,37.

Voorbeeld: Bepaal het vectordiagram van de stromen en spanningen die voorkomen in de gegeven schakeling (fig. 2,37). Neem de grootte van de optredende stromen en spanningen aan.

Oplossing: We beginnen met de grootheden van de serieschakeling van R_1 en C door vectoren weer te geven. We kiezen daartoe eerst de vector I_1 (fig. 2,38), die de stroom door deze serieschakeling voorstelt. Bij deze stroom I_1 ontstaat een spanning U_{R1} over de weerstand R_1 , in fase met I_1 en een spanning U_C over de condensator welke 90° na-ijlt op de stroom I_1 .

Met behulp van de rechthoek op U_{R1} en U_C kunnen we de spanningsvector U_p tekenen (de diagonaal) die de spanning over de parallelschakeling van R_2 met R_1 en C voorstelt. Deze spanning is tevens werkzaam over de weerstand R_2 .

De stroom I_2 door R_2 kan nu worden aangegeven door een vector in fase met U_p . De stroom die door de gehele parallelschakeling wordt opgenomen is nu te bepalen door de som van I_1 en I_2 uit beide vectoren I_1 en I_2 af te leiden. De diagonaal in het parallellogram op I_1 en I_2 geconstrueerd geeft de som weer. Deze som van I_1 en I_2 is tevens de stroom I_t door de spoel L . Over de spoel wordt nu een spanning U_L ontwikkeld die 90° voorijlt op de stroom I_t . De aangelegde spanning U_a is gelijk aan de som van de spanning U_p en de spanning U_L . Door de som van U_p en U_L te construeren vinden we U_a die in dit gekozen geval een hoek φ voorijlt op I_t , de totaalstroom die de generator levert.

2.14. Vermogen bij wisselstroom

Bij de behandeling van het vermogen, dat ontwikkeld wordt door gelijkstroom, hebben we gevonden dat dit te berekenen is uit $P = I \times U$. Bij wisselstroom is het ontwikkelde vermogen van meer factoren afhankelijk.

We gaan eerst uit van de gedachte, dat een wisselspanning is aangesloten op een weerstand. stroom en spanning zijn dan in fase.

Het ontwikkelde vermogen is nu te bepalen uit het product van de effectieve waarde van de

R.T.

50 W.T.

Nadruk verboden

wisselspanning en de effectieve waarde van de wisselstroom.

Dus: $P = I_{eff} \times U_{eff}$ of $P = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \times \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \hat{I} \hat{U}$, uitgedrukt in de amplituden van stroom en spanning.

We kunnen het vermogen ook uitdrukken in de weerstand. Indien we $I = \frac{\hat{U}}{R}$ substitueren, verkrijgen we $P = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{R}$ en $\hat{U} = \hat{I}R$ gesubstitueerd, levert op $P = \frac{1}{2} \hat{I}^2 R$.

Deze beide uitdrukkingen ook weer uitgedrukt in de effectieve waarde van stroom en spanning geeft:

$$P = I_{eff}^2 R \quad \text{en} \quad P = \frac{U_{eff}^2}{R}.$$

Indien faseverschuiving tussen stroom en spanning optreedt, is dit anders. Om een goed inzicht hierin te verkrijgen gaan we uit van het geval dat stroom en spanning 90° in fase verschoven zijn (zie fig. 2,39).

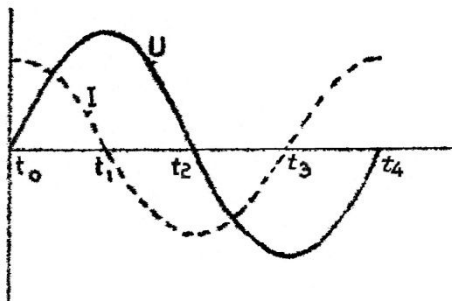


Fig. 2,39. Het vermogen indien I en U 90° verschoven zijn.

Gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ verdelen we de tijd in zeer kleine tijdsdeeltjes Δt . Door alle energie op deze wijze gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ bij elkaar op te tellen, vinden we dus de totale energie welke gedurende het tijdvak $t_0 - t_1$ wordt ontwikkeld.

Opgemerkt zij echter, dat we daar gedurende dit tijdvak I zowel als U positief zijn, de energie ook positief kunnen noemen. Ook gedurende de tijdvakken $t_1 - t_2$, $t_2 - t_3$ en $t_3 - t_4$ bepalen we op bovengenoemde wijze de ontwikkelde energie.

Gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ is de stroom negatief en de spanning positief; het product dus negatief en dus de ontwikkelde energie ook negatief. Gedurende het tijdvak $t_2 - t_3$ zijn stroom en spanning negatief; het product en dus ook de ontwikkelde energie positief. Gedurende het tijdvak $t_3 - t_4$ is de ontwikkelde energie weer negatief. Uit de figuur is gemakkelijk af te leiden dat de ontwikkelde energie tijdens de 4 tijdvakken telkens even groot is. Bepalen we de som van deze vier hoeveelheden energie, dan blijkt deze nul te zijn. Gedurende de gehele periode van de wisselstroom wordt dus geen energie geleverd. We kunnen ons dit nu als volgt voorstellen. Gaan we uit van de gedachte dat positieve energie, de energie is die de krachtbron aan de keten levert, dan zal de negatieve energie de energie voorstellen die de keten weer terug levert aan de krachtbron.

Bij een zuivere condensator zal de stroom 90° voorijlen op de spanning. De positieve energie wordt aan de condensator geleverd tijdens het laden van deze ($\frac{1}{2} CV^2$ joules). De negatieve energie komt tijdens het ontladen weer vrij.

Bij een zuivere zelfinductie (stroom ijlt 90° na op de spanning) zal de positieve energie aan de spoel worden toegevoerd tijdens het opbouwen van het magnetisch veld; de negatieve energie komt weer vrij tijdens het afnemen van het veld. Een zuivere zelfinductie of condensator verbruikt dus geen energie.

De stroom wordt in genoemde ketens een wattloze stroom genoemd.

Is de faseverschuiving tussen stroom en spanning tussen 0° en 90° in gelegen, dan moet in de keten een weerstand voorkomen en wordt er energie geleverd.

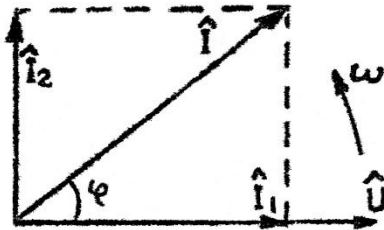


Fig. 2,40. Energie bij willekeurige fasehoek tussen \hat{I} en \hat{U} .

Hieruit volgt voor het geleverde vermogen:

$$P = \frac{1}{2} \hat{I} \hat{U} \cos \varphi.$$

Hiermede kunnen we dus het vermogen bepalen voor elke faseverschuiving die tussen stroom en spanning optreedt. Of de faseverschuiving positief of negatief is, dus voor of na-ijlend is, doet aan deze uitdrukking niets af.

De boven verkregen uitdrukking geldt eveneens voor het geval dat de faseverschuiving nul is, voor $\varphi = 0$ is $\cos \varphi = 1$, dus wordt het vermogen weer $\frac{1}{2} \hat{I}_1 \hat{U}$.

Voorbeeld: op de schakeling volgens fig. 2,33 wordt een spanning aangesloten met een amplitudewaarde van 500 V. Bereken het vermogen dat aan deze schakeling wordt geleverd.

$$L = 300 \mu\text{H}, R = 100 \Omega, C = 2000 \text{ pF}, \omega = 10^6.$$

Oplossing: Het gemakkelijkst gaan we dikwijls te werk, indien we de stroom door de desbetreffende weerstanden berekenen. De weerstanden stellen de energieverbruikers voor, de reactanties verbruiken geen energie, want deze gedragen zich wattloos. De stroom door de weerstand is bepaald door:

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_a}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{500}{\sqrt{10^4 + 10^{12} \cdot 9 \cdot 10^{-8}}} = \frac{500}{\sqrt{10^4 + 9 \cdot 10^4}} = \frac{500}{\sqrt{10^5}}.$$

$$\hat{I}_R = \frac{500}{100\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \text{ A}.$$

Het geleverde vermogen is nu: $P = \frac{1}{2} \hat{I}_R^2 R = \frac{1}{2} \times \frac{25}{10} \cdot 100 = 125 \text{ watt}.$

Voorbeeld:

Een spoel van 1000 μH met een serieweerstand R_L van 500 Ω wordt parallel geschakeld met een condensator van 500 pF en waarvan de verliezen vertegenwoordigd kunnen worden door een serieweerstand R_C van 400 Ω . De spanning die wordt aangelegd heeft een frequentie van 314000 Hz en een waarde van 100 V_{eff} .

Bereken:

- 1°. de stroom door de spoel.
- 2°. De spanning over de zuivere zelfinductie.
- 3°. De spanning over de ohmse weerstand van de spoel.
- 4°. De faseverschuiving tussen de stroom door de spoel en de aangelegde spanning.
- 5°. De stroom door de condensator.
- 6°. De spanning over de zuivere condensator.
- 7°. de spanning over de ohmse weerstand van de condensator.
- 8°. de faseverschuiving tussen de stroom door de condensator en de aangelegde spanning.

R.T.

52 W.T.

Nadruk verboden

- 9°. De faseverschuiving tussen de stroom door de spoel- en door de condensatortak (behoeft niet te worden berekend).
- 10°. Het vermogen dat de inductieve tak opneemt.
- 11°. Het vermogen dat de capacatieve tak opneemt.
- 12°. Het vermogen dat de aangelegde spanningsbron moet leveren.
- 13°. Het aantal kwh. dat in 20 uur wordt verbruikt.
- 14°. Het aantal calorieën dat in 20 uur wordt ontwikkeld.

Oplossing:

1°. De stroom door de spoel is bepaald door: $I_L = \frac{U_a}{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}} =$
 $= \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + (2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3})^2}} = \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 40 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-6}}} = \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^6}} =$
 $= \frac{100}{\sqrt{425 \cdot 10^4}} = \frac{1}{20,6} A = 0,0485 A$

2°. De spanning over de zelfinductie is: $U_L = I_L \times \omega L = 0,0485 \times 2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} =$
 $= 0,0485 \times 2 \cdot 10^3 = 97 V.$

3°. De spanning over de ohmse weerstand is: $U_R = I_L \times R_L = U_{RL} = 0,0485 \times 500 = 24,25 V.$

4°. De faseverschuiving van de stroom door de spoel en de aangelegde spanning is bepaald door:
 $\tan \varphi L = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{500} = 4.$

5°. De stroom door de condensator berekenen we uit:

$$I_C = \frac{U_a}{\sqrt{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + \frac{1}{(2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10})^2}}} = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + \frac{1}{10^{-6}}}} =$$
$$I_C = \frac{100}{\sqrt{16 \cdot 10^4 + 10^6}} = \frac{100}{\sqrt{116 \cdot 10^4}} = \frac{1}{\sqrt{116}} = \frac{1}{10,77} = 0,093 A.$$

6°. De spanning over de zuivere condensator is:

$$U_C = I_C \times \frac{1}{\omega C} = 0,093 \times \frac{1}{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 0,093 \times \frac{1}{10^{-3}} = 93 V.$$

7°. De spanning over de weerstand is: $U_{RC} = I_C \times R_C = 0,093 \times 400 = 37,2 V.$

8°. De faseverschuiving tussen I_C en U_a ligt vast door:

$$\tan \varphi C = \frac{1}{\omega C R_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 400} = 2,5$$

9°. De stroom door de condensator ijlt een hoek φC voor op U_a , terwijl de stroom door de spoel een hoek φL na-ijlt op U_a . De faseverschuiving tussen I_C en I_L is dus gelijk aan $\varphi C + \varphi L$.

10°. Het vermogen dat de inductieve tak opneemt, zal alleen in R_L worden omgezet. Daar de aangelegde spanning in effectieve waarde gegeven was, zijn dus alle stromen en spanningen die hiervoor worden berekend in de effectieve waarde uitgedrukt. Het vermogen is hier dus:

$$P_L = I_L^2 \times R_L \text{ of } P_L = I_L \times U_{RL} = 0,0485 \times 24,25 = 1,18 W.$$

11°. Het vermogen dat de capacatieve tak opneemt is:

$$P_C = I_C^2 \times R_C \text{ of } P_C = I_C \times U_{RC} = 0,093 \times 37,2 = 3,46 W.$$

12°. Het vermogen dat de gehele schakeling opneemt is: $1,18 + 3,46 = 4,64 W.$

13°. Het aantal kwh. dat in 20 uur wordt opgenomen is:

$$4,64 \times 10^{-3} \times 20 = 0,093 \text{ kwh.}$$

14°. Het aantal calorieën dat wordt ontwikkeld is:

$$\frac{0,093}{4270} = 21,7 \cdot 10^{-6} \text{ Kcal.}$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 85 t/m 91.

Hoofdstuk 3

De transformator

3.1. Het principe van de transformator

Het principe van de transformator berust op de inductie die een stroomvoerende geleider in een andere geleider tot gevolg heeft. Hierdoor is het mogelijk een wisselspanning van bepaalde waarde om te zetten in een wisselspanning van een andere waarde. De frequentie ondergaat hierbij geen verandering.

In de eenvoudigste gedaante bestaat een transformator uit een ijzeren kern waaromheen twee spoelen zijn gewikkeld. De beide wikkelingen worden onderscheiden in de primaire wikkeling L_1 waarop de beschikbare spanning wordt aangesloten en de secundaire wikkeling L_2 waar het

verbruikstoestel op wordt aangesloten (zie fig. 3,1).

Indien we aan de primaire klemmen een sinusvormige wisselspanning U_p aansluiten, dan zal deze een sinusvormige stroom en dus ook een sinusvormig veranderend magnetisch veld ten gevolge hebben. Dit magnetisch veld bevindt zich in de ijzeren kern en heeft in de secundaire spoel een emk van inductie tot gevolg en in de primaire spoel een emk van zelfinductie.

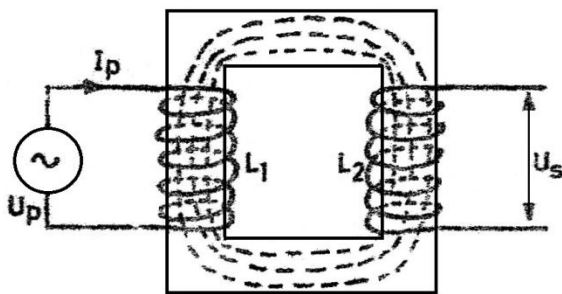


Fig. 3,1. Transformator.

zelfinductie in de primaire, zowel als de emk van inductie in de secundaire spoel, 90° na op de stroom die door de primaire vloeit (zie Wt 2,5).

Gaan we uit van de gedachte dat de transformator ideaal is, d.w.z. we brengen geen weerstand van de wikkeling en geen ijzerverliezen in rekening, dan ijlt de emk van

De emk van zelfinductie werkt de aangelegde spanning in de primaire keten tegen en de emk van inductie in de secundaire keten is dus ook in tegenfase met de aangelegde spanning U_p .

Bij dit alles zijn we van de gedachte uitgegaan dat in de secundaire keten geen verbruiksapparaat is opgenomen. De transformator is dus onbelast. De emk van zelfinductie in de primaire keten heeft een even grote waarde als de aangelegde spanning U_p . Dank zij de tegenwerking van deze emk van zelfinductie heeft de stroom in de primaire keten een minimumwaarde. Deze stroom wordt, in verband met de onbelaste toestand van de transformator, de nullaaststroom genoemd.

In Th.E, 5,16 hebben we reeds vastgelegd dat de grootte van de emk van zelfinductie bepaald is door $U = -\frac{d\phi}{dt}$. Daar de flux door de gehele primaire spoel wordt omvat en deze spoel n_1 windingen bezit, is de emk in de primaire wikkeling bepaald door $U_1 = -n_1 \frac{d\phi}{dt}$. Dezelfde magnetische flux wordt ook door de secundaire spoel omvat. Als we het aantal windingen van de secundaire spoel met n_2 aangeven, dan is de grootte van de emk van inductie in de secundaire bepaald door $U_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt}$. Indien de secundaire keten "open" is, dus als er geen stroom kan optreden, dan is $U_2 = U_s$ (fig. 3,1).

Uit bovenstaande waarden voor U_1 en U_2 volgt dat de verhouding van deze spanningen bepaald is door de verhouding van de aantallen windingen van beide spoelen. Door de windingsverhouding wordt dus bepaald of de spanning secundair hoger of lager zal zijn dan de primaire spanning.

We kunnen dus noteren:

$$\frac{U_a}{U_p} = \frac{n_2}{n_1} = T.$$

Deze verhouding wordt de transformatieverhouding genoemd.

Is de secundaire spanning groter dan de primaire dan spreekt men van verhogingstransformator of step-up-transformator. Ook wordt hiervoor de naam spanningstransformator gebezigd.

In het andere geval, de secundaire spanning dus lager dan de primaire, dan spreekt men van verlagingstransformator, step-down- of stroomtransformator.

3.2. Vervangingsschema van de transformator

Nu de transformator niet belast is, is de transformator aan de primaire klemmen te vervangen door een zuivere zelfinductie, die de nullastimpedantie vertegenwoordigt. Er wordt in dit geval geen vermogen opgenomen, daar de transformator ideaal was verondersteld.

Indien de transformator secundair belast wordt met een weerstand, dan zal de emk van inductie U_2 een stroom door deze weerstand en secundaire spoel ten gevolge hebben. De spanning die we over belastingsweerstand R_s waarnemen is dus niet dezelfde als de emk van inductie. De spanning U_2 verdeelt zich over de reactantie van de spoel L_2 en over de belastingsweerstand R_s . Het verschil tussen de spanning over de weerstand en de in de secundaire spoel geïnduceerde spanning is meestal zeer klein. Wij zullen verder van de veronderstelling uitgaan dat beide spanningen gelijk zijn, dus $U_2 = U_s$.

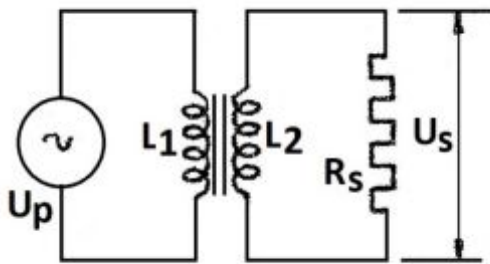


Fig. 3,2. Vervangingsschema van belaste transformator.

energie opneemt als de weerstand R_s opneemt bij de secundaire spanning. Het vermogen, dat R_s opneemt is bepaald door $\frac{1}{2} \frac{\hat{U}_s^2}{R_s}$. (Hierin is \hat{U}_s de amplitude van de secundaire spanning.)

Het vermogen dat de vervangingsweerstand R_p opneemt, is $\frac{1}{2} \frac{\hat{U}_p^2}{R_p}$. Daar de transformator verliesvrij is, zullen de verkregen uitdrukkingen voor het vermogen dat beide weerstanden opnemen "gelijk zijn", Dus:

$$\frac{1}{2} \frac{\hat{U}_s^2}{R_s} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_p^2}{R_p}.$$

Het vervangingsschema van een belaste transformator is in fig. 3,2 weergegeven.

In de weerstand R_s wordt nu energie ontwikkeld. Deze energie wordt door de primaire krachtbron geleverd en het magnetische veld draagt deze energie van de primaire keten over naar de secundaire keten.

Vanzelfsprekend kan het vervangingschema van deze transformator niet door een spoel worden weergegeven. Het vervangingschema wordt nu gevormd door een parallel-schakeling van de reeds gebezigde spoel L_0 en een weerstand (zie fig. 3,3). De spoel L_0 is weer de nullastimpedantie en de weerstand R_p moet een zodanige waarde hebben dat deze, dank zij de primaire spanning U_p , evenveel



Daar $T = \frac{U_s}{U_p}$ of $U_s = TU_p$ is, wordt de gelijkheid:

$$\frac{1}{2} \frac{T^2 \hat{U}_p^2}{R_s} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_p^2}{R_p}.$$

Na deling door \hat{U}_p^2 en vermenigvuldiging met 2 vinden we:

$$\frac{T^2}{R_s} = \frac{1}{R_p} \quad \text{of} \quad R_p = \frac{1}{T^2} R_s.$$

Daar bij goede transformatoren de reactantie van L_0 veel groter is dan de waarde van R_p , kan in het vervangingsschema L_0 verwaarloosd worden ten opzichte van R_p . De impedantie gemeten aan de primaire klemmen van de transformator is dus praktisch gelijk aan R_p .

Indien de transformator secundair belast was met een impedantie Z_s , dan is op dezelfde wijze aan te tonen dat de impedantie van de transformator aan de primaire klemmen gevormd wordt door een impedantie:

$$Z_p = \frac{1}{T^2} Z_s.$$

Het vermogen dat in R_s wordt opgenomen is ook uit te drukken in de stroom die de secundaire voert, nl. $\frac{1}{2} \hat{I}_{s2} R_s$ en het vermogen dat de primaire vervangingsweerstand opneemt bij een primaire stroom \hat{I}_p is dan $\frac{1}{2} \hat{I}_{p2} R_p$.

$$\text{Dus: } \frac{1}{2} \hat{I}_{s2} R_s = \frac{1}{2} \hat{I}_{p2} R_p \quad \text{en daer } \frac{1}{T^2} R_s \text{ wordt dit: } \frac{1}{2} \hat{I}_{s2} R_s = \frac{1}{2} \hat{I}_{p2} \frac{1}{T^2} R_s,$$

Waaruit volgt: $T = \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}_s}$.

De transformatieverhouding kan dus ook in de verhouding der stromen worden uitgedrukt. We zien dat de verhouding der stromen juist omgekeerd is vergeleken bij de verhouding der spanningen. Wordt de transformator belast met een zelfinductie L_s , dan wordt aan deze zelfinductie een energie toegevoerd $\frac{1}{2} L_s \hat{I}_{s2}^2$ en aan de primaire klemmen werkzame vervangingszelfinductie L_p neemt dan een energie op $\frac{1}{2} L_p \hat{I}_{p2}^2$.

Bij een verliesvrij veronderstelde transformator kunnen we dus weer stellen:

$$\frac{1}{2} L_s \hat{I}_{s2}^2 = \frac{1}{2} L_p \hat{I}_{p2}^2.$$

Daar $I_p = T I_s$ wordt dit:

$$\frac{1}{2} L_s I_{s2}^2 = \frac{1}{2} L_p T^2 I_{s2}^2.$$

Na vermenigvuldiging vinden we:

$$L_p = \frac{1}{T^2} L_s.$$

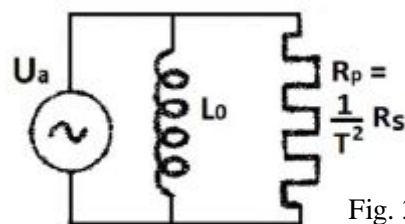


Fig. 3,3.

We kunnen de transformator nu dus vervangen door de parallelschakeling van L_0 en L_p , waarbij L_0 in het algemeen voor verwaarlozing is aanmerking komt.

Wordt in de secundaire keten een verliesvrije condensator C_s opgenomen, dan neemt deze een energie op van: $\frac{1}{2} C_s \hat{U}_{s2}^2$.

De vervangingscondensator C_p aan de primaire zijde neemt een energie op $\frac{1}{2} C_p \hat{U}_p^2$.

Gelijkstelling geeft:

$$\frac{1}{2} C_s \hat{U}_{s2}^2 = \frac{1}{2} C_p \hat{U}_p^2 \quad \text{en met } \hat{U}_a = T \hat{U}_p \text{ wordt dit:}$$

$$C_p = T^2 C_s.$$

In het vervangingsschema kunnen we deze condensator C_p dus parallel werkzaam denken aan L_0 .

Voorbeeld: Een transformator die verliesvrij mag worden verondersteld heeft een windingsverhouding $n_2 : n_1 = 1 : 5$. Aan secundaire zijde is een belastingsweerstand $R_b = 400 \Omega$ aanwezig.

R.T.

56 W.T.

Nadruk verboden

In de primaire keten komt een weerstand $R_1 = 15 \cdot 10^3 \Omega$ voor. De effectieve waarde van de primair aangelegde is $500 V$. Bereken het vermogen dat in R_b en R_1 wordt ontwikkeld en de spanning over R_b .

Oplossing: De transformatieverhouding is: $T = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{5}$. De vervangingsweerstand R_p van de secundaire weerstand R_b in de primaire keten is:

$$R_p = \frac{1}{T^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} \times 400 = 10^4 \Omega.$$

De totale weerstand die zich nu aan primaire zijde doet gevoelen is:

$R_t = R_1 + R_p = 15000 + 10000 = 25000 \Omega$. De primaire stroom is dus:

$$I = \frac{U_a}{R_t} = \frac{500}{25000} = 0,02 A.$$

Het vermogen dat door R_1 wordt opgenomen is $P_{R_1} = I_p^2 R_1 = 4 \cdot 10^{-4} \times 15 \cdot 10^3 = 6 \text{ Watt}$.

Het vermogen dat R_b krijgt, is even groot als het vermogen dat R_p in de primaire keten opneemt, dus:

$$P_{R_b} = P_{R_p} = I_p^2 R_p = 4 \cdot 10^{-4} \times 10^4 = 4 W.$$

De spanning die over de primaire wikkeling van de transformator ontstaat, is gelijk aan:

$$I_p \times R_p = 0,02 \times 10^4 = 200 V. \text{ Deze spanning wordt in de verhouding } \frac{1}{5} \text{ omlaag getransformeerd.}$$

Over de weerstand R_b staat dus een spanning $\frac{1}{5} \times 200 = 40 V$.

3.3. Gedrag van de transformator

Veronderstellen we dat een verliesvrije transformator secundair is belast met een impedantie, dan zal het secundair geleverd vermogen in algemene zin gelijk zijn aan $U_s I_s \cos \varphi_s$ en het vermogen dat primair moet worden toegevoerd zal dan bepaald zijn door: $U_p I_p \cos \varphi_p$. Dus:

$$U_s I_s \cos \varphi_s = U_p I_p \cos \varphi_p.$$

Praktisch kunnen we de faseverschuiving φ_s gelijk stellen aan φ_p , dus: $U_s I_s = U_p I_p$.

Uit deze uitdrukking volgt dus, dat naarmate de stroom aan secundaire zijde groter wordt (kleine belastingsweerstand), de stroom primair ook groter wordt, daar het secundaire verbruikte vermogen primair geleverd moet worden. De transformator is zelfregelend. We kunnen dit als volgt toelichten. Bij het aansluiten van een constante primaire spanning gaat er een primaire stroom vloeien.

Deze stroom wekt een magnetisch veld op. De veld veroorzaakt een emk van inductie in de primaire spoel en een emk van zelfinductie in de secundaire spoel. De emk van inductie in de secundaire heeft weer een stroom in de secundaire en dus ook een magnetisch veld ten gevolge.

We hebben reeds gezien dat de emk van inductie 90° na-ijlt op de primaire stroom.

De secundaire stroom ijlt nagenoeg 90° na op de geïnduceerde spanning (de secundaire gedraagt zich inductief). De secundaire stroom ijlt dus ongeveer 180° na op de primaire stroom, ofwel is in tegenfase. Het magnetisch veld van de secundaire stroom zal dus ook in tegenfase zijn met het primaire veld. Naarmate de secundaire stroom en dus ook het secundaire veld zal toenemen, zal het primaire veld meer worden tegengewerkt en dus afnemen. Het gevolg hiervan is dat ook de emk van zelfinductie in de primaire zal afnemen en de aangelegde spanning in de primaire minder wordt tegengewerkt door deze emk van zelfinductie. De primaire stroom zal nu dus toenemen, hetgeen te danken is aan een toenemen van de secundaire stroom. De primaire stroom zal nu zoveel gaan toenemen totdat weer de oorspronkelijke waarde van het veld is bereikt, waarbij de emk van zelfinductie nagenoeg weer dezelfde waarde verkrijgt als de aangelegde spanning. We concluderen hier dus uit dat ongeacht de waarde van de secundaire stroom de transformator steeds weer dezelfde magnetische flux opwekt.

Het magnetisch veld van een transformator is van nullast tot vollast constant.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 92 t/m 99.

3.4. Spreiding bij een transformator

We hebben in het voorgaande verondersteld dat het volledige magnetisch veld dat door de primaire wikkeling wordt geleverd ook door de secundaire wordt omvat. In werkelijkheid zal een deel van het primair opgewekte veld de secundaire niet bereiken. Het gehele secundaire opgewekte veld zal eveneens de primaire spoel niet bereiken. Dat deel van het primair opgewekte veld dat de secundaire niet bereikt, wordt het primaire spreidingsveld of primair lekveld genoemd. Dat deel van het secundaire veld dat de primaire niet bereikt heet secundair spreidingsveld of secundair lekveld. Het totale veld dat bij de transformator valt waar te nemen is dus te splitsen in drie delen, nl: Het primaire spreidingsveld, het secundaire spreidingsveld en het hoofdveld, dit is dus het veld dat door de primaire en secundaire spoel gezamenlijk wordt omvat.

Het hoofdveld draagt energie over van de primaire wikkeling naar de secundaire. De spreidingsvelden dragen geen energie over; deze betekenen dus ook geen energieverlies. De spreidingsvelden kunnen we nu ontstaan denken door verliesvrije zelfinducties die niet aan de functie van de eigenlijke transformator meewerken. In het vervangingschema volgens fig. 3,4 zijn L_{s1} en L_{s2} de beide zogenaamde spreidingszelfinducties die dus geacht worden de spreidingsvelden te leveren.

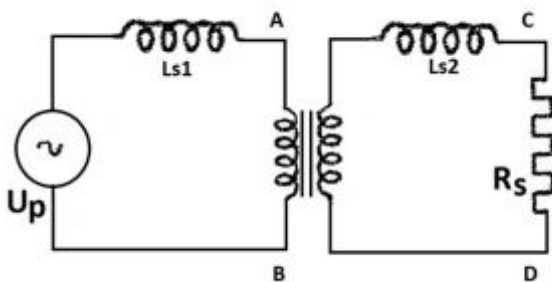


Fig. 3,4. Transformator met spreiding.

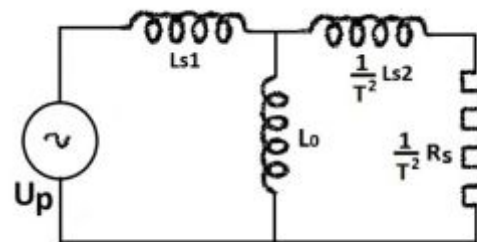


Fig. 3,5. Vervangingschema voor de transformator volgens fig. 3,4.

Het vervangingschema waarbij de gelijkwaardige impedantie aan de primaire klemmen is weergegeven vinden we in fig. 3,5.

Veronderstellen we nog even dat de transformator geen spreiding zou bezitten, dan zal in verband met de zelfregeling van de transformator de primaire kortgesloten worden als de secundaire zou zijn kortgesloten. Immers naarmate de secundaire stroom groter wordt, zal de primaire stroom ook groter worden. Een kortsluiting van de primaire van de transformator kan zeer hinderlijke gevolgen hebben voor de krachtbron, die primair is aangesloten.

Heeft de transformator wel spreiding, dan zal ten eerste bij kortsluiting van de klemmen CD in fig. 3,4 toch altijd nog de impedantie van de spreidingsspoel L_{s2} in de keten voorkomen. Hierdoor is een volledige kortsluiting niet mogelijk. Veronderstellen we dat de secundaire spreiding zeer klein is, dus verwaarloosbaar, dan zal bij kortsluiting van CD ook tussen de punten AB een kortsluiting optreden. De generator U_p is nu echter nog niet kortgesloten, daar de impedantie van L_{s1} zich doet gelden.

R.T.

58 W.T.

Nadruk verboden

Zo kan spreiding van een transformator een beveiliging vormen tegen primaire kortsluiting. Transformatoren waarbij secundair zeer grote stromen kunnen optreden worden dan ook voorzien van grote spreiding. We denken hierbij aan lastransformatoren en ontdooitransformatoren. De mate van spreiding die een transformator bezit, is hoofdzakelijk afhankelijk van de wijze van wikkelen van de spoelen.

3.5. Verliezen bij een transformator

Ijzerverliezen. Onder de ijzerverliezen worden verstaan de ijzerverliezen die in het ijzer optreden ten gevolge van de hysteresis en van de wervelstromen. Om de wervelstromen te verminderen bouwt men de kern van de transformator op uit lamellen (zie MO). De hysteresisverliezen worden bepaald door de kwaliteit van het kernmateriaal en de frequentie van de aangelegde spanning.

Koperverliezen. De wikkelingen van de transformatoren hebben in het algemeen een grote draadlengte met dikwijls kleine draaddoorsnede. Deze wikkelingen bezitten dus een zekere weerstand, zodat de stroomdoorgang warmte-ontwikkeling in het koper ten gevolge heeft.

Bij de berekening van de transformator kunnen we met deze verliezen rekening houden door in de primaire en de secundaire keten een weerstand werkzaam te denken, die evenveel energie in warmte omzet als in werkelijkheid in de kringen verloren gaat. We komen dan tot het vervangings-schema volgens fig. 3,6, waarin R_1 en R_2 respectievelijk de verliesweerstand van primaire en secundaire keten voorstellen.

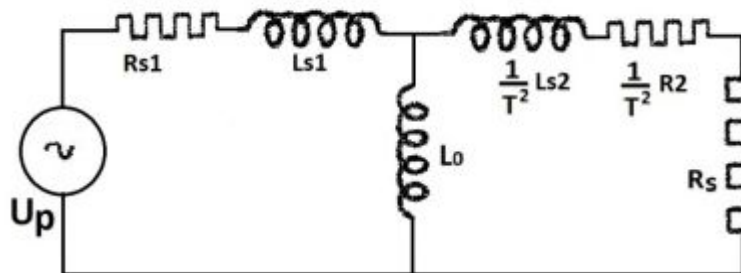


Fig. 3,6. Vervangingschema transformator met verliezen.

3.6. De autotransformator

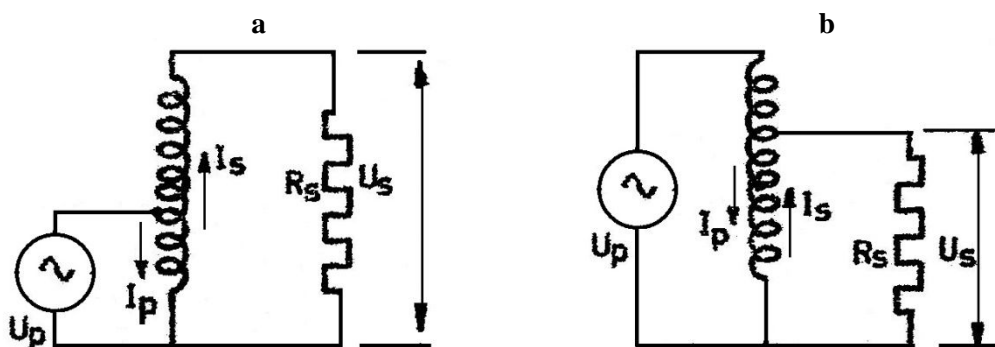


Fig. 3,7. De autotransformator: a. step-up-transformator; b. step-down-transformator.



Een transformator kan ook uitgevoerd zijn met één spoel.

Op deze spoel bevinden zich dan drie aansluitklemmen, waarvan één klem gemeenschappelijk voor primaire en secundaire gebruikt wordt. (fig. 3,7).

Dit type transformator wordt autotransformator of spaartransformator genoemd.

Dit type transformatoren wordt alleen gebruikt als het verschil tussen primaire en secundaire spanning niet te groot is. Een bezwaar van dit type is dat de wikkelingen niet gescheiden zijn. Daar de stroom in de secundaire wikkeling in tegenfase is met de stroom in de primaire, is de stroom in de gemeenschappelijke wikkeling gelijk aan $I_p - I_s$. We kunnen $I_s = \frac{1}{T} I_p$ stellen, dus wordt de stroom in de gemeenschappelijke wikkeling $I_p - \frac{1}{T} I_p = \left(1 - \frac{1}{T}\right) I_p$.

3.7. Ontwerp van een transformator

Hoewel het niet de bedoeling is hier een transformator te ontwerpen, willen we toch enige punten vermelden die bij het ontwerp van belang zijn. De belangrijkste hiervan zijn:

- 1^e. het vermogen dat secundair geleverd moet worden.
- 2^e. de spanningen aan primaire en secundaire zijde.
- 3^e. de frequentie van de aan te sluiten wisselspanning.

1^e. Het vermogen dat moet worden overgedragen bepaalt, bij de voorgeschreven waarde van de spanningen, de stroom die op moet treden. Hierdoor is de doorsnede van de te bezigen draad bepaald. Bij een step-down-transformator zal in het algemeen de secundaire spoel uit dikker draad gewikkeld moeten worden dan de primaire om de weerstand van de draad niet te hoog te doen worden en dus tevens de warmte-ontwikkeling in het koper binnen storende grenzen te houden. De draaddoorsnede wordt veelal gebaseerd op een stroomdichtheid van 2 ampère per m^2 .

Het over te dragen vermogen bepaalt tevens de doorsnede van de ijzeren kern die wordt gebruikt, want om een zeker aantal watts aan de secundaire toe te voeren is een zekere magnetische flux nodig en om deze magnetische flux te verzorgen is een zekere hoeveelheid kernmateriaal nodig.

2^e. De spanningen die bij de transformatoren voorkomen bepalen de isolatie van de gebezigde draad en de isolatie van de wikkelingen ten opzichte van de kern.

3^e. Hoewel in de transformatieverhouding geen frequentie voorkomt, moeten we bedenken dat deze maar voor één frequentie geldt. De grootte van de geïnduceerde spanning is sterk afhankelijk van de snelheid waarmee het veld verandert, dus van de frequentie. Naarmate de frequentie hoger wordt, is een kleinere magnetische flux nodig om een zeker vermogen aan de secundaire te leveren. Bij hogere frequentie kan men dan ook, bij eenzelfde uitgangsvermogen, met minder kernmateriaal volstaan dan bij een lagere frequentie. Bij lage frequentie, bv, 50 Hz, moet de magnetische flux zo groot mogelijk worden gehouden. De kern moet daartoe goed gesloten zijn opdat de magnetische weerstand zo klein mogelijk is.

3.8. Luchtspleet in de kern

We hebben in Th.E, 5,8 reeds gezien dat het verband tussen de magnetische veldsterkte H en de magnetische inductie in het ijzer voorgesteld kan worden door de hysteresislus, die we in fig. 3,8 nogmaals geven. We zien dat bij een grote sinusvormige verandering van de veldsterkte de magnetische inductie nagenoeg ook sinusvormig verloopt. De kleine afwijking die de inductie B_w heeft ten opzichte van de veldsterkte H_w is zo klein dat deze, dank zij de grote waarde van H_w en B_w kan worden verwaarloosd.

R.T.

60 W.T.

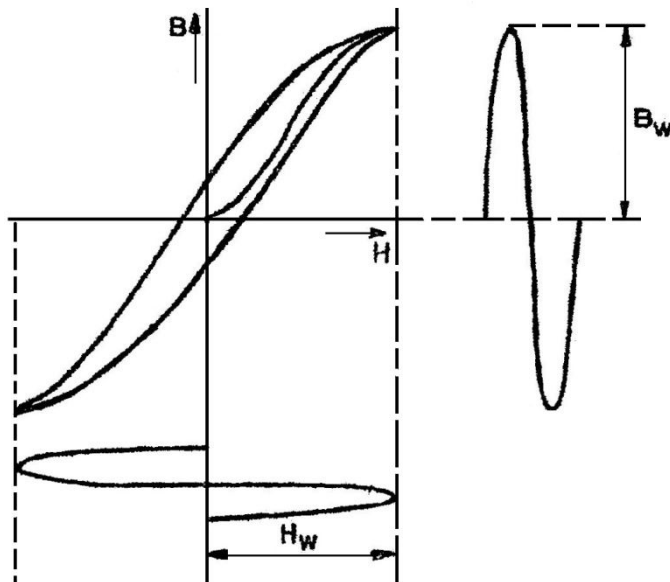


Fig. 3,8. Inductieverandering in de ijzeren kern.

heeft een constante magnetische veldsterkte H_g en constante inductie B_g tot gevolg. Deze constante magnetisatie wordt algemeen de voormagnetisatie genoemd. Deze voormagnetisatie wordt nu gevarieerd met de veranderlijke inductie B_w ten gevolge van de wisselstroom (zie fig. 3,9). Uit de figuur valt op te maken dat de verandering B_w en dus ook de inductiespanning in de secundaire niet dezelfde gedaante heeft als de verandering van de veldsterkte H_w of de verandering van de bijbehorende primaire stroom. Er treedt vervorming op, die in de radiotechniek tot een minimum beperkt moet blijven.

We zouden deze vervorming kunnen verminderen door een dikkere kern te gebruiken om op deze wijze meer te profiteren van het rechte gedeelte van de grafiek, ware het niet dat een dikkere kern de ijzerverliezen belangrijk doet toenemen.

Om bovengenoemde vervorming te voorkomen brengt men in de kern een luchtspleet aan. Deze luchtspleet heeft ten gevolge dat de kern eerst bij grotere waarde van H verzadigd geraakt en er is meer gelegenheid van het rechte deel der grafiek gebruik te maken. Het bezwaar dat de luchtspleet met zich brengt, is dat de spoelen een groter aantal windingen moeten bezitten om dezelfde fluxverandering tot stand te brengen als zonder luchtspleet. We kunnen dit als volgt verduidelijken.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 100 t/m 104.

Nadruk verboden

In het algemeen zal dit bij voedingstransformatoren waar grote veldsterkteveranderingen voorkomen het geval zijn. Mochten er grote afwijkingen voorkomen dan zullen ze hier in het algemeen geen hinderlijk gevolgen hebben.

In de radiotechniek is dit anders, daar is het van groot belang dat de inductieverandering en dus ook de secundair geïnduceerde spanning dezelfde gedaante heeft als de veldsterkte en de primaire stroom.

De veldsterktevariaties en inductieveranderingen zijn dan veelal klein en dikwijls komt het voor dat door de primaire spoel niet alleen de wisselstroom maar ook een zekere gelijkstroom optreedt. Deze gelijkstroom



3.8. Luchtspleet in de kern (vervolg)

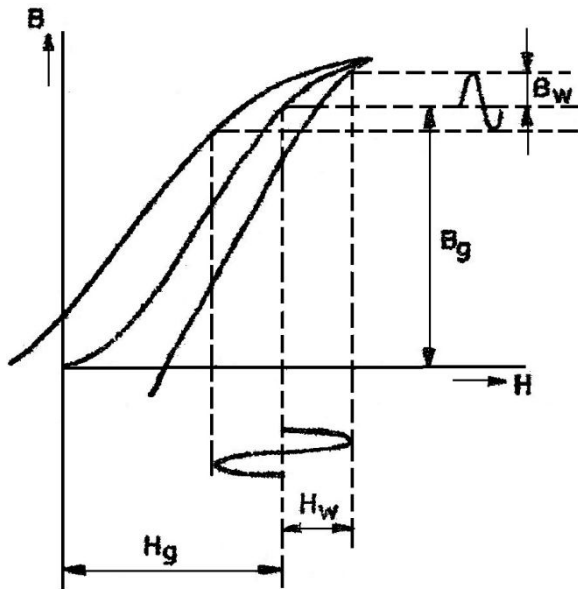


Fig. 3,9. IJzeren kern met voormagnetisatie.

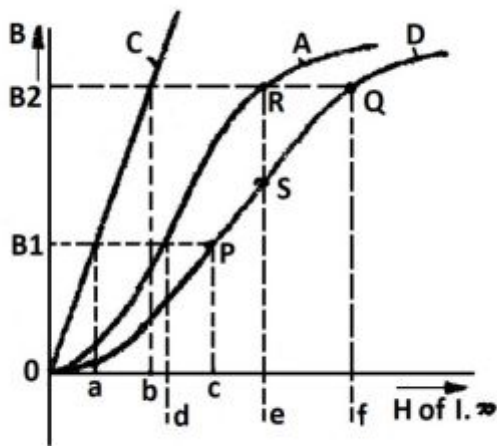


Fig. 3,10. Magnetiseringskromme van een kern met luchtspleet.

In fig. 3,10 is de magnetiseringskromme van het kernmateriaal door de lijn *OA* aangegeven. Tevens is in deze figuur de lijn *OC* getekend, die het verband aangeeft tussen de magnetische veldsterkte en de inductie in de luchtspleet. We merken hierbij op dat in de luchtspleet geen verzadiging kan optreden. Op de horizontale as is nu niet alleen *H* vermeld, maar ook het product ampère-windingen, waarmee *H* evenredig is.

Bij een inductie B_1 is voor de kern d ampère-windingen nodig om dezelfde inductie in de luchtspleet tot stand te brengen a A.w.

Om de inductie B_2 te vormen is voor de kern e A.w. en voor de luchtspleet b A.w. nodig. Totaal dus:

$$b + e = f \text{ A.w.}$$

Zo vinden we twee nieuwe punten *P* en *Q* die het verband aangeven tussen de A.w. of *H* en de magnetische inductie *B* in ijzer zowel als in de luchtspleet. Na een aantal dergelijke punten bepaald te hebben kunnen we de kromme *OD* tekenen.

We zien, dat dankzij de luchtspleet, eerst bij een grotere veldsterkte *H* de invloed van de verzadiging zich doet gelden en dat over een groter gebied de grafiek een recht karakter gekregen heeft. De optredende vervorming zal ook kleiner zijn. Bij een voormagnetisatie 0 zouden we zonder luchtspleet ingesteld zijn in punt *R* van de kromme *OA*, dus in de bocht van de karakteristiek, terwijl we, indien de luchtspleet is aangebracht, ingesteld zijn in punt *S* van de kromme *OD*, dus in een meer recht gedeelte. Daar de magnetische weerstand van de luchtspleet veel groter is dan die van de kern, moet deze tot een minimum beperkt blijven, nl. tot enkele tiende millimeters.

3.9. Gedrag van het magnetische veld bij veranderlijke belasting van de transformator

In het voorgaande hebben we reeds geconstateerd dat het veld van de transformator van nullast tot vollast constant is. Tot deze conclusie kwamen we bij de ideale transformator. We kunnen dit ook

R.T.

62 W.T.

Nadruk verboden

op de volgende wijze onderzoeken. We hebben gezien dat de magnetische veldsterkte evenredig is met het product ampère-windingen. Ook kunnen we zeggen dat de magnetische veldsterkte evenredig is met de spanning die over de zelfinductie werkzaam is. Bij een bepaald aantal windingen is de stroom bepaald door de werkzame spanning.

Veronderstellen we de primaire wikkeling van de transformator uit dik draad gewikkeld, zodat de weerstand van deze draad verwaarloosd kan worden. De aangelegde spanning is nu alleen werkzaam over de zelfinductie van de primaire. Deze aangelegde spanning blijft werkzaam ongeacht de waarde van de stroom in de primaire keten.

De stroom in de primaire wordt bepaald door de secundaire belasting. Daar de primaire spanning niet verandert bij verandering van de belasting zal dus ook de veldsterkte en de magnetische inductie onveranderd blijven.

Is de primaire spoel gewikkeld van dun draad, dan vormt deze een weerstand die we in serie werkzaam kunnen denken met de primaire zelfinductie. De primair aangelegde spanning zal zich nu verdelen over genoemde weerstand en de zelfinductie. Wordt de belasting groter, d.w.z. de belastingsweerstand kleiner en de secundaire stroom groter, dan zal de primaire stroom eveneens groter worden. Ten gevolge van deze grotere primaire stroom zal er dus meer spanning vallen over de weerstand en blijft er minder spanning over de zelfinductie werkzaam. De veldsterkte zal bij toenemende belasting dus afnemen en dientengevolge zullen de ijzerverliezen ook afnemen.

Indien de weerstand van de primaire niet te verwaarlozen is, moeten we bedenken dat niet de aangelegde spanning als de om te transformeren spanning mag worden opgevat.

In dit geval zal een deel van de aangelegde spanning over de ohmse weerstand verloren gaan en mogen we slechts een deel van de aangelegde spanning over de zuivere primaire zelfinductie werkzaam denken. Dit gedeelte van de aangelegde spanning zal volgens de transformatieverhouding naar de secundaire worden overgedragen.

Om het verschil tussen de ideale opgevatte transformator en de werkelijke goed in te zien merken we nog het volgende op.

Bij de ideale transformator wordt het totale magnetische veld door de primaire- zowel als door de secundaire spoel omvat. De transformator bezit geen spreiding, We drukken dit uit door de koppelfactor in te voeren; een getal dat aangeeft welke mate van koppeling bij de transformator optreedt. Bij de ideale transformator is de koppelfactor gelijk aan 1, en bij de transformator die spreiding bezit, zal deze koppelfactor dus kleiner dan 1 zijn, daar nu een gedeelte van het magnetische veld door de spoelen wordt omvat en dus de koppeling tussen de spoelen minder intensief zal zijn.

Als de koppelfactor kleiner dan 1 is, mogen we geen gebruik maken van de hiervoor gedefiniëerde transformatieverhouding die werd uitgedrukt in de wikkelverhouding. De berekening van de transformator zal nu op andere, minder eenvoudige wijze plaats moeten vinden, maar daarover later.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 105 t/m 107.

Hoofdstuk 4

4.1. Impedantie en admittantiediagrammen

a. Weerstand, condensator en spoel

We hebben in het voorgaande reeds kennis gemaakt met de impedanties en admittanties van verschillende ketens. We zullen nu de impedanties en de admittanties van verschillende ketens grafisch, als functie van de frequentie, weergeven. We spreken hiervoor af, dat we voor elke keten, of deze alleen uit een weerstand of alleen uit een reactantie of uit een samenvoeging van weerstanden en reactanties bestaat van impedantie of admittantie zullen spreken.

Veronderstellen we een weerstand waarvan de waarde onafhankelijk is van de frequentie, dan is de impedantie van deze weerstand weer te geven door een horizontale rechte lijn (fig. 4,1).

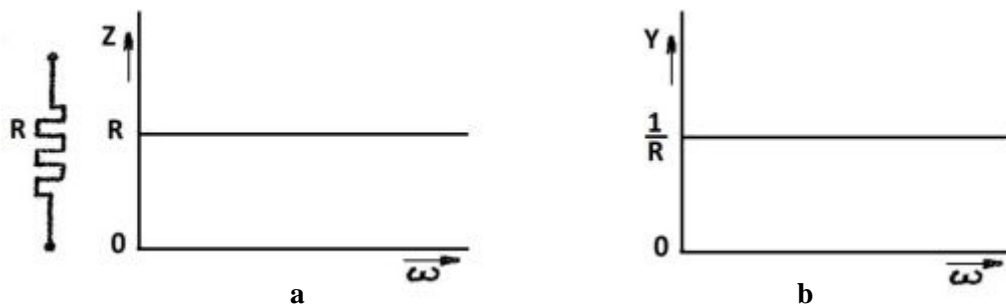


Fig. 4,1. a. Impedantiediagram; b. admittantiediagram van een weerstand.

Het zal duidelijk zijn dat indien we de grafiek van de admittantie tekenen we eveneens een horizontale rechte lijn krijgen die de waarde $\frac{1}{R}$ aangeeft, ook onafhankelijk van de frequentie. We moeten hierbij bedenken dat in fig. 4,1a langs de verticale as “ohm’s” op een zekere schaal zijn uitgezet en in fig. 4,1b op de verticale as “siemens’ ” zijn aangegeven.

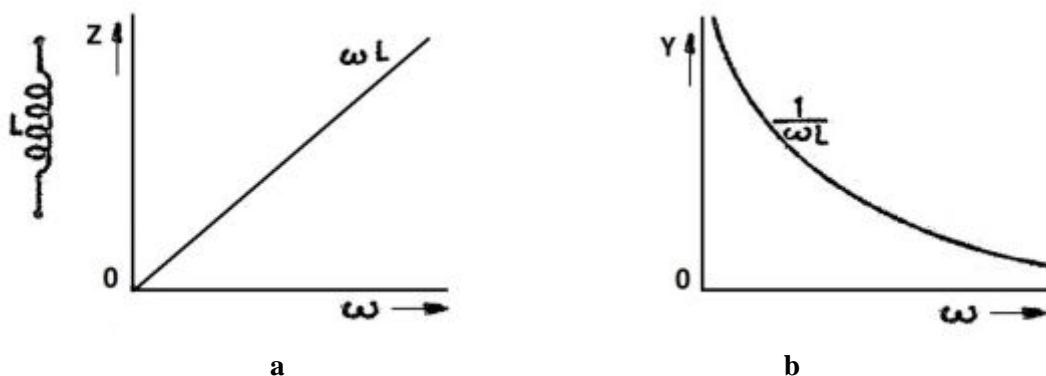


Fig. 4,2. a. impedantiediagram; b. admittantiediagram van een spoel.

De impedantie ωL van een spoel is evenredig met de frequentie; de impedantie kan nu dus weergegeven worden door een rechte lijn., die door de oorsprong van het assenstelsel gaat; zie fig. 4,2a.

R.T.

64 W.T.

Nadruk verboden

Voor wat het admittantiediagram van een spoel betreft, moeten we bedenken dat de admittantie $\frac{1}{\omega L}$ omgekeerd evenredig is met de frequentie.

Voor de frequentie $\omega = 0$ is y oneindig groot en voor de frequentie $\omega = \infty$ is y gelijk nul (zie fig. 4,2b).

Het impedantiediagram van een condensator verandert ook omgekeerd evenredig met de frequentie en de waarde van de impedantie neemt af met toenemende frequentie. Voor $\omega = 0$ is de impedantie oneindig groot en voor $\omega = \infty$ is de impedantie nul (fig. 4,3a).

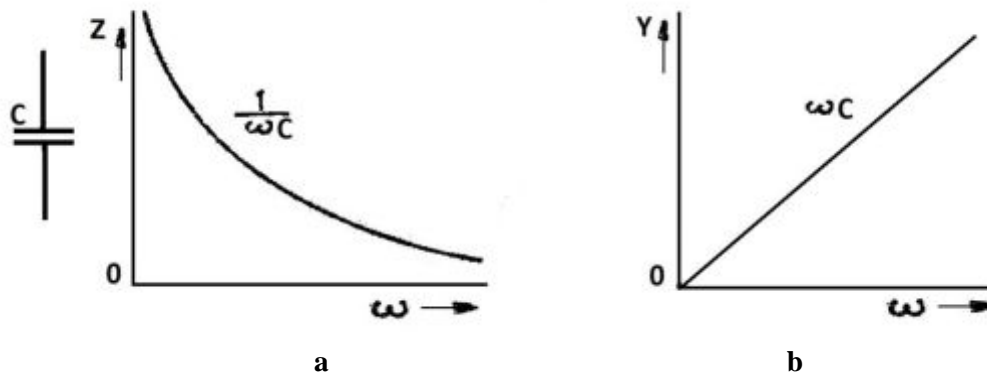


Fig. 4,3. a. Impedantiediagram; b. admittantiediagram van een condensator.

De admittantie van de condensator ωC is evenredig met de frequentie, dus is de grafiek van de admittantie een rechte lijn gaande door de oorsprong. Bij $\omega = 0$ is de admittantie gelijk nul en bij $\omega = \infty$ is de admittantie oneindig groot.

b. Serieschakeling van spoel en condensator

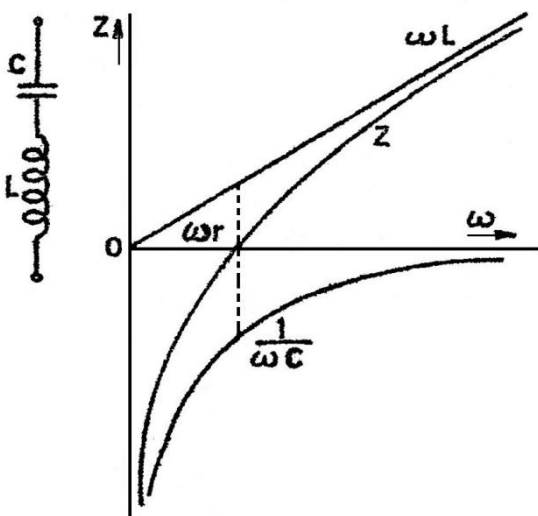


Fig. 4,4. Impedantiediagram van serieschakeling van spoel en condensator.

Indien we nu de serieschakeling van spoel en condensator gaan bezien moeten we bedenken dat de invloed van de condensator wordt tegengewerkt door de spoel.

Om dit tot uitdrukking te brengen tekenen we de grafiek voor de impedantie van de condensator niet zoals in fig. 4,3a is weergegeven, maar tekenen we deze onder de as; d.w.z. we tekenen de impedantie negatief en in fig. 4,4 weergegeven door de lijn $\frac{1}{\omega C}$.

De grafiek voor de impedantie van de spoel in fig. 4,4 is op dezelfde wijze weergegeven als in fig. 4,2a.

De totale impedantie Z vinden we nu door bij diverse waarden van de frequentie het verschil te bepalen van de impedantie van de spoel en condensator, dus $Z = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.



We zien dat bij ω_r de beide impedanties elkaar opheffen, dus $Z = 0$. Deze frequentie is de resonantiefrequentie van deze keten. Voor frequenties hoger dan ω_r heeft de keten een inductieve impedantie (Z positief) en voor frequenties lager dan ω_r is de impedantie capacitief (Z negatief). Bij een frequentie nul is de impedantie oneindig groot dank zij de condensator $\frac{1}{\omega C} = \infty$ en $\omega L = 0$. Bij $\omega = \infty$ is de impedantie oneindig groot door de impedantie van de spoel $\omega L = \infty$ en $\frac{1}{\omega C} = 0$.

c. Parallelschakeling van spoel en condensator

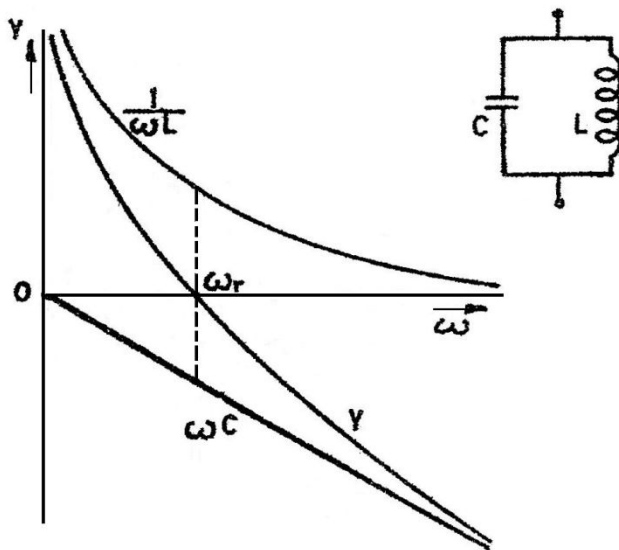


Fig. 4,5. Admittantiediagram van parallelschakeling van L en C .

terwijl voor frequenties lager dan de resonantiefrequentie ω_r de keten zich inductief gedraagt. Voor de frequentie $\omega = 0$ is de admittantie oneindig groot en voor de frequentie $\omega = \infty$ is de admittantie ook oneindig groot. In het eerste geval levert de spoel een kortsluiting, in het tweede geval de condensator.

Het is ook mogelijk langs eenvoudige weg enkele punten van het impedantiediagram uit het admittantiediagram af te leiden.

Voor $\omega = 0$ is de admittantie $y = 0$, dus uit $y = \frac{1}{Z}$ volgt dat $Z = \infty$.

Hetzelfde geldt voor $\omega = \infty$, ook hier is de impedantie $Z = 0$. Laten we ω van nul af aangroeien tot ω_r , dan wordt de admittantie steeds kleiner en de impedantie steeds groter. Als ω nagenoeg gelijk is aan ω_r dan is de admittantie, die nog steeds inductief is, ongeveer nul; de impedantie zal bij deze frequentietoename dus van nul af aangegroeid zijn tot een zeer grote waarde en de impedantie is voor $\omega = \omega_r$ oneindig groot (fig. 4,6).

Laten we nu de frequentie van zeer grote waarde afnemen tot ω_r , dan wordt de admittantie, die nu capacitief is van grote waarde af steeds kleiner tot nul (bij ω_r). De impedantie zal dus toenemen van zeer kleine waarde tot oneindig groot, echter nu onder de as getekend, daar deze impedantie zich

Van de parallelschakeling van spoel en condensator zullen we het admittantiediagram als functie van de frequentie ontwikkelen. Daartoe tekenen we de grafieken die de admittantie van de spoel ($\frac{1}{\omega L}$) en de admittantie van de condensator (ωC) weergeven.

De totale admittantie is nu bepaald door het verschil tussen deze beide admittanties, dus:

$$y = \frac{1}{\omega L} - \omega C \text{ (fig. 4,5).}$$

Bij de frequentie ω_r is de admittantie nul (dus impedantie oneindig) en is ω_r de resonantiefrequentie van de keten.

voor frequenties hoger dan ω_r overheerst de admittantie van de condensator,

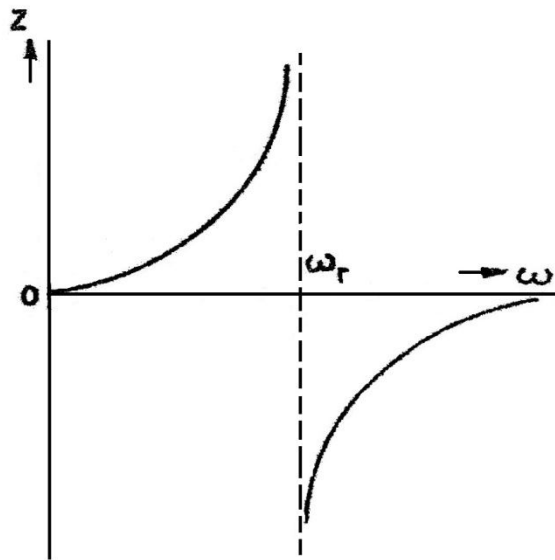


Fig. 4,6. Impedantiediagram van de schakeling volgens fig. 4,5.

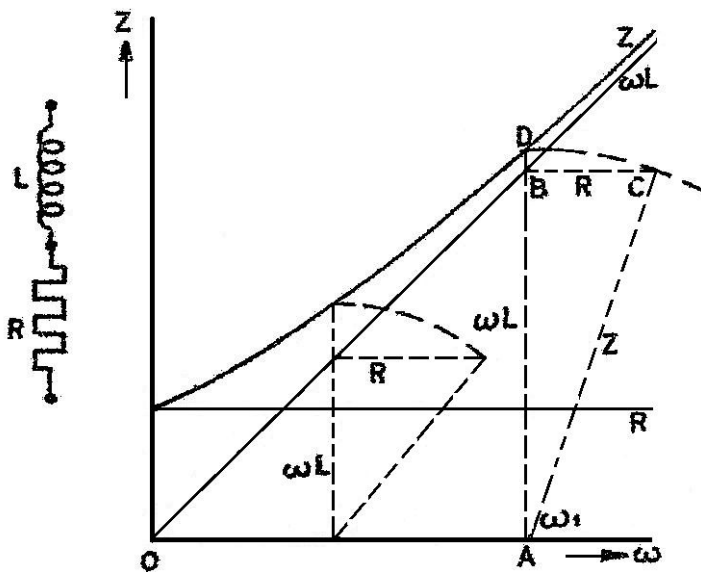


Fig. 4,7. Impedantiediagram van serieschakeling van spoel en weerstand.

vastleggen. Door de op deze wijze verkregen punten te verbinden verkrijgen we de grafiek die het verloop aangeeft van de impedantie als functie van de frequentie. Voor $\omega = 0$ is de impedantie gelijk aan R en voor hoge waarden van ω is de impedantie praktisch gelijk aan ωL .

capacitief gedraagt.

We zien, indien we de frequentie van een waarde iets kleiner dan ω_r laten toenemen tot iets groter dan ω_r , dat de impedantie verandert van zeer grote inductieve impedantie tot een zeer grote capacitieve impedantie.

d. Impedantiediagram van een serieschakeling van weerstand en spoel.

Om de impedantie van de serieschakeling van spoel en weerstand te bepalen tekenen we de grafiek van de weerstand R en die van de spoel in een assenstelsel. (zie fig. 4,7).

Nu mogen we de waarden van ωL en R niet zo bij elkaar optellen daar de spoel 90° faseverschuiving veroorzaakt en de weerstand niet. De impedantie wordt nu bepaald door $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. De waarde van Z kunnen we nu construeren met behulp van rechthoekige driehoek waarin de rechthoekszijden gevormd worden door R en ωL . De hypotenusa van de aldus gevormde driehoek stelt dan $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ voor.

Voor een willekeurige frequentie ω_1 is ωL voorgesteld door de verticale lijn AB . In B tekenen we nu loodrecht op AB , dus horizontaal, de lijn BC die gelijk is aan de waarde R . De verbindingslijn AC is nu de hypotenusa en gelijk aan $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. De lijn AC cirkelen we nu om AD , zodanig dat deze lijn verticaal komt te staan. De lijn AD is nu de impedantie $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ voor de frequentie ω_1 . Op gelijke wijze kunnen we voor andere frequenties de impedantie

4.1. Impedantie en admittantiediagrammen (vervolg)

e. Impedantiediagram van serieschakeling van weerstand en condensator

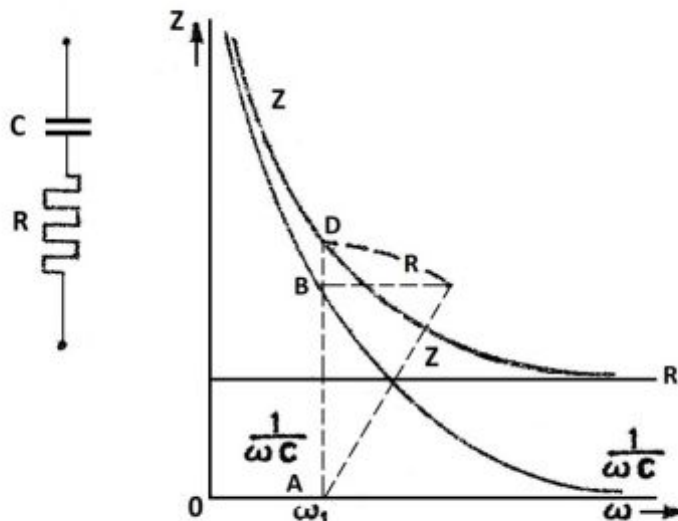


Fig. 4.8. Impedantiediagram van serieschakeling van weerstand en condensator.

we tekenen dus in een assenstelsel de grafiek van de weerstand en die van de condensator (fig. 4,8).

Ter wille van de constructie tekenen we de impedantie $\frac{1}{\omega C}$ van de condensator boven de as, dus positief.

De impedantie is te berekenen uit:

$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$, dus moeten we, evenals we in fig. 4,7 hebben gedaan, de impedantie van de keten construeren met behulp van de rechthoekige driehoek.

Voor de frequentie ω_1 is AB gelijk aan $\frac{1}{\omega C}$ en BC gelijk aan R , dus $AC = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ en na omcirkelen is het punt D dus een punt van de kromme die de impedantie Z voorstelt.

We zien dat de impedantie voor zeer kleine waarde van ω nagenoeg gelijk is aan $\frac{1}{\omega C}$ en voor zeer grote waarde R benadert.

f. Admittantiediagram van parallelschakeling van spoel en weerstand

In fig. 4,9 zijn de admittanties van R en L afzonderlijk als functie van de frequentie weergegeven. Op dezelfde wijze als in de voorgaande gevallen kunnen we nu de totale admittantie y construeren.

De admittantie is nu te berekenen uit $y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$. We zien uit de grafiek dat de admittantie bij zeer lage frequenties praktisch gelijk wordt aan $\frac{1}{\omega L}$ en bij zeer hoge frequenties de waarde $\frac{1}{R}$ benadert.

g. Admittantiediagram van de parallelschakeling van een weerstand en condensator

de afzonderlijke admittantiediagrammen van de weerstand en condensator zijn in fig. 4,10 weer aangegeven door de lijnen $\frac{1}{R}$ en ωC . De admittantie is nu bepaald door $y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$.

Met behulp van de rechthoekige driehoek zijn de punten van de grafiek y weer te construeren.

Voor de laagste frequenties is de admittantie minimaal en ongeveer gelijk aan $\frac{1}{R}$. Voor zeer hoge frequenties is de admittantie nagenoeg gelijk aan ωC .

R.T.

68 W.T.

Nadruk verboden

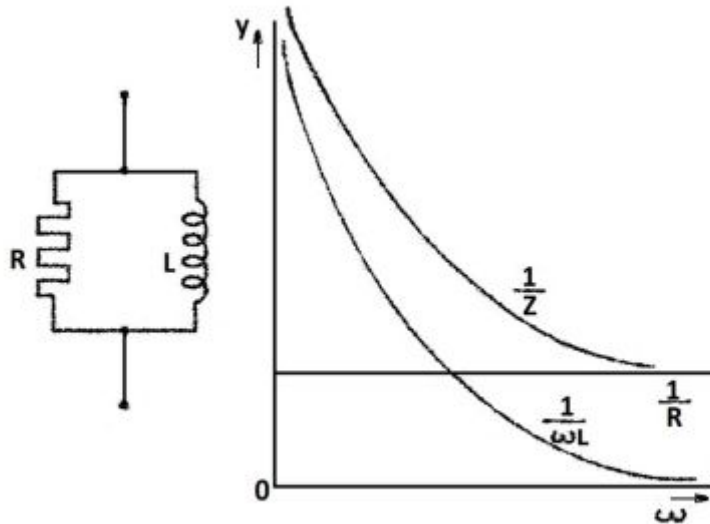


Fig. 4,9. Admittantiediagram van parallelschakeling van spoel en weerstand.

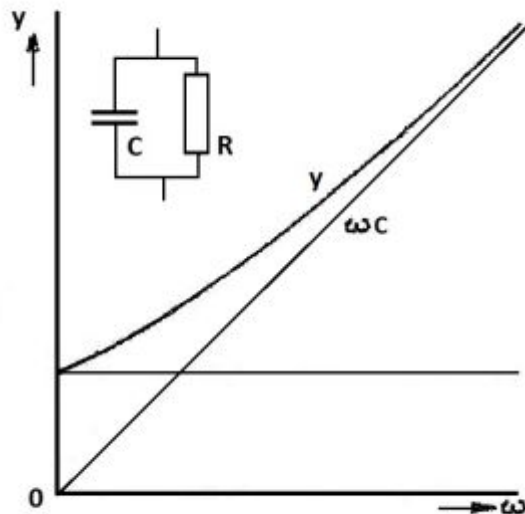


fig. 4,10. Admittantiediagram van parallelschakeling van weerstand en condensator.

rekening gehouden worden met de positieve of negatieve betekenis van de voorgestelde impedanties in verband met het bepalen van de som van enige grootheden.

Met behulp van de admittantie- en impedantie-diagrammen zijn we in staat een goed inzicht te verkrijgen in het gedrag van een schakeling ten aanzien van de frequentie. Het is dan wel gewenst alles in de juiste verhouding te tekenen, ofwel op schaal te tekenen. Hiertoe is het nodig enkele punten van de kromme te berekenen. Ook bij meer samengestelde ketens kunnen deze grafieken een goed inzicht geven van het gedrag der ketens als functie van de frequentie.

Daar het in het algemeen gebruikelijk is hiervoor ketens te gebruiken waarin de ohmse weerstand zeer weinig invloed op de impedantie heeft, kan de weerstand in de impedantie- of admittantiediagrammen buiten beschouwing worden gelaten.

Wenst men ook een goed inzicht te verkrijgen in het gedrag van de keten, of dit inductief of capacitief is, dan is het gemakkelijk om de impedantie van de spoel positief (boven de horizontale as) en de impedantie van de condensator negatief (onder de horizontale as) te tekenen.

Is het doel slechts een inzicht te verkrijgen in het verloop der impedantie, dan kunnen alle grafieken ook boven de horizontale as getekend worden. In dit geval moet toch goed

Te maken opgaven: Wt. Nummers 113 t/m 115.
Oplossingen inleveren.

Hoofdstuk 5Driefasensystemen5.1. Elektriciteitsnetten

Het opwekken van elektrische energie kan het voordeligst in het groot geschieden. Daarom zorgt tegenwoordig niet iedere gebruiker voor zijn eigen elektriciteitsvoorziening, maar heeft men elektrische centrales gebouwd, waar een groot aantal gebruikers op is aangesloten. Men is begonnen met plaatselijke centrales die gewoonlijk voor een stad met zijn naaste omgeving dienden. Het platteland bleef toen nog van elektriciteit verstoken, omdat een elektrische centrale alleen dan economisch kan werken als er vele gebruikers op zijn aangesloten die met niet al te lange leidingen kunnen worden verbonden.

De verschillende elektrische apparaten, zoals gloeilampen, motoren, verwarmingsapparaten, vereisen een bepaalde spanning. Een elektrische centrale dient dus te zorgen dat bij alle gebruikers de spanning dezelfde is. De elektrische leidingen bezitten een zekere weerstand. Vloeit er stroom door de leiding, dan treedt er een spanningsverlies in deze leiding op, waardoor de spanning bij de gebruiker lager is dan in de centrale. Voor sommige gebruikers is de afstand tot de centrale klein, voor andere groot. Het spanningsverlies is dus niet voor alle gebruikers even groot. Het is dus nodig de weerstand van de leidingen klein te houden zodat het spanningsverlies binnen toelaatbare grenzen blijft. Daarvoor is het nodig de koperdoorsnede der leidingen niet te klein te nemen. De leidingen worden daardoor kostbaar. Bovendien wordt in de leidingen elektrische energie in warmte omgezet; deze gaat verloren.

Vroeger leverden vele centrales gelijkstroom. Daarbij werden al deze bezwaren ten volle ondervonden en was een economisch transport van elektrische energie over grote afstanden niet goed mogelijk. Bij wisselstroom treden deze bezwaren in veel geringere mate op. Daarom worden tegenwoordig vrijwel uitsluitend wisselstroomcentrales gebouwd en worden de oude gelijkstroomcentrales vervangen. Bij wisselstroom kan op eenvoudige wijze de spanning op een hogere of lagere waarde worden gebracht door middel van een transformator. Is bij een verafgelegen gebruiker de spanning de spanning te laag geworden door het spanningsverlies in de leiding, dan kan een transformator de spanning weer op peil brengen. Het voornaamste voordeel is, dat het transport van de elektrische energie bij wisselstroom bij veel hogere spanning kan geschieden. De machines in de centrale, dynamo's genoemd, leveren bv. Een spanning van 3000 V. Een transformator zet deze spanning om in 10 000 V of 50 000 V, soms nog hoger en bij de gebruiker of een groep gebruikers, waarbij zo'n groep een gehele stad kan zijn, wordt de spanning met een transformator gebracht op 220 V. De meeste gebruikstoestellen zijn tegenwoordig bestemd voor 220 V; de plaatselijke elektriciteitsnetten dus ook. In enkele plaatsen waar nog oude elektrische centrales werken, treft men wel een afwijkende spanning aan. In Amerika is 110 V gebruikelijk. Daar moet men op letten bij het aansluiten van Amerikaanse apparaten, bv. Amerikaanse omroepontvangers. Wil men deze aansluiten op een net van 220 V, dan moet een transformator worden tussengeschakeld die de netspanning van 220 V omzet in 110 V.

Het overbrengen van elektrische energie bij hoge spanning biedt een groot economisch voordeel. De kosten hangen in hoofdzaak af van de elektrische energie. De centrale brengt dan ook aan de gebruiker de verbruikte energie in rekening. Energie is vermogen maal de tijd en wordt uitgedrukt in Joules = wattseconden. Voor de meeste praktische gevallen is dit een wel wat kleine maat. Men drukt dan de energie uit in kilowatturen (afgekort: kWh).

R.T.

70 W.T.

Nadruk verboden

Bij een leiding met een weerstand R , waar een stroom I door vloeit, gaat een vermogen $I^2 R$ in de leiding verloren. Bij een geleverd vermogen $P = IU$ is de stroom omgekeerd evenredig met de spanning. Hoe hoger de spanning, des te kleiner stroom. Verhogen we de spanning tot $a \times U$, dan wordt de stroom voor hetzelfde vermogen I/a en bij dezelfde leiding, dus bij dezelfde R , het vermogen dat in de leiding verloren gaat, $\frac{I^2}{a^2} R$, dus zeer veel kleiner. Neemt men een leiding met een kleinere koperdoorsnede, die dus veel goedkoper is, dan kan het vermogen dat verloren gaat nog klein blijven. Wordt bv. de doorsnede van de koperdraad a maal zo klein genomen, dan wordt R a maal zo groot en het verloren gaande vermogen $I^2 R/a$. Hieruit blijkt wel het grote belang van een hoge spanning bij transport van elektrische energie over grote afstanden. Toen men de moeilijkheden die bij zeer hoge spanningen optreden had overwonnen, was het mogelijk een uitgestrekt gebied van elektriciteit te voorzien. In Nederland werden provinciale centrales opgericht zodat een gehele provincie, zowel de steden als het platteland, vanuit één of enkele centrales werd gevoed. Bovendien werden verschillende centrales door koppelleidingen verbonden, waardoor bij een storing in een der centrales of overbelasting van een centrale, de andere te hulp kunnen komen.

Een belangrijke stap voorwaarts was het gebruiken van driefasenswisselstroom. Daarbij is de centrale met de verbruikers – althans met de grootverbruikers – verbonden door drie of vier geleiders in plaats van twee. Hoewel hierbij het aantal verbindingsdraden groter is, wordt bij het transport van de elektrische energie een besparing verkregen. Bovendien zijn motoren die op een dergelijk net kunnen worden aangesloten, eenvoudig en goedkoop en toch voor de meeste doeleinden geschikt. Daarom leveren alle moderne elektrische centrales driefasenswisselstroom. Wat we hieronder verstaan, bespreken we in de volgende les.

5.2. Driefasensysteem. Sterschakeling en driehoekschakeling

Een driefasensysteem is een stelsel van drie wisselspanningen waarvan de frequenties en gewoonlijk de amplitude en spanningen even groot zijn, doch waarbij het faseverschil tussen twee dezer spanningen 120° of $\frac{2\pi}{3}$ bedraagt. We kunnen deze drie spanningen voorstellen door:

$$\begin{aligned}U_1 &= \hat{U}_1 \sin \omega t. \\U_2 &= \hat{U}_2 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right). \\U_3 &= \hat{U}_3 \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right).\end{aligned}$$

We kunnen deze spanningen eveneens door vectoren aangeven.

In het voorgaande hebben we reeds wisselstroomgrootheden door middel van vectoren behandeld. We moeten hierbij echter bedenken dat, indien de vector een sinusvormige spanning $U = \hat{U} \sin \omega t$ voorstelt, de momentele waarde U van de spanning op elk tijdstip bepaald is door de projectie van de vector op de verticale as. De lengte van de vector moet dan de waarde \hat{U} of de effectieve waarde $\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ voorstellen. Daar we de vectoren tekenen op het tijdstip $t = 0$, zal de vector die $U = \hat{U} \sin \omega t$ voorstelt horizontaal naar rechts worden getekend; immers de projectie op de verticale as is op het tijdstip $t = 0$ gelijk aan nul (fig. 5,1).

De wisselspanning $U = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$ kan dus worden voorgesteld door een vector die de lengte \hat{U} of $\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ heeft en een hoek φ maakt met het rechter gedeelte van de horizontale as. Op het tijdstip $t = 0$ is de momentele waarde van deze spanning $U = \hat{U} \sin \varphi$, welke waarde op de verticale as te vinden is (fig. 5,2).

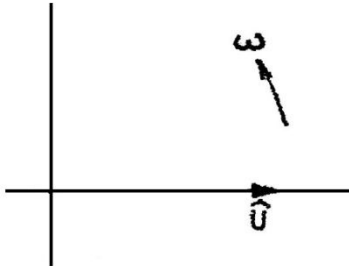


Fig. 5.1. $U = \hat{U} \sin \omega t$.

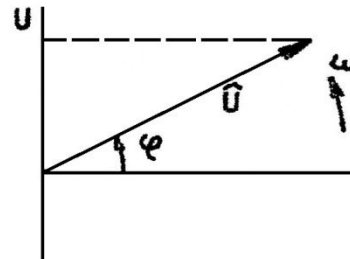


Fig. 5.2. $U = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$.

De wisselspanning $U = \hat{U} \cos \omega t$ wordt op tijdstip $t = 0$ door een vector weergegeven die langs het bovenste deel der verticale as valt, daar deze spanning 90° of $\frac{\pi}{2}$ radialen voorijlt op de spanning $U = \hat{U} \sin \omega t$.

De projectie van de vector U op de verticale as is nu maximaal, hetgeen overeen komt met de waarde van de cosinus van een hoek van nul graden (fig. 5,3).

De wisselspanning $U = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$ zal dus door een vector worden weergegeven die een hoek φ gedraaid is ten opzichte van de verticale as (fig. 5,4).

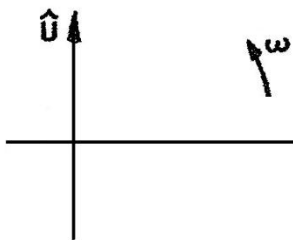


Fig. 5,3. Vector $U = \hat{U} \cos \omega t$.

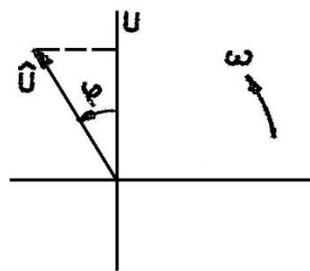


Fig. 5,4. Vector $U = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$.

De spanning $U_2 = \hat{U}_2 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ is aangegeven door een vector die een hoek $\frac{2\pi}{3}$ gedraaid is t.o.v. U_1 (draaiing tegen de draairichting van een uurwerk). De spanning $U_3 = \hat{U}_3 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$ is vertegenwoordigd door een vector die een hoek $\frac{4\pi}{3}$ gedraaid is t.o.v. U_1 of een hoek $\frac{2\pi}{3}$ gedraaid is t.o.v. U_2 .

Worden de driefasenspanningen voorgesteld door $U_1 = \hat{U} \cos \omega t$, $U_2 = \hat{U}_2 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ en $U_3 = \hat{U}_3 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$ (zie fig. 5,5b), dan wordt de vector U_1 verticaal geplaatst en de vectoren U_2 en U_3 respectievelijk 120° en 240° gedraaid t.o.v. U_1 .

De momentele waarde U wordt wederom bepaald door de projectie op de verticale as.

De gegeven drie wisselspanningen die het driefasensysteem vormen, kunnen nu door vectoren worden weergegeven zoals in fig. 5,5a is weergegeven.

De spanning $U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t$ is voorgesteld door een vector die horizontaal naar rechts is uitgezet.

R.T.

72 W.T.

Nadruk verboden

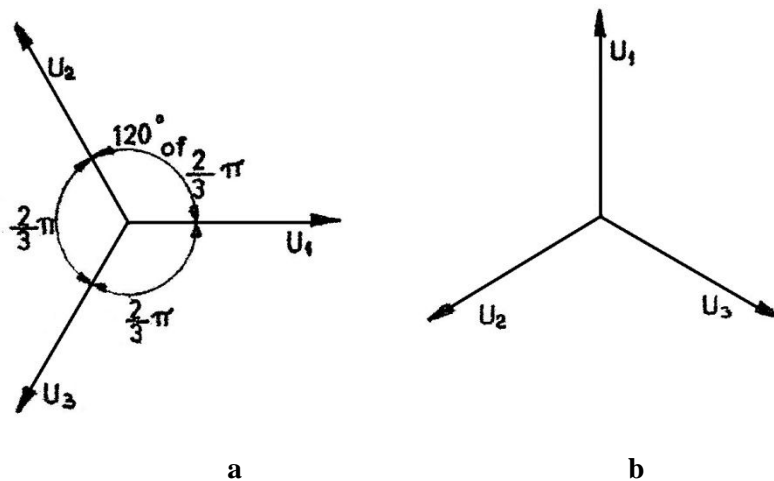


fig. 5,5. Vectorvoorstelling van spanningen van een driefasensysteem.

in de praktische toepassing meestal de drie spanningen ook gelijke waarden hebben.

5.3. Fasespanning

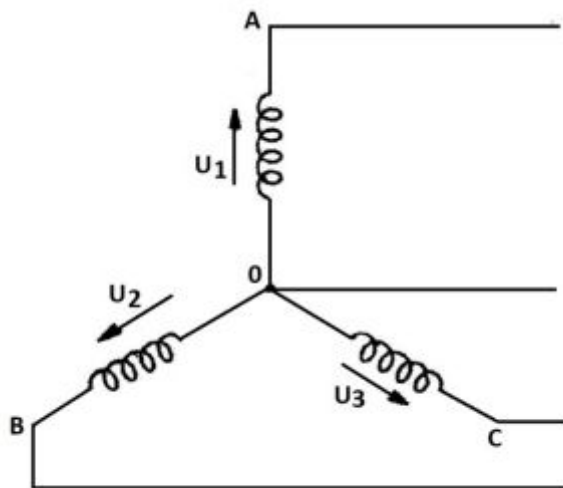


Fig. 5,6. Sterschakeling.

De drie spanningen behorende bij een driefasensysteem worden in één machine opgewekt. Deze machine, de driefasengenerator wordt later besproken. De constructie van deze generator is zodanig, dat de spanningen in afzonderlijke ketens worden opgewekt. De frequenties van deze spanningen zijn ten gevolge van het toepassen van één machine gelijk terwijl

De drie ketens die de draaistroomgenerator bezit, kunnen op verschillende wijze met elkaar worden verbonden.

In fig. 5,6 is de schakeling weergegeven waarbij de drie wikkelingen in ster geschakeld zijn.

De drie ketens hebben een punt 0 gemeenschappelijk. Dit punt wordt het sterpunt genoemd.

De punten A, B en C hebben elk een spanning t.o.v. punt 0 en worden fasespanningen genoemd.

Deze spanningen zijn alle drie even groot, echter onderling 120° verschoven.

In fig. 5,7 zijn deze spanningen als functie van de tijd getekend.

5.3. Fasespanning (vervolg)

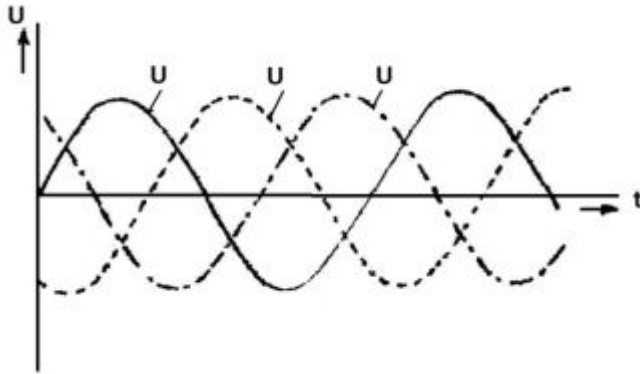


Fig. 5,7. De driefasespanningen als functie van de tijd.

De drie wikkelingen ook wel fasen genoemd, zijn in fig. 5,8 in driehoekschakeling weergegeven.

De drie wikkelingen zijn nu in serie geschakeld en vormen dus een gesloten keten.

Tussen de punten A en B , B en C en C en A onderling zijn weer de bovengenoemde fasespanningen werkzaam.

Deze fasespanningen tezamen hebben in de gesloten keten echter geen stroom ten gevolge, daar de drie fasespanningen elkaar opheffen.

De som van de spanningen is op elk ogenblik nul.

Om dit in te zien, is in

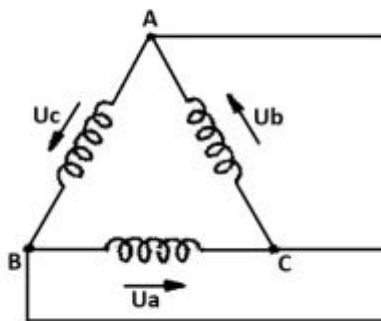


Fig. 5,8. Driehoekschakeling.

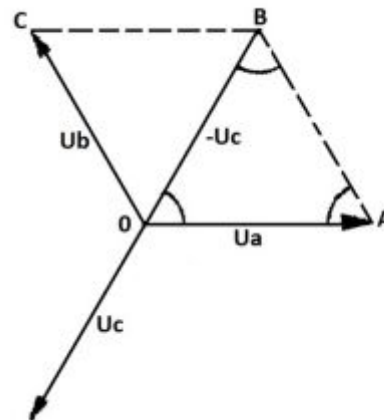


Fig. 5,9. Spanning werkzaam in driehoekschakeling.

Fig. 5,9 weer het vectordiagram van de driefasespanningen weergegeven.

We bepalen nu eerst de som van de spanningen U_a en U_b . We vinden deze som door de diagonaal te tekenen in de vierhoek $OABC$ die met behulp van U_a en U_b wordt verkregen. Van deze vierhoek zijn de zijden gelijk in grootte, dus is dit een ruit. De driehoek OAB is een gelijkzijdige driehoek, daar hoek A gelijk is aan 60° (supplement van de hoek gevormd tussen U_a en U_b) en $AB = 0$. Hieruit volgt dat $OB = AO = U_a = U_b = U_c$. Daar OB de som van U_a en U_b voorstelt en gelijk en tegengesteld is aan U_c wordt de spanning U_c dus door de som van U_a en U_b opgeheven en derhalve kan in het gesloten circuit geen stroom optreden. Door in fig. 5,7 op elk moment de algebraïsche som van de momentele waarden te bepalen, komen we eveneens tot bovenstaande conclusie.

5.4. Gekoppelde spanning en nulleider

De drie fasen bij de driefasengenerator worden door geleider met de verbruikers verbonden. Dit kan zowel in driehoekschakeling als in stersschakeling geschieden. Bij de driehoekschakeling zijn de spanningen tussen de leidingen gelijk aan de fasespanningen (zie fig. 5,8). Bij de stersschakeling is in vele gevallen ook het sterpunt met een geleider en dus met de verbruikers verbonden. Deze geleider wordt nulleider genoemd. De spanning tussen de drie geleiders en de nulleiders is weer gelijk aan de fasespanning.

Ook is het mogelijk de spanning tussen de punten A en B , B en C en A en C (fig. 5,6) de zogenaamde gekoppelde spanning te benutten. Deze drie spanningen zijn elk groter dan de fasespanning. De spanning tussen A en B kunnen we vinden door het verschil te bepalen tussen de spanningen $U_{k_1-2} = U_1 - U_2$. Om dit in een vectordiagram uit te voeren schrijven we dit als:

$U_{k_1-2} = U_1 + (-U_2)$. Dit wil zeggen, om het verschil tussen U_1 en U_2 te bepalen kunnen we U_1 optellen bij de tegengestelde waarde van U_2 . We tekenen daartoe de vector $-U_2$, in fig. 5,10 weer-

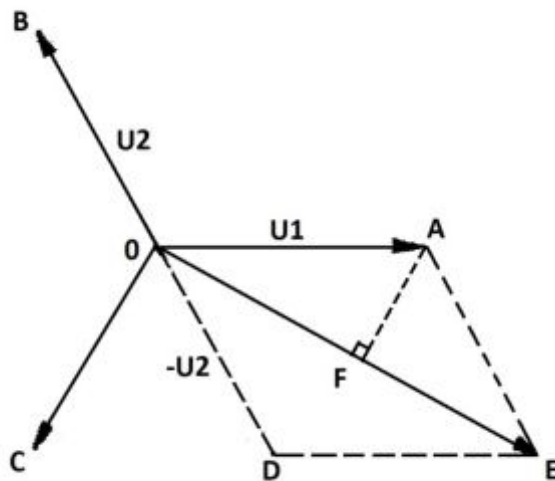


Fig. 5,10. Bepaling gekoppelde spanning.

gegeven door OD . De som van U_1 en $-U_2$ vinden we doormiddel van de diagonaal OE in de vierhoek die met behulp van U_1 en $-U_2$ gevormd wordt.

Deze diagonaal stelt dus de gekoppelde spanning tussen de punten A en B voor. We tekenen nu uit A een loodlijn AF op OE . Deze loodlijn deelt de lijn OE loodrecht middendoor, daar de driehoek AOE gelijkbenig is ($OA = AE$).

De hoek AOD is 60° , dus de hoek AOF is 30° (hoek AOD is het supplement van hoek AOB) en daar $OAED$ een ruit is, deelt de diagonaal OE de hoek AOD middendoor.

Zoals uit de meetkunde bekend is, is nu $AF = \frac{1}{2} OA - \frac{1}{2} U_1$ en volgens de stelling van Pythagoras is:

$$OF = \sqrt{OA^2 - AF^2}, \text{ dus } OF = \sqrt{OA^2 - \frac{1}{4} U_1^2} = U_1 \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} U_1 \sqrt{3}.$$

De waarde van OE , de gekoppelde spanning, is $2 \times OF$ en dus gelijk aan $2 \times \frac{1}{2} U_1 \sqrt{3} = U_1 \sqrt{3}$ Volt. Deze gekoppelde spanning U_{k_1-2} ijlt 30° na op U_1 , dus als $U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t$ is, dan is:

$$U_{k_1-2} = \hat{U}_1 \sqrt{3} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \text{ of } U_1 \sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{11}{6} \pi \right).$$

Op dezelfde wijze kunnen de gekoppelde spanningen bepaald worden tussen de punten A en C , U_{k_3-1} is nu bepaald door: $U_{k_2-3} = \hat{U}_1 \sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$. We zien hieruit dat de drie gekoppelde spanningen ook onderling $\frac{2}{3} \pi$ of 120° in fase verschoven zijn.

Bij de meeste plaatselijke elektriciteitsnetten hebben we de stersschakeling met fasespanningen van $220 V_{eff}$. De gekoppelde spanningen zijn dan $220\sqrt{3} = 380 V_{eff}$. Bij driehoekschakeling zijn de fasespanningen ook $220 V_{eff}$.



5.5. Schakeling der verbruikstoestellen

De wijze waarop de verbruikstoestellen (lampen, motoren, enz.) op een driefasennet worden aangesloten, is niet in alle gevallen dezelfde. Bij driehoekschakeling van de generator, die het net voedt, is er geen nulleider. De verbruikstoestellen met twee aansluitingen zoals gloeilampen worden tussen twee der geleiders aangesloten (fig. 5,11).

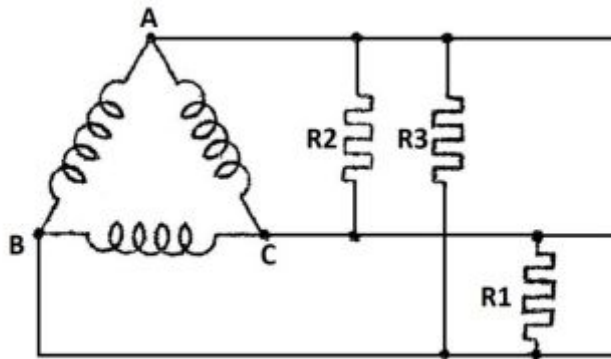


Fig. 5,11. Driehoekschakeling met belastingsweerstand.

Deze motoren zijn gewoonlijk zo geconstrueerd, dat daarbij de stromen in de drie leidingen gelijk zijn (d.w.z. gelijk van grootte; er is onderling een faseverschil van $\frac{2\pi}{3}$).

Bij een stersschakeling van de generator, die het net voedt, is er in de regel een nulleider aanwezig. Deze is vrijwel altijd geaard. De verbruikstoestellen met twee aansluitingen, zoals gloeilampen worden gewoonlijk aangesloten tussen een der fasen en de nulleiders, zoals R_1 en R_2 in fig. 5,12. Op deze wijze wordt het voordeel verkregen dat een de polen van het verbruikstoestel geaard is, het-

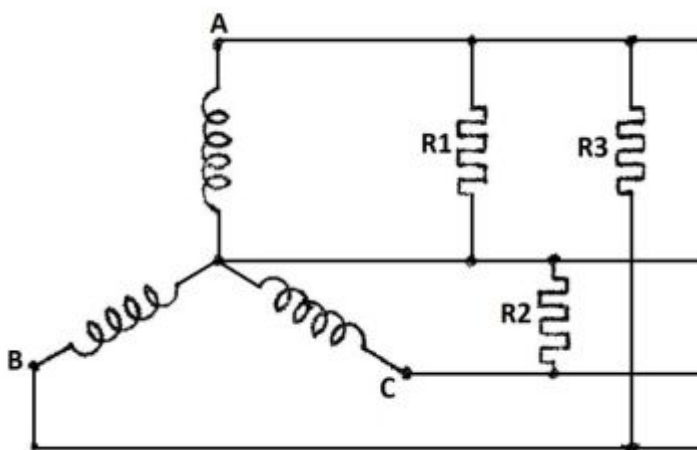


Fig. 5,12. Stersschakeling met nulleider, belast met enkele weerstanden.

aansluiting aan de nulleider is niet nodig. Kleine motoren, zoals die voor huishoudelijke apparaten, bv. stofzuigers, zijn ééfasemotoren. Normale woonhuizen worden dan ook aangesloten tussen een der

Daar het gewenst is de drie fasen zoveel mogelijk gelijk te belasten, worden de verschillende verbruikers afwisselend tussen verschillende fasen aangesloten zodat de equivalente weerstanden R_1 , R_2 en R_3 vrijwel even groot zijn. Uit de symmetrie van de schakeling volgt dan, dat de stromen I_1 , I_2 en I_3 door de drie leidingen ook even groot zijn. Verbruikstoestellen met drie aansluitingen, zoals de meeste motoren, worden eenvoudig met de drie leidingen verbonden. Deze motoren zijn gewoonlijk zo geconstrueerd, dat daarbij de stromen in de drie leidingen gelijk zijn (d.w.z. gelijk van grootte; er is onderling een faseverschil van $\frac{2\pi}{3}$).

Deze behoeven een aansluiting aan al de drie fasen; een

R.T.

76 W.T.

Nadruk verboden

fasen en de nulleiders; als er geen nulleider aanwezig is, zoals volgens fig. 5,11 tussen twee fasen. Hierbij wordt er naar gestreefd, voor het gehele net de belasting voor alle fasen gelijk te maken; de woonhuizen worden gelijkmatig over de drie fasen verdeeld. Grootverbruikers worden daarentegen aan de drie fasen aangesloten.

5.6. Stromen en spanningen bij sterschakeling

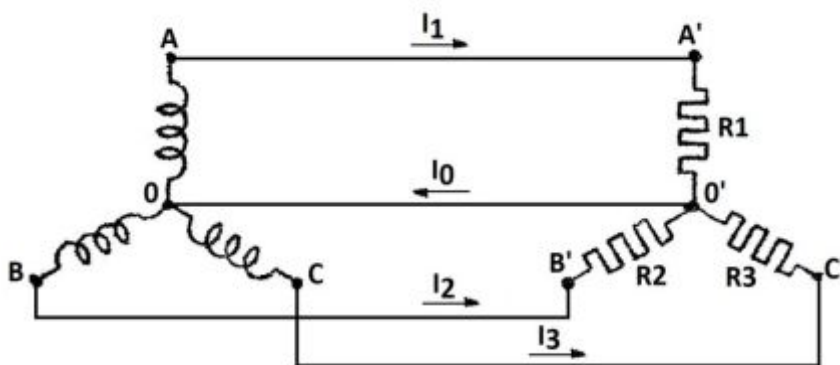


Fig. 5,13. Sterschakeling van de generator en sterschakeling van de verbruikstoestellen.

zijn nu:

$$I_1 = \frac{\hat{U}_1}{R} \sin \omega t \quad I_2 = \frac{\hat{U}_2}{R} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \quad I_3 = \frac{\hat{U}_3}{R} \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right).$$

De som I_0 van deze stromen vloeit door de nulleider. Op overeenkomstige wijze als plaatsvond voor de som van drie fasespanningen 5,3, kunnen we ook hier aantonen dat de som $I_1 + I_2 + I_3$ gelijk is aan nul. Dus bij gelijke belastingen zal de nulleider stroomloos zijn.

Indien de drie weerstanden R_1 , R_2 en R_3 niet gelijk zijn, dan zal door de nulleider een stroom vloeien. Er gaat nu energie aan warmte-ontwikkeling verloren, hetgeen een aanleiding is te streven naar gelijke belasting voor de drie fasen.

Bij gelijke belasting is er geen bezwaar tegen de nulleider weg te laten, daar deze toch geen stroom voert.

Zijn de fasen niet gelijk belast en is de nulleider weggelaten, dan is het sterpunt van de generator niet op dezelfde potentiaal als het sterpunt van de belastingsweerstand. De spanningen over deze belastingsweerstand zijn nu niet gelijk, hetgeen ontoelaatbaar is.

Is de nulleider wel aanwezig, dan blijven bij asymmetrische belasting de spanningen over de in ster geschakelde verbruikstoestellen constant (afgezien van een eventueel spanningsverlies in de hulleider). Door de wikkelingen van de in ster geschakelde generator vloeien dezelfde stromen als door de leidingen. Bij asymmetrische belasting zijn de drie fasen van de generator in dezelfde mate asymmetrisch belast.

We beschouwen een sterschakeling met nulleider waarbij de belasting wordt gevormd door drie even grote weerstanden, ook in ster geschakeld (fig. 5,13).

De weerstanden van de geleiders denken we opgenomen in de weerstanden R_1 , R_2 en R_3 .

De fasespanningen zijn:

$$U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t; \quad U_2 = \hat{U}_2 \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{en} \quad U_3 = \hat{U}_3 \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Daar de weerstanden gelijk verondersteld worden, is:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R.$$

De stromen in de leidingen

5.7. De stromen en spanningen bij driehoekschakeling

We veronderstellen de generator in ster en de verbruikstoestellen in driehoek geschakeld (fig. 5,14). De verbruikstoestellen stellen we weer voor door weerstanden R_a , R_b en R_c . Bij deze driehoekschakeling is een eventueel aanwezige nulleider niet in gebruik. Over elk der verbruikstoestellen is nu de gekoppelde spanning werkzaam. We noemen de spanning tussen P en Q : U_c , tussen Q en R : U_a en die tussen R en P : U_b . Deze spanningen zijn nu gelijk aan:

$$\begin{aligned} U_a &= \hat{U}\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{11}{6}\pi\right); \\ U_b &= \hat{U}\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{7}{6}\pi\right); \\ U_c &= \hat{U}\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right) \text{ (zie fig. 5,14).} \end{aligned}$$

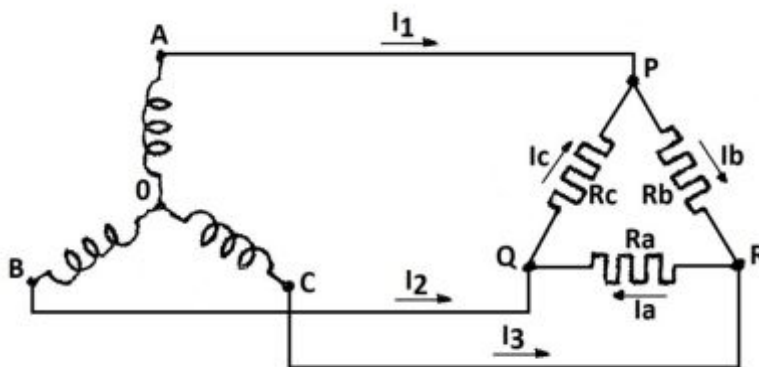


Fig. 5,14. Driehoekschakeling der verbruikstoestellen.

De stromen door de belastingsweerstand zijn:

$$I_a = \frac{U_a}{R_a}, \quad I_b = \frac{U_b}{R_b}, \quad I_c = \frac{U_c}{R_c}.$$

Nemen we de positieve richtingen der stromen zoals in fig. 5,14 door de pijlen is aangegeven, dan zijn de stromen die door de leidingen vloeien:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_b - I_c, \\ I_2 &= I_c - I_a, \\ I_3 &= I_a - I_b. \end{aligned}$$

Vullen we in deze laatste uitdrukking de momentele waarden van I_a , I_b en I_c in, dan blijkt dat de stromen door de leidingen even groot zijn als de stromen door de weerstanden R . Echter zijn de stromen door de leidingen 120° verschoven t.o.v. de stromen I_a , I_b en I_c . Bij asymmetrische belasting, dus als R_a , R_b en R_c niet even groot zijn, zijn de spanningen tussen de punten P , Q en R dezelfde als bij symmetrische belasting, doch zijn de stromen I_a , I_b en I_c ongelijk. De stromen I_1 , I_2 en I_3 zijn dan ook ongelijk van grootte, doch in mindere mate dan de stromen I_a , I_b en I_c door de verbruiksapparaten.

Driehoekschakeling van de verbruiksapparaten bevordert dus een gelijkmatige belasting der drie fasen van het net als de belasting asymmetrisch is.

R.T.

78 W.T.

Nadruk verboden

5.8. Het vermogen bij een driefasensysteem

We hebben in het voorgaande reeds gezien, dat indien een éénfasensysteem belast wordt met een impedantie, het vermogen dat aan de belasting geleverd wordt, bepaald is door:

$$P = I_{eff} \times U_{eff} \times \cos \varphi$$

Waarbij φ de hoek van faseverschuiving is die tussen de stroom en spanning optreedt.

Indien een in ster geschakeld driefasensysteem op elke fase van gelijke belasting wordt voorzien, zal dus per fase eveneens een vermogen geleverd worden gelijk aan: $P = I_{eff} U_{eff} \cos \varphi$.

De drie fasen tezamen leveren dus een totaal vermogen $P = 3 I_{eff} U_{eff} \cos \varphi$.

Worden de drie gekoppelde spanningen gebruikt dan is $U_{keff} = \sqrt{3}U_{eff}$ of $U_{eff} = \frac{U_{keff}}{\sqrt{3}}$.
Het totaal geleverd vermogen is dan ook gelijk aan:

$$P = 3I_{eff} \frac{U_{keff}}{\sqrt{3}} \cos \varphi \quad \text{of}$$

$$P = \sqrt{3}I_{eff} U_{keff} \cos \varphi.$$

Daar bij de hier onderstelde symmetrische belasting door de nulleider geen stroom vloeit, kunnen we de nulleider wegdenken.

Voor het in de belasting verbruikte vermogen is het nu onverschillig of de generator in ster of in driehoek is geschakeld, mits de spanningen tussen de drie geleiders hetzelfde blijven. Ook de schakeling van de belasting doet er niet toe, de impedanties mogen in ster of in driehoek zijn geschakeld. Zijn de spanningen tussen de geleiders en de stroom door de geleiders dezelfde, dan is ook het vermogen hetzelfde.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 122 t/m 124.

Hoofdstuk 6

6.1. Overgangsverschijselen

Tot nu toe hebben we het gedrag van verschillende ketens beschouwd onder invloed van spanningen waarvan we stilzwijgend hebben aangenomen dat zij doorlopend werken en altijd aanwezig zijn geweest, zowel bij het inschakelen als bij het uitschakelen van een spanning, hetzij een gelijkspanning of een wisselspanning, treden echter overgangsverschijselen op. De stromen en spanningen in de aangesloten keten nemen niet direct hun eindwaarde aan, doch bereiken deze pas na enige tijd. Deze tijd is zo kort dat men daar in vele gevallen niets van bemerkt. Er zijn echter gevallen, dat men, ondanks de korte duur der overgangsverschijselen, ook wel inschakelverschijselen en uitschakelverschijselen genoemd, toch rekening hiermede moet houden.

We zullen enkele eenvoudige gevallen van deze overgangsverschijselen bij het in- en uitschakelen van een gelijkspanning beschouwen.

6.2. Weerstand aangesloten op een gelijkspanning

Sluiten we een weerstand aan op een gelijkspanning, dan zal op ieder ogenblik de stroom, volgens de wet van Ohm, evenredig zijn met de spanning, zodat van enige overgangsverschijselen geen sprake zal zijn. Zowel in gesloten als in open stand van de schakelaar S in fig. 6,1a zal de batterijspanning steeds de waarde U_0 hebben. Zolang de schakelaar open staat, dus de keten verbroken is, vloeit in de keten geen stroom.

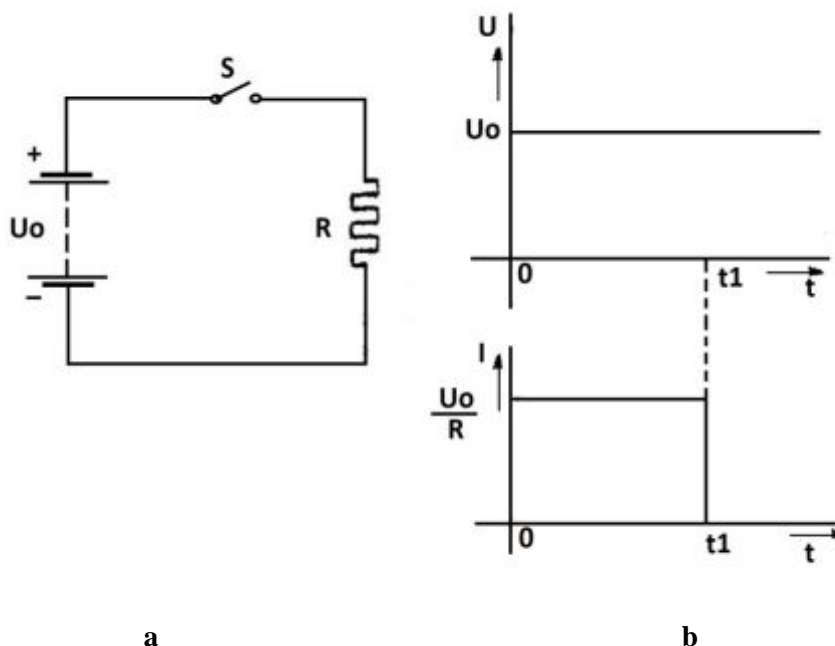


Fig. 6,1. Het inschakelen van een gelijkspanning op een weerstand.

Sluiten we de schakelaar op het tijdstip $t = 0$ dan bereikt de stroom plotseling de waarde $I = \frac{U_0}{R}$ (fig. 6,1b).

De stroom behoudt tot het moment t_1 , waarop de schakelaar weer wordt geopend en de keten weer verbroken wordt. Op dit tijdstip zal de stroom plotseling tot nul afnemen.

R.T.

80 W.T.

Nadruk verboden

6.3. Gelijkspanning aangesloten op een serieschakeling van condensator en weerstand

We sluiten een condensator en een weerstand in serie aan op een gelijkspanning U_0 , terwijl tevens een schakelaar S in de keten is opgenomen (fig. 6,2a). Zolang de schakelaar geopend is, vloeit in de keten geen stroom, dus is over de weerstand geen spanning waar te nemen, indien we uitgaan van de gedachte dat de condensator geen lading bezit. Sluiten we op het tijdstip 0 de schakelaar, dan zal de spanning U_0 een stroom door de keten sturen die een even grote spanning U_0 over de weerstand doet ontstaan. Immers de condensator heeft op tijdstip 0 nog geen lading ontvangen (er is tijd nodig om lading aan de condensator toe te voeren). Op dit tijdstip 0 is er dus nog geen spanning op de condensator. Daar de spanning U_0 werkzaam is, zal deze op dit tijdstip dus geheel over de weerstand komen te staan. De condensator gedraagt zich op dit moment als een kortsluiting. Zodra echter enige stroom vloeit, vloeit een lading door R naar de condensator en laadt de bovenste plaat positief en de onderste plaat negatief op.

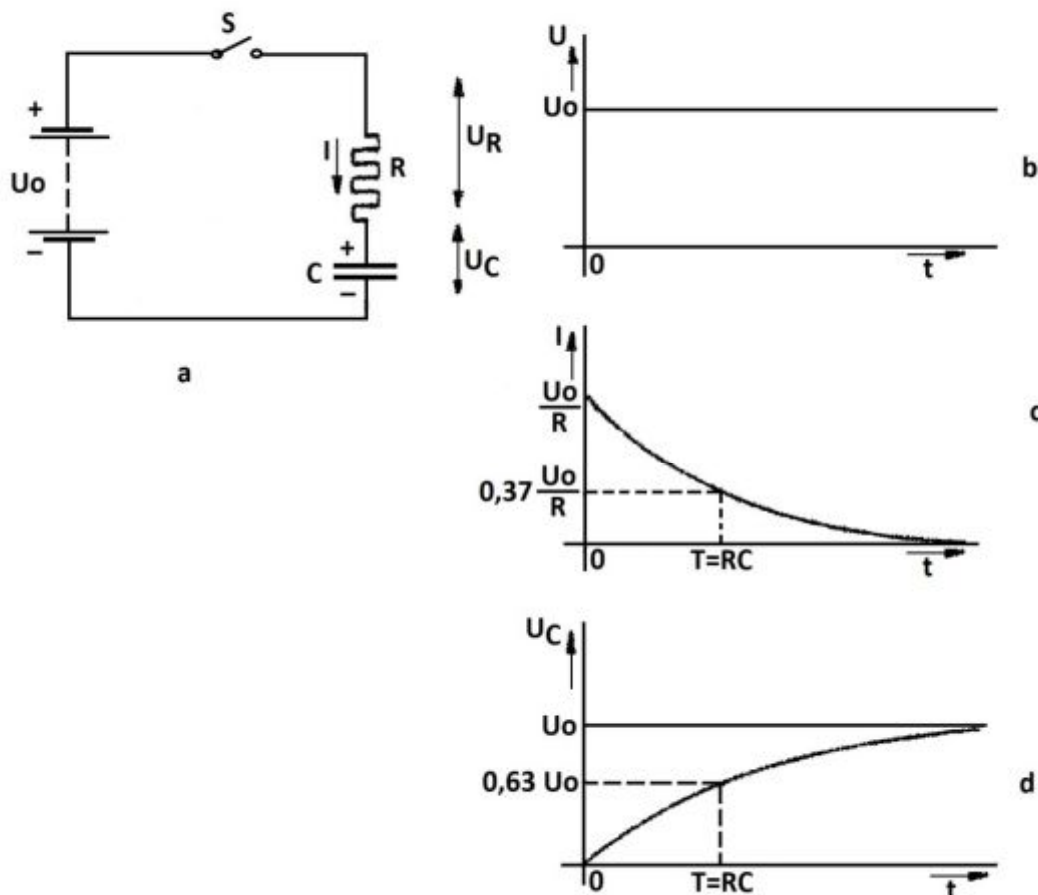


Fig. 6,2. Het inschakelen van een gelijkspanning op serieschakeling van condensator en weerstand.

Ten gevolge hiervan zal tussen de condensatorplaten een spanning U_c ontstaan, daar $U_c = \frac{Q}{C}$, met een polariteit zoals in fig. 6,2a is aangegeven. De spanning over de weerstand is nu kleiner geworden en gelijk aan $U_0 - U_c$, de stroom is dus



bepaald door $I = \frac{U_0 - U_c}{R}$, dus ook kleiner dan op $t = 0$. De stroom laadt de condensator steeds verder op, waardoor de stroom steeds verder afneemt. Daar de stroom I steeds kleiner wordt, zal de condensator langzamer worden opgeladen en neemt U_c langzamer toe. Tenslotte (eigenlijk na oneindig lange tijd) zal $U_c = U_a$ worden en vloeit in de keten geen stroom meer, zoals in fig. 6,2c en d aangegeven.

Een nauwkeurige berekening waarop we hier niet nader ingaan, leert dat de stroom als functie van de tijd voorgesteld kan worden door:

$$I = \frac{U_0}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

en de spanning over de condensator door:

$$U_c = U_0 \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Hierin stelt ε het grondtal van de natuurlijk logaritme voor; $\varepsilon = 2,718$.

Voor het tijdstip $t = 0$, dus het moment waarop de schakelaar juist gesloten wordt, is:

$$\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = \varepsilon^0 = 1. \text{ De stroom is op dat moment dus } I = \frac{U_0}{R} \text{ en de spanning op de}$$

condensator $U_c = 0$. Voor grotere waarden van t neemt $\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$ af, dus wordt de stroom ook kleiner.

Voor zeer grote waarde van t dus zeer lang na het sluiten van de schakelaar wordt $\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$ zeer klein, dus komt de stroomwaarde dicht bij de waarde nul, terwijl de condensatorspanning nog maar weinig van U_c gaat verschillen.

In bovengenoemde uitdrukkingen is R in ohms, C in farads, t in seconden, U in volts en I in ampères uitgedrukt. De snelheid waarmee I afneemt en U_c toeneemt, hangt af van het product RC . Het product RC dat een tijd in seconden aangeeft, wordt de RC-tijd of tijdconstante van de schakeling genoemd. Bedenken we dat de eenheden waarin de capaciteit wordt uitgedrukt, zijn:

$$\text{farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \frac{\text{ampere} \times \text{seconde}}{\text{volt}} \text{ en de eenheden waarin weerstand wordt uitgedrukt:}$$

$$\text{ohm} = \frac{\text{volt}}{\text{ampere}} \times \frac{\text{ampere} \times \text{seconde}}{\text{volt}}, \text{ de "dimensie" van } RC \text{ is seconden.}$$

De tijdconstante duiden we aan door $T = RC$. Stellen we het tijdstip t waarop we de stroom willen beoordelen gelijk aan $t = T = RC$, dan is de stroom in de keten $I = \frac{U_0}{R} \varepsilon^{-1} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\varepsilon}$.

De stroom gemeten na een tijdvak dat gelijk is aan de RC -tijd van de keten, is dus $\frac{1}{\varepsilon}$ maal de aanvangsstroom $\frac{U_0}{R}$. Gedurende de RC -tijd neemt de stroom in de keten dus tot $\frac{1}{\varepsilon}$ maal de maximumwaarde af, dus tot op ongeveer $0,37 \frac{U_0}{R}$.

De spanning op de condensator neemt in de RC -tijd toe van nul tot $U_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$; ongeveer tot $0,63 U_0$.

R.T.

82 W.T.

Nadruk verboden

Het is dus geheel afhankelijk van de tijdconstante of na het inschakelen van de gelijkspanning de stroom meer of minder snel zal dalen en de condensatorspanning meer of minder snel zal toenemen. In fig. 6,3 zijn enkele grafieken van condensatorstroom- en spanning weergegeven bij verschillende waarden van de tijdconstante, waarbij $T_1 > T_2 > T_3$, echter bij gelijke waarde van U_0 . Voor verschillende waarden van de tijdconstante zijn dus ook verschillende waarden van weerstand en/of condensator nodig. Echter om ketens te vormen met gelijke tijdconstante zijn niet beslist gelijke onderdelen nodig. Men kan dezelfde tijdconstante vormen zowel met grote weerstand en kleine condensator als met kleine weerstand en grote condensator, indien het product RC maar hetzelfde is.

verloop als de stroom in de keten, daar op elk tijdstip de spanning over de weerstand evenredig is met de stroom en gelijk is aan $U_R = I \times R = U_0 \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$.

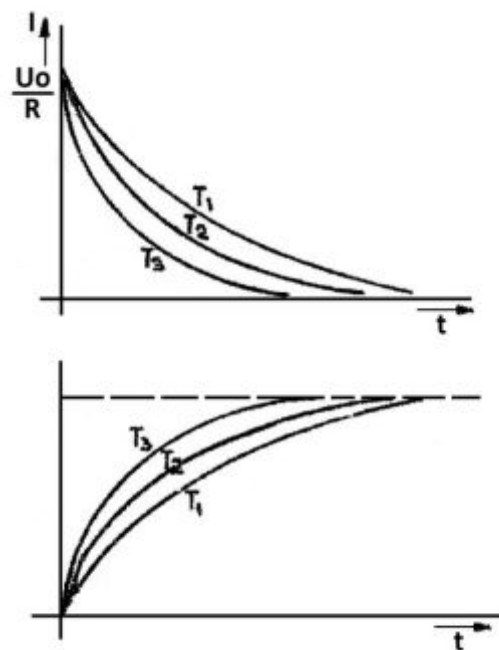


Fig. 6,3. Het verloop van de stroom en de spanning op de condensator bij drie verschillende RC -tijden.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 125 t/m 128.



6.4. Ontlading van een condensator over een weerstand

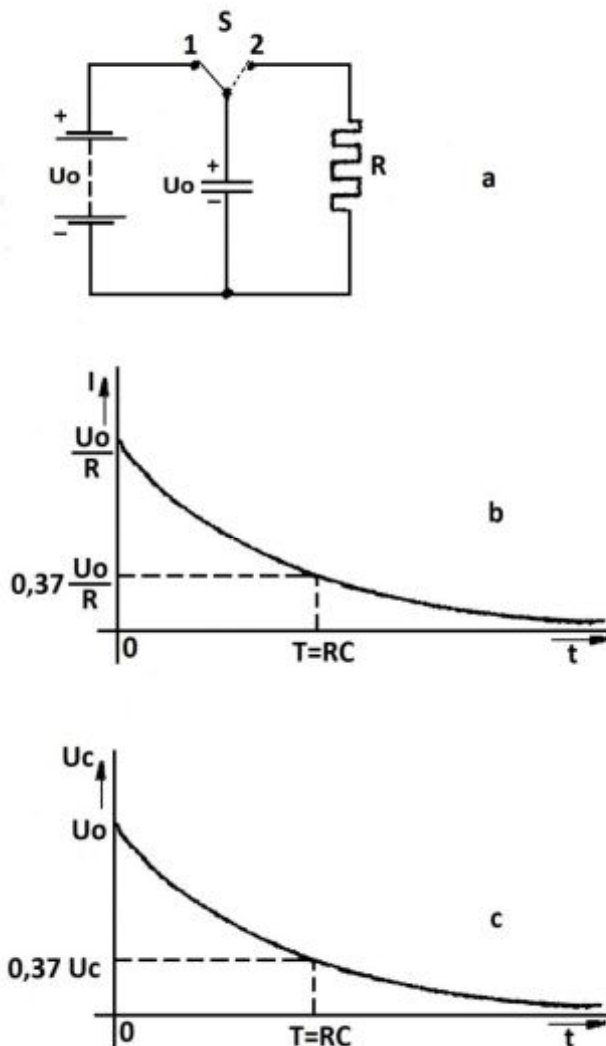


Fig. 6,4. Ontlading van condensator over een weerstand.

laadstroom op dezelfde wijze voorstellen als de laadstroom nl.:

$$I = \frac{U_0}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{zie fig. 6,4b}).$$

De condensatorspanning heeft tijdens ontlading hetzelfde verloop als de stroom.

$$U_c = U_0 \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{zie fig. 6,4c}).$$

Ook de ontlading van de condensator wordt bepaald door de tijdconstante RC . Gedurende de RC -tijd zal ook hier de stroom afnemen tot 0,37 maal de aanvangswaarde $\frac{U_0}{R}$ en de condensator tot 0,37 maal de spanning U_0 . Naarmate de RC -tijd groter is, dus bij keuze van grote weerstand en/of condensator zal de condensator langere tijd nodig hebben zich tot een kleine waarde te ontladen.

We laden een condensator op tot een spanning van U_0 volt. Voor dit opladen hebben we de schakelaar S in stand 1 gezet, zodat de batterij de condensator C oplaadt (fig. 6,4a). De weerstand is in dit geval niet in de keten opgenomen. Nadat de condensator is opgeladen, zetten we de schakelaar om van stand 1 in stand 2. Dit tijdstip geven we aan als tijdstip $t = 0$.

De spanning U_0 waartoe de condensator is opgeladen is nu over de weerstand werkzaam en veroorzaakt een stroom in de keten die gelijk is aan $\frac{U_0}{R}$.

Zodra enige stroom in de keten heeft gevloeid zal de condensatorspanning kleiner zijn geworden. Deze kleinere spanning heeft weer een kleinere stroom in de keten tot gevolg. We zien de condensatorspanning en de stroom geleidelijk kleiner worden.

Aanvankelijk nemen beide snel af om later langzamer in waarde af te nemen. Strikt genomen, zullen zowel de condensatorspanning als de stroom eerst na oneindig lange tijd nul zijn. Praktisch zijn spanning en stroom na zeer korte tijd reeds tot onmeetbare kleine waarde afgenomen. Men kan de ont-

6.5. Serieschakeling van weerstand en zelfinductie aangesloten op een gelijkspanning

Sluit men een weerstand R en een zelfinductie L in serie aan op een gelijkspanning U_0 , dan zal in de keten een stroom gaan vloeien (fig. 6,5a).

Deze stroom kan niet snel in waarde veranderen daar elke stroomverandering een emk van zelfinductie, $U_L = -L \frac{di}{dt}$, in de spoel ten gevolge heeft die de verandering van de stroom tegenwerkt.

Bij plotselinge verandering zou de emk van zelfinductie zeer groot worden. Dit is niet mogelijk, daar deze emk steeds kleiner moet blijven dan de aangelegde spanning. Immers de emk van zelfinductie is gelijk, doch tegengesteld gericht aan de spanning die over de spoel werkzaam is. De stroom verandert dus geleidelijk en begint vanaf de waarde nul aan te groeien (zie fig. 6,5c).

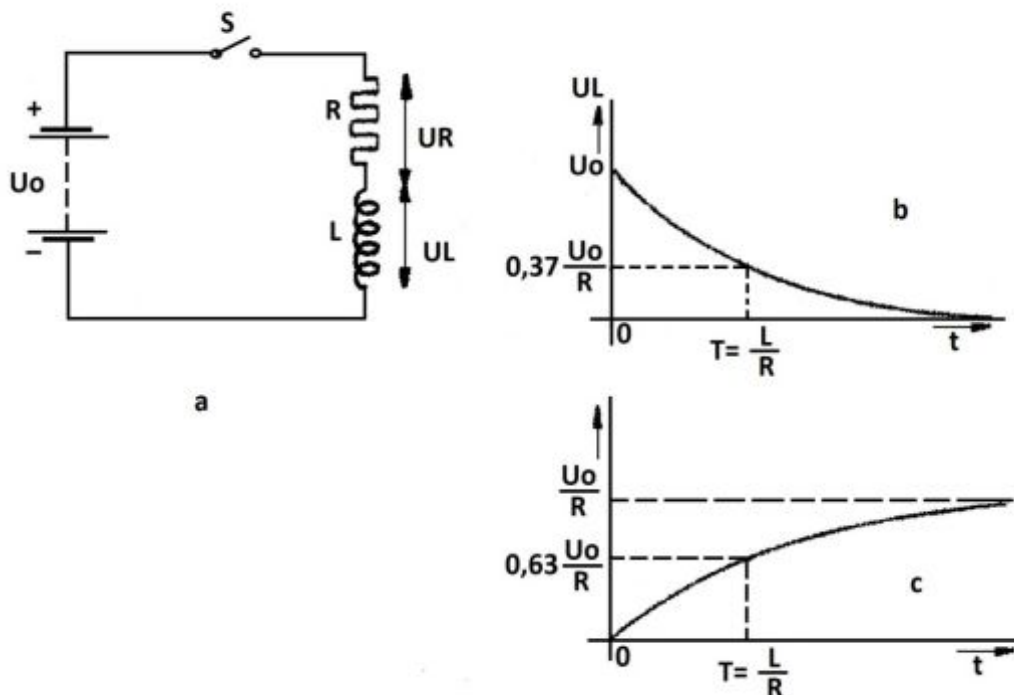


Fig. 6,5. Gelijkspanning aangesloten op serieschakeling van spoel en weerstand.

Op het moment $t = 0$, is ook de stroom nul, dus valt er geen spanning over de weerstand.

De spanning over de zelfinductie is nu dus gelijk aan de aangelegde spanning. Nadat de stroom iets in waarde is aangegroeid zal over de weerstand een spanning vallen. Ten gevolge hiervan is de spanning over de zelfinductie kleiner geworden (zie fig. 6,5b). De hierop volgende stroomtoename zal iets kleiner zijn dan de vorige en dus zal de spanning over de weerstand iets minder snel toenemen dan bij de vorige verandering. Hoe meer de stroom toeneemt, des te groter de spanning over de weerstand en des te kleiner de spanning over de zelfinductie. Dit gaat zo door totdat de stroom de waarde $\frac{U_0}{R}$ bereikt, de spanning over de weerstand U_0 en de spanning over de zelfinductie de waarde nul bereikt. Nauwkeurig geredeneerd, vindt dit plaats na oneindig lange tijd. Praktisch worden bovengenoemde resultaten al na zeer korte tijd waargenomen, daar bv. de stroom dan reeds zo klein is dat deze niet meer kan worden gemeten.



In formulevorm kan de optredende spanning over de zelfinductie worden weergegeven door:

$$U_L = U_0 \varepsilon^{-t \frac{R}{L}}.$$

De formule voor de stroom in de keten is:

$$I = \frac{U_0}{R} \left(1 - \varepsilon^{-t \frac{R}{L}} \right).$$

In deze uitdrukking komt tot uiting dat de waarde van de weerstand en de zelfinductie bepalend zijn voor het al of niet snel afnemen van de spanning U_L en toenemen van de stroom I .

De verhouding $\frac{L}{R} = T$, wordt weer de tijdconstante genoemd. Hiermee gaan bovengenoemde uitdrukkingen over in:

$$U_L = U_0 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \quad \text{en} \quad I = \frac{U_0}{R} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right).$$

Gedurende een tijdvak t gelijk aan de tijdconstante T neemt de spanning U_L af tot:

$$U_0 \varepsilon^{-1} = U_0 \frac{1}{e} = 0,37 U_0 \quad \text{en de stroom neemt toe tot: } I = \frac{U_0}{R} (1 - \varepsilon^{-1}) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0,63 \frac{U_0}{R}.$$

6.6. Ontlading van een condensator over een zelfinductie

Zoals in fig. 6,6 is aangegeven, zal indien de schakelaar in stand 1 staat de condensator door de batterij tot een spanning U_0 worden opgeladen. Zodra de schakelaar in stand 2 gezet wordt, is de spanning waartoe de condensator is opgeladen werkzaam in de keten die gevormd wordt door de serie-schakeling van condensator C en zelfinductie L . De batterijspanning is nu uitgeschakeld.

We veronderstellen bij de volgende beschouwing dat de onderdelen waaruit de gesloten keten is opgebouwd verliesvrij zijn. Zodra de geladen condensator in serie met de zelfinductie wordt geschakeld is de spanning U_0 van de condensator over de zelfinductie werkzaam en zal een stroom in de keten ten gevolge hebben. De stroom kan maar zeer geleidelijk toenemen, daar de emk van zelfinductie deze stroomtoename tegenwerkt. Ten gevolge van de stroom, die in de keten optreedt, zal de condensator zich ontladen en de condensatorspanning dalen. Hieruit volgt, dat de stroom langzamer gaat toenemen, daar de condensatorspanning de oorzaak van de stroom is (fig. 6,6).

De emk van zelfinductie wordt eveneens geleidelijk minder. Hoewel de toename van de stroomsterkte voortdurend kleiner wordt, moeten we wel bedenken dat de waarde van de stroomsterkte steeds groter wordt.

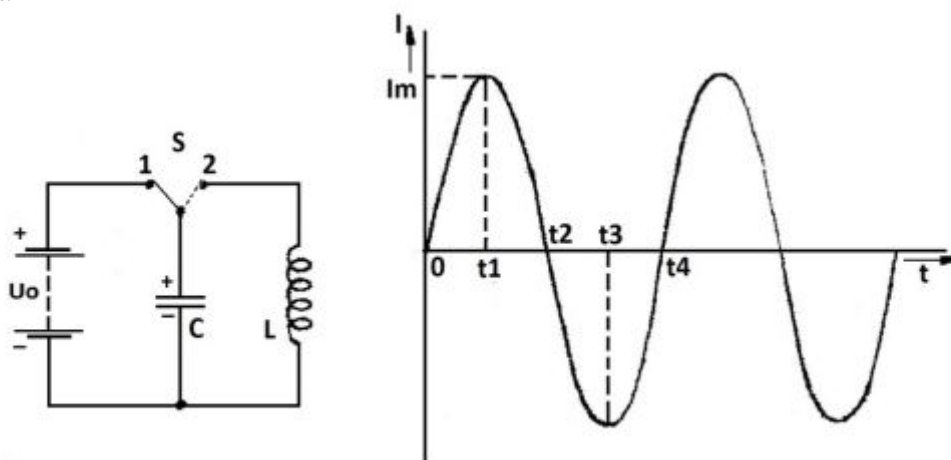


Fig. 6,6. Ontlading van condensator over een zelfinductie.

R.T.

86 W.T.

Nadruk verboden

De stroom neemt nu zolang toe tot de condensator geheel ontladen is. De stroom bereikt de maximumwaarde I_m op het tijdstip t_1 . Op hetzelfde moment zijn de condensatorspanning en de emk van zelfinductie nul. Oppervlakkig gezien zouden we verwachten dat op dit moment de stroom ophoudt te bestaan, daar de condensator ontladen is. Dit zou betekenen dat de stroom met een waarde I_m plotseling af zou moeten nemen tot nul en eveneens het magnetisch veld dat tegelijkertijd in de spoel aanwezig is. Zodra de stroom iets in waarde afneemt, ontstaat in de spoel een emk van zelfinductie die de stroomafname tegenwerkt. Dankzij de emk van zelfinductie neemt de stroom geleidelijk af en zal op het tijdstip t_2 de waarde nul aannemen. Gedurende het tijdvak $t_2 - t_1$ vloeit in de keten een stroom in dezelfde richting als waarmee de condensator zich heeft ontladen. Op t_1 was de condensator ontladen. Alle stroom die na die tijd optreedt, zal dus een extra elektrische lading verplaatsen, zodat de condensator weer wordt opgeladen, echter nu de onderkant positief t.o.v. de bovenkant. Op t_2 is de stroom nul, dus heeft de condensator de maximumlading ontvangen en bezit ook weer de maximumspanning die gelijk is aan U_0 . Om dit laatste in te zien, beschouwen we het volgende.

Op het tijdstip 0 heeft de condensator een energie gelijk aan $\frac{1}{2} C U_0^2$ joule. Op het tijdstip t_1 heeft de condensator geen energie meer en bevindt alle energie zich in het magnetisch veld van de zelfinductie en is dan gelijk aan $\frac{1}{2} L I_m^2$. Daar de keten verliesvrij werd verondersteld is dus $\frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$. Op het tijdstip t_2 is de energie in het magnetisch veld nul ($I = 0$) dus bevindt zich alle energie weer in de condensator in de vorm van $\frac{1}{2} C U_0^2$. Deze energie is weer even groot als waarmee de condensator op tijdstip 0 was geladen, dus ook de spanning moet hetzelfde zijn. Op het tijdstip t_2 is weer dezelfde toestand in de kring aanwezig als op tijdstip 0, echter tegengesteld van richting. Nu volgt van tijdstip t_2 tot t_3 weer een ontlading van de condensator en toename van de stroom tot $-I_m$ en van t_3 tot t_4 een oplading van de condensator tot U_0 en afname van de stroom tot nul. Op tijdstip t_4 is dus weer volkomen dezelfde toestand in de keten als op het moment 0. Hierna vindt dus weer hetzelfde plaats als we beredeneerd hebben voor het tijdstip 0 - t_4 en blijft zich periodiek herhalen, daar steeds dezelfde energie in de keten aanwezig blijft.

In de keten ontwikkelt zich een wisselstroom. Aangetoond kan worden dat dit een zuivere sinusvormige wisselstroom is en dus voorgesteld kan worden door $I = \hat{I}_m \sin \omega_0 t$.

De frequentie van de wisselstroom is te berekenen uit $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ of $f_e = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. We zien dat de frequentie van deze wisselstroom, de eigenfrequentie van de kring genoemd, gelijk is aan de faseresonantiefrequentie van een serieschakeling van L , C en R , die we in het voorgaande reeds hebben besproken. In de kring ontstaat nu een zogenaamde vrije trilling; een trilling die door de kring geproduceerd wordt. Daar deze trilling een constante amplitude heeft spreekt men ook wel van ongedempte vrije trilling.

De amplitude van de stroom die zich in de kring ontwikkelt, is te berekenen uit:

$$\frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \quad \text{en wel is:} \quad I_m = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 129 t/m 132.

6.7. Ontlading van een condensator over een serieschakeling van weerstand en zelfinductie

De condensator in fig. 6,7 denken we door middel van de batterij weer opgeladen tot de spanning U_0 . Nu de condensator met behulp van de schakelaar weer in serie is geschakeld met een weerstand R en zelfinductie L zal de condensator zich beginnen te ontladen. De wijze waarop deze ontlading plaats vindt, kan geheel verschillend zijn en hangt af van de waarden van L , C en R . We veronderstellen allereerst dat de weerstand R een kleine waarde heeft.

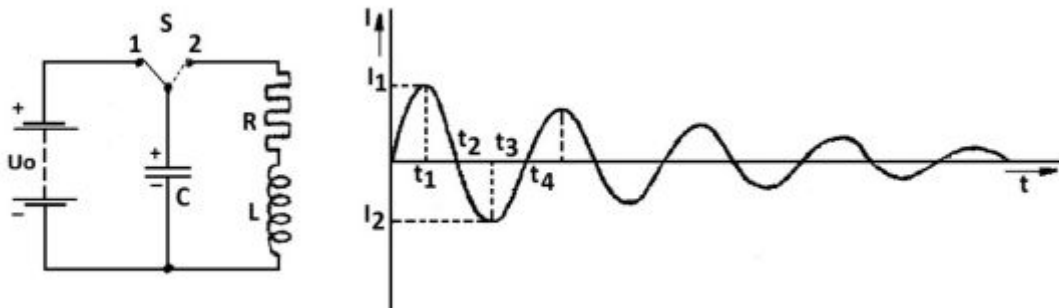


Fig. 6,7. Ontlading van condensator over serieschakeling van zelfinductie en weerstand.

Gedurende het tijdvak van 0 tot t_1 zal de condensator zich ontladen en de stroom aangroeien tot de waarde I_1 . Gedurende dit tijdvak vloeit de stroom ook door de weerstand R en heeft daar warmteontwikkeling ten gevolge. Op het tijdstip t_1 bevat de condensator geen energie meer, echter het magnetisch veld van de spoel bevat een energie $\frac{1}{2} L I_1^2$. Deze energie is minder dan de $\frac{1}{2} C U_0^2$ waarmee de condensator op $t = 0$ was opgeladen, daar het tijdvak $0 - t_1$ energie in de weerstand in warmte is omgezet. Gedurende het tijdvak $t_1 - t_2$ wordt de condensator weer opgeladen en bezit op het tijdstip t_2 een energie gelijk aan $\frac{1}{2} C U_2^2$. In het magnetisch veld is dan geen energie aanwezig.

Deze energie $\frac{1}{2} C U_2^2$ is ten gevolge van het energieverlies in de weerstand kleiner dan $\frac{1}{2} C U_0^2$. Daar aan de capaciteitswaarde niet is gewijzigd moet op het tijdstip t_2 de spanning U_2 op de condensator kleiner zijn dan U_0 . De ontlading gedurende het tijdvak $t_2 - t_3$ zal dus met kleinere stroomwaarden gaan dan de eerste ontlading.

Tijdens het tijdvak $t_3 - t_4$ volgt weer een oplading van de condensator, tegelijkertijd gepaard gaande met verder optredend energieverlies in de weerstand. Op t_4 is de spanning op de condensator dus weer kleiner dan op t_2 , enz.

We zien dat de amplitude van de stroom geleidelijk vermindert, totdat alle energie die op tijdstip 0 aan de condensator werd toegevoerd in de weerstand is verbruikt. Daarna is geen trilling meer mogelijk. Nauwkeurige berekeningen tonen aan dat eerst na oneindig lange tijd de trilling tot nul zal afnemen.

Op deze wijze ontstaat een gedempte vrije trilling. Bij praktische uitvoeringen zal onder nader te bepalen voorwaarden alleen een gedempte vrije trilling mogelijk zijn, daar de onderdelen en verbindingdraden altijd energieverlies ten gevolge hebben. Deze verliezen hebben wij in het bovenstaande

R.T.

88 W.T.

Nadruk verboden

vertegenwoordigd door de weerstand R , die verondersteld wordt evenveel energieverlies ten gevolge te hebben als in werkelijkheid in spoel, condensator en verbindingen alsmede door straling worden veroorzaakt.

Te bewijzen is, dat de wisselstroom die in een gedempte vrije trillingskring ontstaat, voldoet aan de uitdrukking:

$$I = \hat{I}_m \sin \omega_0 t \cdot \varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Hierin is \hat{I}_m de amplitude van de stroom die deze zou verkrijgen indien geen energieverliezen

optreden, dus: $\hat{I}_m = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$.

De term $\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}$ geeft aan in welk tempo de amplitude van de trilling afneemt, de amplitudeafname is dus afhankelijk van $\frac{R}{2L}$. De gegeven uitdrukking stelt ons in staat de stroomwaarde op elk willekeurig moment uit te rekenen.

6.8. Dempingsverhouding en logaritmisches decrement

Om de verhouding te bepalen die tussen twee opvolgende amplituden van de gedempte trilling optreedt, hebben we deze nogmaals in fig. 6,8 weergegeven.

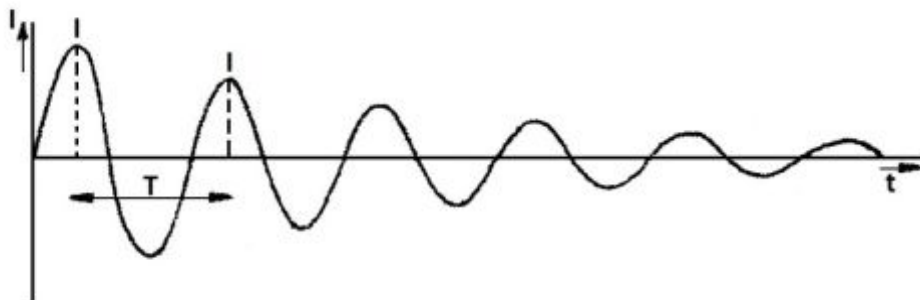


Fig. 6,8. Gedempte vrije trilling.

De amplitude I_1 treedt op nadat de trilling een hoek $\frac{\pi}{2}$ of 90° heeft doorlopen, dat wil zeggen:

$$\omega_0 t = \frac{\pi}{2}.$$

Daar $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wordt de amplitude dus:

$$I_1 = \hat{I}_m \cdot \varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}.$$

De volgende amplitude I_2 wordt verkregen een periode of 2π later dan de amplitude I_1 .

Het tijdvak tussen I_1 en I_2 is dus gelijk aan trillingstijd T van de trilling. Het tijdstip waarop I_2 wordt gevormd is dus $t + T$ en de bijbehorende hoek is dan $\frac{\pi}{2} + 2\pi = 2\frac{1}{2}\pi$. De sinus van $2\frac{1}{2}\pi = 1$, dus

deze amplitude is:

$$I_2 = \hat{I}_m \varepsilon^{-\frac{R}{2L}(t+T)}$$

De verhouding tussen I_1 en I_2 is nu:



$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\hat{I}_m \varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}}{\hat{I}_m \varepsilon^{-\frac{R}{2L}(t+T)}} = \frac{\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}}{\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t} \varepsilon^{-\frac{R}{2L}T}} = \frac{1}{\varepsilon^{-\frac{R}{2L}T}} = \varepsilon^{\frac{R}{2L}T}.$$

De verhouding $\frac{I_1}{I_2} = \varepsilon^{\frac{R}{2L}T}$ wordt de dempingsverhouding genoemd.

De dempingsverhouding is dus alleen afhankelijk van de exponent $\frac{R}{2L}T$, daar ε een constante is.

Deze exponent noemt men nu het logaritmisch decrement en deze wordt veelal gebruikt om de kringen te beoordelen.

Het logaritmisch decrement is dus:

$$d = \frac{R}{2L}T.$$

De trillingstijd T mogen we vervangen door $\frac{1}{f_e}$, dus $d = \frac{R}{2f_e L}$. Na teller en noemer vermenigvuldigd te hebben met π , verkrijgen we:

$$d = \frac{\pi R}{2\pi f_e L} = \frac{\pi R}{\omega_e L}.$$

Voor kringen met zeer kleine verliezen mogen we ω_e gelijkstellen aan de resonantiefrequentie ω_0 dus wordt:

$$d = \frac{\pi R}{\omega_0 L} = \frac{\pi}{\frac{\omega_0 L}{R}} = \frac{\pi}{Q}.$$

Eigen frequentie van een trillingskring

De frequentie van een vrije gedempte trilling is bepaald door:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

(Deze uitdrukking niet verwarren met de faseresonantiefrequentie van een parallelschakeling van C met L en R .)

De eigen frequentie van een kring is constant, d.w.z. ongeacht de waarde van de amplitude is de afstand der nuldoorgangen steeds dezelfde.

Bij nadere beschouwing van bovengenoemde formule blijkt dat zich drie gevallen kunnen voordoen en wel:

$$1^e. \quad \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}.$$

De waarde van de vorm onder het wortelteken is nu positief, dus zal de eigenfrequentie een bepaalde waarde hebben. In de keten ontstaat nu een gedempte vrije trilling, zoals dit in het bovenstaande is behandeld. Wensen we de waarde van R te bepalen opdat een vrije trilling mogelijk is, dan verkrijgen we:

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \quad \text{of} \quad R^2 < \frac{4L^2}{LC} \quad \text{en} \quad R < \sqrt{\frac{4L}{C}}.$$

$$2^e. \quad \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}.$$

In dit geval is de vorm onder het wortelteken gelijk nul, dus ook is de eigenfrequentie nul. De keten kan dus geen vrije trilling voortbrengen en wordt kritisch gedempt genoemd.

$$3^e. \quad \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}.$$

De tweeterm onder het wortelteken verkrijgt nu een negatieve waarde, zodat de wortelvorm en dus ook de eigenfrequentie een onbestaanbare of imaginaire waarde heeft. Ook in dit geval is dus een trilling in de keten uitgesloten. De keten is nu meer dan kritisch gedempt. In die gevallen dat geen trilling in de keten mogelijk is, spreekt men ook wel van aperiodische ketens.

R.T.

90 W.T.

Nadruk verboden

6.9. Aperiodische ketens

Is $\frac{1}{LC} \leq \frac{R^2}{4L^2}$ dan zal de condensator zich niet door middel van een trilling ontladen, maar op een wijze die veel overeenkomst vertoont met de ontlading over een weerstand (fig. 6,9).

De stroom neemt nu geleidelijk van nul af toe. Plotselinge stroomveranderingen zouden een oneindig grote emk van zelfinductie ten gevolge hebben. De stroom bereikt een maximum om daarna langzaam af te nemen tot nul.

Bij bepaalde waarden van L en C zal de condensator zich langzamer ontladen naarmate de weerstand R groter is.

Om een kring aperiodisch te maken is het dus nodig de weerstand (verliezen) in de kring zo te maken dat $R \geq \frac{4L}{C}$.

Ook is het mogelijk bij een bepaalde waarde van de weerstand de verhouding van de zelfinductie tot de capaciteit te wijzigen, opdat de keten aperiodisch wordt.

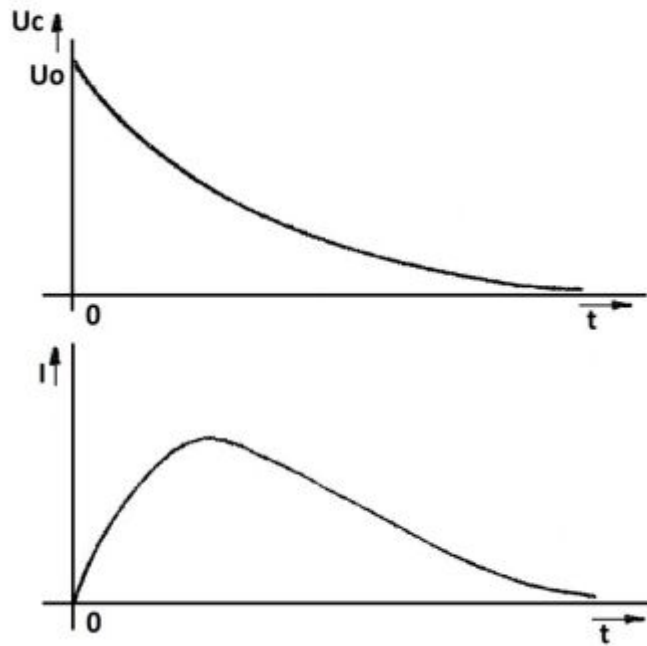


Fig. 6,9. Ontlading in een aperiodische keten.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 133 t/m 136.

Hoofdstuk 7

7.1. Complexe getallen

In de wiskunde hebben we reeds kennis gemaakt met de imaginaire en complexe getallen. We hebben gezien dat de reële grootheden werden uitgezet op de horizontale as en de imaginaire grootheden op de verticale as van het assenstelsel dat in het complexe vlak voorkomt.

De eenheid van de imaginaire getallen wordt in de wiskunde aangeduid met de letter i . Daar de letter i in de technische vakken reeds wordt gebruikt voor de aanduiding van de stroom, zullen we voor aanduiding van de imaginaire eenheid de letter j gebruiken.

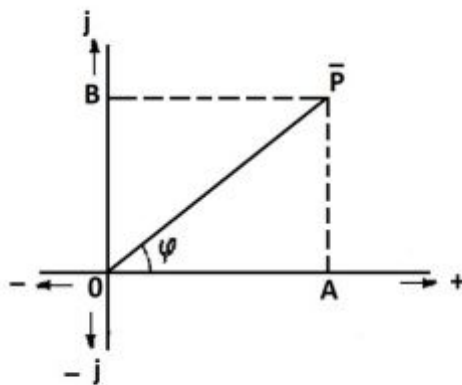


Fig. 7,1. Het complexe getal $\bar{P} = a + jb$.

een invloed hebben, die 90° verschoven zijn met de invloed van de grootheden die op de reële as zijn uitgezet.

In het complexe vlak komt het onderscheid tussen reële en imaginaire grootheden dus tot uiting door de hoek van 90° die tussen beide soorten getallen voorkomt.

In de complexe grootheden wordt de hoek van 90° aangeduid door de letter j . De resulterende invloed van de getallenwaarde a en b , het complexe getal \bar{P} dus, kunnen we vinden door uit A een lijn loodrecht op de horizontale as en uit B een lijn evenwijdig met de horizontale as te tekenen. Het snijpunt van deze twee lijnen geeft het complexe getal \bar{P} aan. De afstand OA stelt het aantal reële eenheden voor dat a groot is: evenzo stelt OB het aantal imaginaire eenheden voor dat b groot is.

De afstand OP stelt nu het aantal eenheden voor dat deze complexe waarde $a + jb$ groot is. Het aantal eenheden, dat OP groot is, wordt de absolute waarde van het complexe getal \bar{P} genoemd. Uit figuur 7,1 blijkt duidelijk dat we de grootte van OP kunnen bepalen met behulp van de stelling van Pythagoras. OAP vormt een rechthoekige driehoek, waarin OP de hypotenusa is. De absolute waarde OP is dus te berekenen uit:

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (AP \text{ is gelijk aan } b).$$

De absolute waarde van een complex getal is bepaald door de wortel uit de som van de kwadraten van het reële deel en het imaginaire deel.

Hebben we het complexe getal $P = a + jb$, dan wordt $a = OA$ op het rechte gedeelte (positieve deel) der horizontale as uitgezet (fig. 7,1) en $b = OB$ op het bovenste gedeelte (positieve deel) der verticale as. Volgens de normale rotatierichting (tegen de bewegingsrichting van de wijzers van een uurwerk) kunnen we ook zeggen, dat het getal b een hoek van 90° voorrijlt op het getal a .

Deze voorstelling kunnen we ook gebruiken om aan te duiden dat de invloed van b op de totale waarde \bar{P} , 90° verschoven is ten opzichte van de invloed van a op de totale waarde. De opvatting, die inhoudt, dat b een onbestaanbaar iets zou voorstellen, laten we hier dus los en we gebruiken de imaginaire as slechts om die grootheden aan te duiden die

R.T.

92 W.T.

Nadruk verboden

De absolute waarde van een getal zegt alleen iets betreffende de afstand van het complexe getal \bar{P} tot de oorsprong van het assenstelsel. Er zijn heel veel verschillende complexe getallen, die gelijke absolute waarde hebben.

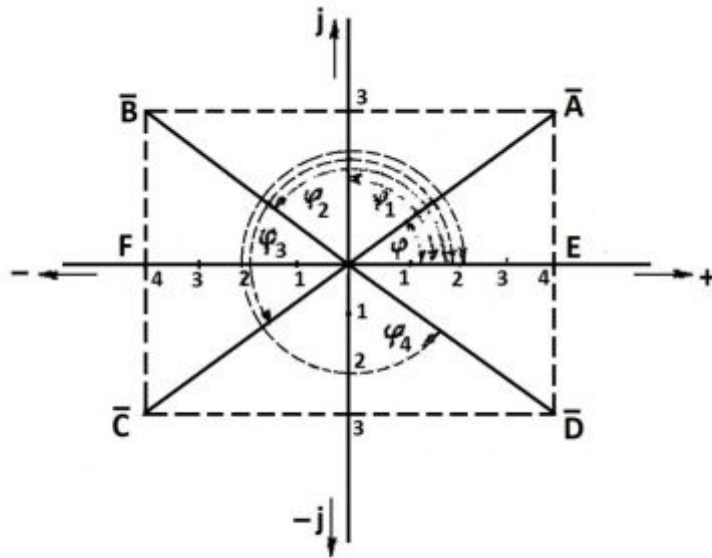


Fig. 7,2. Enkele complexe getallen met dezelfde absolute waarde.

Een eenvoudig voorbeeld leveren de complexe getallen:

$$\bar{A} = 4 + j3, \bar{B} = -4 + j3,$$

$$\bar{C} = -4 - j3 \text{ en } \bar{D} = +4 - j3.$$

Het verschil in deze complexe getallen komt in fig. 7,2 tot uiting.

We zien, dat de getallen \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} en \bar{D} geheel verschillende getallen voorstellen. Achtereenvolgens zijn ze gelegen in het 1^e, 2^e, 3^e en 4^e kwadrant.

Bepalen we de absolute waarde van de gegeven getallen, dan vinden we voor alle getallen

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Voor \bar{A} gebruiken we driehoek OEA ; voor \bar{B} driehoek OFB , voor \bar{C} driehoek OFC en voor \bar{D} driehoek OED .

Alleen de absolute waarde van een complex getal is niet voldoende voor het vastleggen van dat getal; de plaats hiervan is niet bepaald. Wel is het getal volledig bepaald als ook de hoek φ gegeven is. De hoek φ (het argument van het complexe getal) wordt gevormd door de lijn die de absolute waarde voorstelt en het rechter gedeelte van de horizontale as.

De grootte van hoek φ kunnen we bepalen uit tangens φ . in fig. 7,1 is $\tan \varphi = \frac{AP}{AO}$.

In woorden: De tangens van het argument van een complex getal is bepaald door het quotiënt: het imaginaire deel gedeeld door het reële deel.

Van het getal \bar{A} in fig. 7,2 is $\tan \varphi = \frac{3}{4}$, voor \bar{B} is $\tan \varphi_2 = -\frac{3}{4}$, voor \bar{C} is $\tan \varphi_3 = \frac{3}{4}$ en voor \bar{D} is $\tan \varphi_4 = -\frac{3}{4}$. Hoewel de getallen \bar{B} en \bar{D} dezelfde waarde van $\tan \varphi$ hebben, kunnen deze toch worden onderscheiden daar aan de tekens van het reële en imaginaire deel te zien is in welk kwadrant het getal zich bevindt. Hetzelfde geldt voor de getallen \bar{A} en \bar{C} .

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 137 t/m 143.

7.2. Toepassing van complexe getallen in de wisselstroomtheorie

In het voorgaande van de wisselstroomtheorie hebben we kennis gemaakt met de impedantie van verschillende ketens.

Bezien we nog eens de serieschakeling van spoel, condensator en weerstand. Tekenend we hiervan het vectordiagram voor de weerstand en reactanties, dan verkrijgen we fig. 7,3. De vector, die ωL voorstelt, ijlt 90° voor op de vector R en die van $\frac{1}{\omega C}$ 90° na op de vector R .

Denken we deze vectoren nu getekend in het complexe vlak, dan komen ωL en $\frac{1}{\omega C}$ op de imaginaire- en R op de reële as ts liggen (zie fig. 7,4).

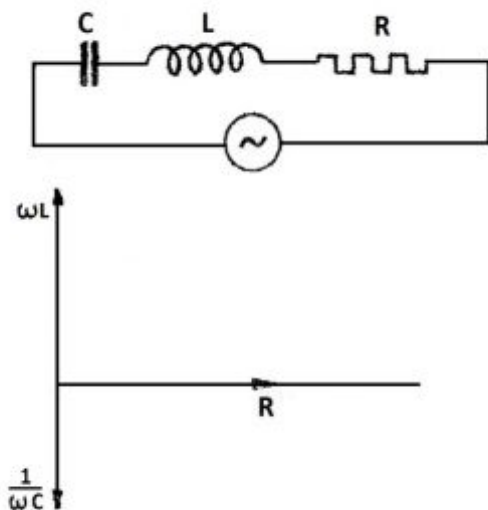


Fig. 7,3. Vectordiagram van serieschakeling van L , C en R .

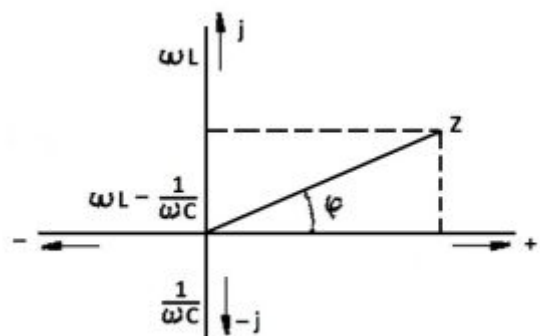


Fig. 7,4. Complexe impedantie.

Dat de invloed van de spoel 90° voorijlt op die van de weerstand en $-j$ voor $\frac{1}{\omega C}$ duidt dus aan dat de invloed van de condensator 90° na-ijlt op die van de weerstand of tegengesteld is met die van de spoel. Deze voorstelling van de reactanties maakt de behandeling van wisselstroomketens veel eenvoudiger. Indien we een serieschakeling van spoel, condensator en weerstand bekijken, dan kunnen we zonder daarbij een vectordiagram te tekenen, direct de complexe vorm voor de impedantie noteren. We kunnen de schakeling opvatten alsof er drie “weerstand” zijn serieschakeld en tellen deze dus zonder meer bij elkaar op. We moeten echter de reactantie van de spoel aanduiden met $j\omega L$ en die van de condensator met $\frac{-j}{\omega C}$. Immers de factor j geeft rekenschap van de hoek van 90° die in rekening moet worden gebracht.

In het vectordiagram (fig. 7,4) vinden we voor de complexe waarde van de impedantie het punt \bar{Z} , door eerst $\frac{1}{\omega C}$ in mindering te nemen van ωL . De imaginaire waarde $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ geeft op de bekende wijze gecombineerd met R de impedantie $\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

De absolute waarde van deze impedantie vinden we door de wortel uit de som der kwadraten van reëel en imaginair gedeelte te nemen. Dus $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. Het argument van deze impedantie is bepaald door $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. (Het imaginaire deel gedeeld door het reële deel van de complexe impedantie.) Passen we de complexe rekenwijze toe op de schakeling volgens fig. 7,5, dan verkrijgen we het volgende. De impedantie van gegeven schakeling is bepaald door het product van de weerstand R en de “weerstand” $j\omega L$ van de spoel, dus: $Z = \frac{j\omega L \times R}{j\omega L + R} = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$. Om de absolute waarde van deze impedantie vast te leggen, vermenigvuldigen we teller en noemer met $-j$. Dit geeft: $\bar{Z} = \frac{\omega LR}{\omega L - jR}$. De absolute waarde van deze impedantie krijgen we door de noemer van deze vorm absoluut te maken, dus:

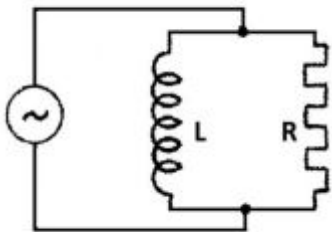


Fig. 7,5. Parallelschakeling van L en R .

$$Z = \frac{\omega LR}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Om de tangens van het argument te bepalen, zullen we de vorm $\frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$ nog even verder bewerken. Het splitsen van deze vorm in een reëel deel en een imaginair deel wordt mogelijk, indien we eerst teller en noemer met de toegevoegde tweeterm van de noemer vermenigvuldigen. De toegevoegde complexe tweeterm is $-j\omega L + R$. Nu wordt:

$$\bar{Z} = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R} \times \frac{-j\omega L + R}{-j\omega L + R} = \frac{\omega^2 L^2 R + j\omega LR^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \dots \dots \dots (2)$$

Het argument van deze impedantie is nu bepaald door:

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\omega LR^2}{\omega^2 L^2 + R^2}}{\frac{\omega^2 L^2 R}{\omega^2 L^2 + R^2}} = \frac{R}{\omega L}$$

Het is natuurlijk ook mogelijk de absolute waarde van de impedantie te bepalen uit uitdrukking (2).

$$Z = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LR^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)^2}$$

Na enige herleiding is deze vorm weer op te werken in de gedaante volgens (1).

$$Z = \sqrt{\frac{\omega^4 L^4 R^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2} + \frac{\omega^2 L^2 R^4}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}} = \sqrt{\frac{\omega^4 L^4 R^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 R^2 (\omega^2 L^2 + R^2)}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 R^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)}} = \frac{\omega LR}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

Voorbeeld:

Bepaal de beide onderdelen, die seriegeschakeld de gegeven schakeling kunnen vervangen:
 $L = 2500 \mu H$; $C = 500 pF$; $R = 2000 \Omega$; $\omega = 10^6$. Zie fig. 7,6.

Oplossing:

De impedantie is: $\bar{Z} = j\omega L + \frac{-j}{R - \frac{j}{\omega C}} \times R$. De teller en noemer van de breuk vermenigvuldigd met $j\omega C$ geeft: $\bar{Z} = j\omega L + \frac{R}{jR\omega C + 1}$. Met getallen wordt dit:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-4} + \frac{2 \cdot 10^3}{j2 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10} + 1} = \\ &= j25 \cdot 10^2 + \frac{2 \cdot 10^3}{j+1} = j25 \cdot 10^2 + \frac{2 \cdot 10^3 (-j+1)}{(j+1)(-j+1)} = \\ &= j25 \cdot 10^2 + \frac{-j2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3}{2} = j25 \cdot 10^2 - j10^3 + 10^3 = j1500 + 10^3. \end{aligned}$$

Hiermee hebben we de impedantie voorgesteld door een weerstand van $10^3 \Omega$ (het reële deel) met een reactantie van een zelfinductie (het imaginaire deel, dat hier positief is) van 1500Ω in serie geschakeld. Was het imaginaire deel negatief, dan stelde dit een capacatieve reactantie voor.

De zelfinductie L_v is nu te berekenen uit:

$$\omega L_v = 1500$$

$$L_v = \frac{1500}{10^6} = 1500 \mu H.$$

Op deze wijze kunnen we elke impedantie vervangen door een equivalente serieschakeling. De complexe uitdrukking van elke impedantie is terug te brengen tot een tweeterm die een imaginair en een reël deel bevat.

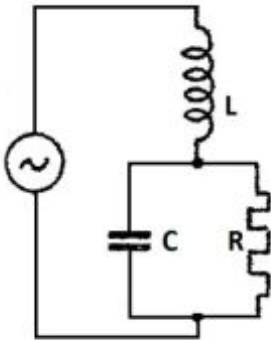


Fig. 7,6. Vervanging door equivalente serieschakeling.

Voorbeeld: Bepaal de absolute waarde en $\tan \varphi$ van de schakeling volgens fig. 7,7.

Oplossing: in deze schakeling is dus de reactantie $j\omega L$ seriegeschakeld met de parallelkring van R en $\frac{-j}{\omega C}$.

De impedantie van de parallelschakeling is weer het product gedeeld door de som van beide delen, dus

$\frac{\frac{-j}{\omega C} \times R}{\frac{-j}{\omega C} + R}$. De totale impedantie wordt nu:

$$\bar{Z} = j\omega L + \frac{\frac{-jR}{\omega C}}{\frac{-j}{\omega C} + R}$$

van de breuk met $j\omega C$ te vermenigvuldigen wordt deze eenvoudiger.

$$\bar{Z} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR}$$

Om de gehele impedantie te kunnen splitsen in een reël deel en imaginair deel moeten we de splitsing van de breuk mogelijk maken door eerst teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde complexe tweeterm $(1 - j\omega CR)$ van de noemer.

$$\bar{Z} = j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR} \times \frac{1-j\omega CR}{1-j\omega CR} =$$

$$= j\omega L + \frac{R-j\omega CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}. \bar{Z} = j \left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} \right) + \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2}.$$

Komt uit het imaginaire deel een positief antwoord, dan is dit voor te stellen als een zelfinductie; bij negatieve waarde van het imaginaire deel stelt dit een capaciteit voor. De schakeling is dus vereenvoudigd tot een serieschakeling van spoel met weerstand of serieschakeling van condensator met

weerstand. De absolute waarde is nu: $\bar{Z} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} \right)^2 + \left(\frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} \right)^2}$.

$$\text{en } \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{\omega CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}}{\frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2}}.$$

R.T.

96 W.T.

Nadruk verboden

Voorbeeld: Bepaal de impedantie en $\tan \varphi$ van de schakeling volgens fig. 7,8, als gegeven is: $\omega = 10^6$, $L = 300 \mu H$, $C = 2000 pF$, $R = 100 \Omega$.

Oplossing:

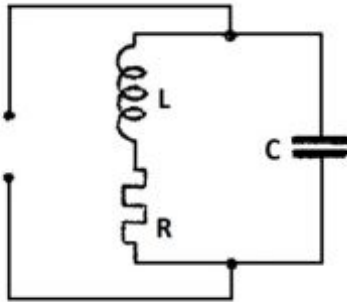


Fig. 7,8. Bepaling impedantie en $\tan \varphi$.

De schakeling volgens 7,8 bestaat uit de parallelschakeling van de impedantie $R + j\omega L$ met de reactantie $\frac{-j}{\omega C}$ de impedantie wordt:

$$\bar{Z} = \frac{\frac{-j}{\omega C}(R+j\omega L)}{R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}}$$

In deze uitdrukking vullen we eerst de gegeven getallenwaarden in.

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{\frac{-j}{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}(10^2 + j10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4})}{10^2 + j10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} - \frac{j}{\omega C}} = \\ &= \frac{-j5 \cdot 10^2(10^2 + j3 \cdot 10^2)}{10^2 - j2 \cdot 10^2} = \\ &= \frac{-j5 \cdot 10^2(10^2 + j3 \cdot 10^2)}{10^2 - j2 \cdot 10^2} = \frac{-j5 \cdot 10^2(1+j3)}{1-j2} \end{aligned}$$

Teller en noemer van deze breuk vermenigvuldigd met de toegevoegde tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{Z} = \frac{(-j500 + 15 \cdot 10^2)}{1-j2} \times \frac{1+j2}{1+j2} = \frac{-j500 + 15 \cdot 10^2 + 10^3 + j3 \cdot 10^3}{1+4} = \frac{j25 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10^2}{5} = j500 + 500.$$

Hiermee hebben we de schakeling vereenvoudigd tot een serieschakeling van een spoel met reactantie $j500$ en een weerstand van 500Ω . De absolute waarde van de impedantie is:

$$\bar{Z} = \sqrt{500^2 + 500^2} = 500\sqrt{2} = 705 \quad \text{en} \quad \tan \varphi = \frac{500}{500} = 1.$$

Hieruit volgt dat de schakeling zich gedraagt als een weerstand met een zelfinductie in serie, dus zich inductief gedraagt, want $\tan \varphi$ is positief.

Voorbeeld: Van een complex getal $\bar{Z} = x - 25 + j(30 - y)$ is gegeven dat de absolute waarde gelijk nul is. Bepaal de waarde van x en y .

Oplossing: Daar de absolute waarde van \bar{Z} gelijk nul moet zijn, ligt dit getal dus in de oorsprong van het assenstelsel. Immers, zodra het buiten de oorsprong van het assenstelsel ligt, moet het een waarde voorstellen die niet gelijk nul is. Dit betekent dat van de gegeven complexe uitdrukking het reële-zowel als het imaginaire deel nul moet zijn, dus:

$$x - 25 = 0 \quad \text{en} \quad 30 - y = 0. \quad \text{Hieruit volgt, dat: } x = 25 \quad \text{en} \quad y = 30.$$

Voorbeeld: bepaal de waarde van de weerstand van een impedantie. $\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ als de absolute waarde van de impedantie gelijk moet zijn aan $R\sqrt{2}$.

Hoe groot is dan het argument? De waarden van ω , L en C mogen als bekend worden verondersteld.

Oplossing: De absolute waarde van de gegeven impedantie is $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Gegeven is dus: $Z = R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. Na kwadratering wordt dit:

$$2R^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad \text{of:} \quad R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad \text{en} \quad R = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

De tangens van het argument van de gegeven impedantie is $\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. We hebben gevonden dat $R = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, dus $\tan \varphi = 1$.

De hoek waarvan de tangens 1 is, is een hoek van 45° .

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 144 t/m 148.



Wisselstroomtheorie. Les 31

7.3. Berekening stromen en spanningen

In het voorgaande hebben we ons bezig gehouden met de bepaling van de impedantie en $\tan \varphi$ van enkele wisselstroomketens.

Het is natuurlijk ook mogelijk op deze wijze de stromen en spanningen, die zich in een schakeling voordoen, te bepalen.

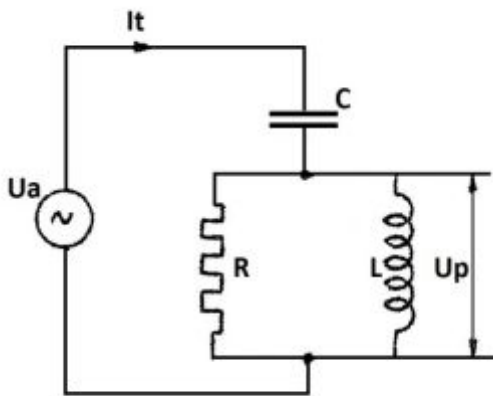


Fig. 7,9. Bepaling stromen en spanningen.

Voor de bepaling van de stroom I_t is in fig. 7,9 leggen we eerst de complexe waarde van de impedantie vast en delen dan de aangelegde spanning door deze impedantie. We vinden dan de complexe uitdrukking voor de stroom I_t .

$$\bar{Z} = \frac{-j}{\omega C} + \frac{j\omega L \times R}{R + j\omega L} = \frac{-j}{\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$$

De stroom I_t is te berekenen uit:

$$\bar{I}_t = \frac{U_a}{\bar{Z}} = \frac{u_A}{\frac{-j}{\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}}$$

De absolute waarde van \bar{I}_t is te bepalen door eerst de noemer van de breuk te splitsen in een reel en imaginair deel. We doen dit weer door teller en noemer van de breuk $\frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$ te vermenigvuldigen met de toegevoegde complexe tweeterm

van de noemer $(R - j\omega L)$.

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{U_a}{\frac{-j}{\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}} \times \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{U_a}{\frac{-j}{\omega C} + \frac{j\omega LR^2 + \omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}} = \\ &= \frac{U_a}{\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

De absolute waarde van de stroom vinden we nu door de wortel te nemen uit de som van de kwadraten van reel en imaginair deel van de noemer, dus:

$$I_t = \frac{U_a}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

De noemer van deze breuk vormt nog steeds de uitdrukking voor de impedantie van gegeven schakeling. Het argument van deze impedantie is bepalend voor de faseverschuiving die de stroom I_t verkrijgt ten opzichte van de spanning U_a . Om de tangens te bepalen van de hoek van faseverschuiving tussen I_t en U_a vermenigvuldigen we teller en noemer van de complexe waarde van de stroom I_t met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer, dus uit uitdrukking (1) volgt:

$$I_t = \frac{U_a \left\{ \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \left(\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \right\}}{\left(\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Is de hoek van faseverschuiving tussen I_t en U_a voorgesteld door α , dan is:

$$\tan \alpha = - \frac{\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}}{\frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Bij positieve getallenwaarde voor $\tan \alpha$ zal I_t voorijlen op U_a .

R.T.

98 W.T.

Nadruk verboden

Bij negatieve getallenwaarde zal I_t najlén op U_a .

Willen we de grootte en de fase van de spanning U_p leren kennen, dan kunnen we deze vinden door de complexe waarde van I_t te vermenigvuldigen met de complexe waarde van de impedantie \bar{Z}_p , gevormd door R en L .

$$\begin{aligned}\bar{U}_p &= \bar{I}_t \times \bar{Z}_p = \frac{U_a}{\bar{Z}_t} \bar{Z}_p = \frac{U_a}{\frac{-j}{\omega C} + \frac{jR\omega L}{R + j\omega L}} \times \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \\ &= U_a \frac{jR\omega L}{\frac{-jR}{\omega C} + \frac{L}{C} + jR\omega L} = \frac{jR\omega L}{\frac{L}{C} - j\left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right)}.\end{aligned}$$

Vermenigvuldiging met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{U}_p = U_a \frac{jR\omega L}{\frac{-jR}{\omega C} + \frac{L}{C} + jR\omega L} = \frac{jR\omega L}{\frac{L}{C} - j\left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right)}.$$

Vermenigvuldiging met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{U}_p = U_a \frac{jR\omega L \left\{ \frac{L}{C} + j\left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right) \right\}}{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right)^2} = U_a \frac{j \frac{R\omega L^2}{C} - \frac{R^2 L}{C} + R^2 \omega^2 L^2}{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right)^2}.$$

Uit $\bar{U}_p = U_a \frac{j \left(\frac{R\omega L^2}{C} - R^2 \omega^2 L^2 \right)}{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega C} - R\omega L\right)^2}$ volgt nu, dat $\tan \beta = - \frac{R\omega L^2}{\frac{R^2 L}{C} - R^2 \omega^2 L^2}$

Als β de hoek van faseverschuiving is tussen de spanningen U_p en U_a .

Komt uit $\tan \beta$ een positief getal, dan zal U_p voorijlen op U_a en in het geval dat er een negatief getal uitkomt, zal U_p najlén op U_a .

Voorbeeld: Bereken de stroom en spanning door en over elk der geschakelde onderdelen van de schakeling volgens fig. 7,10 en bepaal tevens de fase die bedoelde stromen en spanningen hebben ten opzichte van U_a .

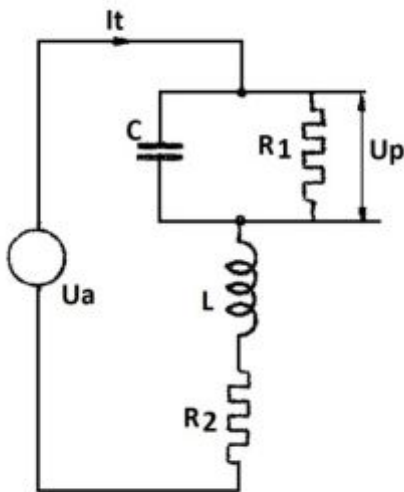


Fig. 7,10. Bepaling stromen en spanningen.

Oplossing: we bepalen allereerst de stroom I_t , die de generator U_a moet leveren. Deze stroom is $I_t = \frac{U_a}{Z_t}$.

Bepalen we eerst Z_t , dan kunnen we deze opgebouwd denken

uit de serieschakeling van: $\bar{Z}_1 = R_2 + j\omega L$ en $\bar{Z}_2 = \frac{-\frac{j}{\omega C} \times R_1}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} =$

$$= \frac{R_1}{jR_1\omega C + 1}. \quad \bar{Z}_1 = R_2 + j\omega L = 200 + j10^6 \cdot 400 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 200 + j400. \quad \bar{Z}_2 = \frac{R_1}{jR_1\omega C + 1} = \frac{300}{j300 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-10} + 1} =$$

$$= \frac{300}{j0,75 + 1} = \frac{300(-j0,75 + 1)}{0,75^2 + 1} = \frac{-j225 + 300}{1,5625} = -j144 + 192.$$

$$\bar{Z}_t = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 200 + j400 - j144 + 192 = 392 + j256.$$

De totaalstroom is nu:

$$\bar{I}_t = \frac{U_a}{\bar{Z}_t} = \frac{100}{392 + j256} = \frac{100(392 - j256)}{219200} = 0,179 - j0,117.$$

Hieruit volgt dat de hoek van faseverschuiving tussen I_t en U_a

is te berekenen uit $\tan \varphi = \frac{-0,117}{0,179} = -0,653$.

Daar $\tan \varphi$ negatief is, zal de stroom I_t een hoek φ najlén op U_a .

De absolute waarde van I_t is nu: $I_t = \sqrt{0,179^2 + 0,117^2} = 0,223 \text{ A}$. De spanning over R_2 is bepaald door $U_{R_2} = I_t \times R_2$ en daar de spanning over R_2 in fase is met de stroom zal deze spanning

ook een hoek φ naiten op U_a .

U_{R_2} kunnen we nu berekenen door de absolute waarde van de stroom te vermenigvuldigen met R_2 .

$$U_{R_2} = I_t \times R_2 = 0,223 \times 200 = 44,6 \text{ volt.}$$

De spanning over L is bepaald door $\bar{U}_L = \bar{I}_t \times j\omega L$. Daar de spanning U_L 90° voorijlt op I_t , gebruiken we hier de complexe uitdrukking van I_t .

$$\begin{aligned} \bar{U}_L &= \bar{I}_t \times j\omega L = (0,179 - j0,117)j10^6 \cdot 400 \cdot 10^{-6} = \\ &= (j0,179 + 0,117)400. \end{aligned}$$

De hoek van faseverschuiving α tussen U_L en U_a is nu bepaald door $\tan \alpha = \frac{0,179}{0,117} = 1,53$.

De spanning U_L is dus een hoek α voor op de aangelegde spanning U_a .

$$\text{De absolute waarde van } U_L = \sqrt{(0,179^2 + 0,117^2)}400 = 2,23 \times 400 = 89,2 \text{ volt.}$$

De spanning U_p over de parallelschakeling van C en R_1 is te berekenen uit:

$$\bar{U}_p = \bar{I}_t \times \bar{Z}_2 = (0,179 - j0,117)(-j144 + 192) = 48,24 + j17,52.$$

$$\text{De hoek van faseverschuiving } (\beta) \text{ tussen } \bar{U}_p \text{ en } \bar{U}_a \text{ is nu } \tan \beta = \frac{17,52}{48,24} = 0,36.$$

De absolute waarde van U_p is: $U_p = \sqrt{48,24^2 + 17,52^2} = 51,2 \text{ volt.}$

De spanning ijlt een hoek β voor op de aangelegde spanning U_a , daar $\tan \beta$ positief is. De stroom door C is bepaald door $\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_p}{-j} = j\bar{U}_p\omega C$.

$\bar{I}_C = (48,24 + j17,52)j10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-10} = (j48,24 - 17,52)25 \cdot 10^{-4}$. De fasehoek (δ) tussen I_C en U_a is nu bepaald door $\tan \delta = \frac{48,24}{-17,52} = -3,1$. Hieruit blijkt dat I_C een hoek δ na-ijlt op U_a

($\tan \delta$ is negatief). De absolute waarde van I_C is nu $I_C = \sqrt{(48,24^2 + 17,25^2)}25 \cdot 10^{-4} =$

$= 51,2 \times 25 \cdot 10^{-4} = 0,12 \text{ ampere}$. De stroom I_{R_1} is te berekenen uit $\bar{I}_{R_1} = \frac{\bar{U}_p}{R}$. Daar I_{R_1} in fase is met U_p heeft deze een faseverschuiving β ten opzichte van U_a .

We kunnen, om de absolute waarde van I_{R_1} te bepalen, gebruik maken van de absolute waarde van U_p dus: $I_{R_1} = \frac{51,2}{300} = 0,1706 \text{ A}$.

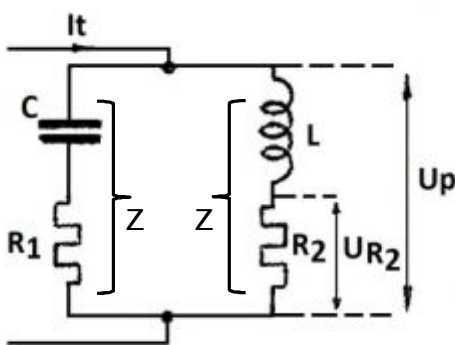


Fig. 7,11. Bepaling spanning.

$\bar{Z}_t = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$ wordt de uitdrukking voor \bar{U}_{R_2} :

Voorbeeld: Bepaal de spanning U_{R_2} over de weerstand R_2 als aan de schakeling een stroom $I_t = 0,1 \text{ A}$ wordt toegevoerd (fig.7,11). De frequentie van I_t is $\omega = 2 \cdot 10^6$; $C = 1000 \text{ pF}$; $R_1 = 800 \Omega$; $L = 400 \mu\text{H}$; $R_2 = 600 \Omega$.

Oplossing: De spanning \bar{U}_p die ten gevolge van de stroom I_t over de gehele schakeling wordt ontwikkeld, is $\bar{U}_p = \bar{I}_t \times \bar{Z}_t$.

Ten gevolge van deze spanning ontstaat een stroom I_1 door de serieschakeling van L en R_2 , die is bepaald door:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_p}{\bar{Z}_2} = \bar{I}_t \cdot \frac{\bar{Z}_t}{\bar{Z}_2}.$$

De spanning U_{R_2} is nu:

$$\bar{I}_1 \times R_2 = \bar{I}_t \times \frac{\bar{Z}_t}{\bar{Z}_2} R_2. \text{ Daar}$$

R.T.

100 W.T.

Nadruk verboden

$$\bar{U}_{R_2} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \times \frac{1}{\bar{Z}_2} \times R_2 = I_t \frac{\bar{Z}_1 R_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = I_t \frac{(R_1 - \frac{j}{\omega C}) R_2}{R_1 - \frac{j}{\omega C} + R_2 + j\omega L}.$$

$$\begin{aligned} \text{Met de getallen wordt dit: } \bar{U}_{R_2} &= 0,1 \times \frac{\left(800 - \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}}\right) 600}{800 - \frac{j}{2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}} + 600 + j2 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 0,1 \times \frac{(800 - j500) 600}{800 - j500 + 600 + j800} = \frac{60(800 - j500)}{1400 + j300}. \end{aligned}$$

Teller en noemer gedeeld door 100 geeft:

$$\bar{U}_{R_2} = \frac{60(8 - j5)}{14 + j3} = \frac{480 - j300}{14 + j3}.$$

Teller en noemer met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer vermenigvuldigd geeft:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{R_2} &= \frac{(480 - j300)(14 - j3)}{196 + 9} = \frac{6720 - j1440 - j4200 - 900}{205} = \\ &= \frac{5820 - j5620}{205}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de tangens van de hoek van faseverschuiving tussen \bar{U}_{R_2} en I_t is:

$$\tan \varphi = \frac{-5620}{5820} = -0,97.$$

De spanning \bar{U}_{R_2} ijlt dus een hoek φ na op de stroom I_t .

De absolute waarde van de spanning \bar{U}_{R_2} is:

$$\bar{U}_{R_2} = \frac{\sqrt{5820^2 + 5620^2}}{205} = 39,5 \text{ volt.}$$

Voorbeeld: Bereken de spoel of condensator die in serie geschakeld moet worden met de keten volgens fig. 7,10, opdat tussen I_t en U_a geen faseverschuiving mag optreden.

Oplossing: Indien tussen I_t en U_a geen faseverschuiving mag optreden, moet de impedantie, die door de schakeling wordt gevormd, zich gedragen als een ohmse weerstand. Het imaginaire deel van de impedantie moet dan gelijk nul worden. In het voorbeeld behorende bij fig. 7,10 werd berekend dat de impedantie bepaald is door $\bar{Z}_t = 395 + j256$.

Deze impedantie stelt dus voor, dat de schakeling vervangen kan worden door een serieschakeling van een ohmse weerstand van $R_v = 256 \Omega$ (het imaginaire deel is positief).

Het imaginaire deel kan opgeheven worden door het serieschakelen van een condensator waarvan de reactantie eveneens $\frac{1}{\omega C_v} = 256 \Omega$. Bedenk dat: $j\omega L_v - \frac{1}{\omega C_v} = j256 - j256 = 0$.

De capaciteit van de serie te schakelen condensator is te berekenen uit:

$$\frac{1}{\omega C_v} = 256 \text{ of } C_v = \frac{1}{256\omega} = \frac{1}{256 \times 10^6} = 3906 \text{ pF.}$$

Op deze wijze kunnen we een schakeling aan bepaalde voorwaarden laten voldoen door een of meer onderdelen in serie op te nemen. Moet een schakeling zich zodanig gedragen dat deze tussen totaalstroom en aangelegde spanning een faseverschuiving van 45° veroorzaakt, dan moet de tangens van het argument der impedantie gelijk aan 1 zijn.

Hieraan kunnen we voldoen door: of een reactantie, of een weerstand of beide in serie op te nemen, zodat het imaginaire deel gelijk is aan het reële deel. Moet de faseverschuiving aan een andere hoek voldoen, dan kan men door serieschakelen van een of meer onderdelen de tangens van het argument laten voldoen aan de gegeven hoek.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 149 t/m 154.



7.4. Resonantiefrequentie en resonantie-impedantie

In het voorgaande hebben we gezien dat een impedantie in het algemeen een faseverschuiving tussen stroom en spanning ten gevolge heeft. We hebben de faseverschuiving vastgelegd door middel van de tangens van de fasehoek. De tan van de fasehoek wordt bepaald door het quotiënt:

$$\frac{\text{imaginair gedeelte}}{\text{reëel gedeelte}}$$

De grootte van $\tan \varphi$ is afhankelijk van de grootte van de frequentie ω .

Bij vele schakelingen is het mogelijk, door ω een bepaalde waarde te geven, dat $\tan \varphi$ nul wordt. $\tan \varphi$ wordt gelijk aan nul indien de teller van de breuk, dus het imaginaire deel van de complexe vorm, gelijk nul wordt.

De frequentie waarbij het imaginaire nul wordt, dus ook de faseverschuiving nul wordt, noemen we de faseresonantiefrequentie die we aanduiden met f_0 .

De faseresonantiefrequentie is die frequentie waarbij het imaginaire gedeelte van de complexe vorm nul wordt.

Is het imaginaire deel van een impedantie bij de faseresonantiefrequentie, of korter de resonantiefrequentie, dus nul, dan stelt het reële deel van de impedantie de weerstand voor die de betreffende impedantie in het resonantiegeval oplevert; we noemen dit de resonantie-impedantie.

Voorbeeld: Bepaal de resonantiefrequentie en resonantie-impedantie van de schakeling volgens fig. 7.8.

Oplossing: De impedantie is:
$$\bar{Z} = \frac{-j(R + \omega L)}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{-\frac{jR}{\omega C} + \frac{L}{C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Vermenigvuldiging met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{Z} = \frac{(-j\frac{R}{\omega C} + \frac{L}{C})\{R - j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\}}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \frac{-jR^2 - \frac{RL}{C} + \frac{R}{\omega^2 C^2} + \frac{LR}{C} - j\frac{\omega L^2}{C} + j\frac{L}{\omega C^2}}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\text{of: } \bar{Z} = \frac{\frac{R}{\omega^2 C^2} - j(\frac{R^2}{\omega C} + \frac{\omega L^2}{C} - \frac{L}{\omega C^2})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Ter bepaling van de resonantiefrequentie stellen we het imaginaire deel van de gevonden impedantie gelijk nul.

$$\text{Dus: } \frac{R^2}{\omega_0 C} + \frac{\omega_0 L^2}{C} - \frac{L}{\omega_0 C^2} = 0.$$

Vermenigvuldiging met ω_0 geeft:

$$\frac{R^2}{C} + \frac{\omega_0^2 L^2}{C} - \frac{L^2}{C^2} = 0 \quad \text{of: } \frac{\omega_0^2 L^2}{C} = \frac{L}{C^2} - \frac{R^2}{C} \quad \text{en: } \omega_0^2 = \frac{C}{L^2} \left(\frac{L}{C^2} - \frac{R^2}{C} \right).$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad \text{en: } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.$$

Om de resonantie-impedantie vast te leggen, vullen we de resonantiefrequentie ω_0 in, in het reële deel van de impedantie, dus:

$$Z_0 = \frac{\frac{R}{\omega_0^2 C^2}}{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2} = \frac{\frac{R}{\omega_0^2 C^2}}{R^2 + \omega_0^2 L^2 - 2\frac{L}{C} + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}.$$

R.T.

102 W.T.

Nadruk verboden

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{\frac{R}{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)C^2}}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)L^2 - 2\frac{L}{C} + \frac{1}{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)C^2}} = \frac{\frac{R}{\frac{C}{L} - \frac{R^2C^2}{L^2}}}{R^2 + \frac{L}{C} - R^2 - 2\frac{L}{C} + \frac{1}{\frac{C}{L} - \frac{R^2C^2}{L^2}}} = \\ &= \frac{\frac{R}{\frac{LC - R^2C^2}{L^2}}}{-\frac{L}{C} + \frac{1}{\frac{LC - R^2C^2}{L^2}}} = \frac{\frac{L^2R}{LC - R^2C^2}}{-\frac{L}{C} + \frac{L^2}{LC - R^2C^2}} = \frac{L^2R}{-\frac{L}{C}(LC - R^2C^2) + L^2} = \\ &= \frac{L^2R}{-L^2 + R^2LC + L^2} = \frac{L}{CR}. \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de resonantiefrequentie en resonantie-impedantie van de schakeling volgens fig. 7,7.

Oplossing: De impedantie van de schakeling is:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j\omega L + \frac{-j\frac{R}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{jR\omega C + 1} = j\omega L + \frac{R(-jR\omega C + 1)}{R^2\omega^2C^2 + 1} = j\omega L + \frac{-jR^2\omega C + R}{R^2\omega^2C^2 + 1} = \\ &= j\omega L + \frac{-jR^2\omega C + R}{R^2\omega^2C^2 + 1} = j\left(\omega L - \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1}\right) + \frac{R}{R^2\omega^2C^2 + 1}. \end{aligned}$$

Om de resonantiefrequentie te bepalen, stellen we het imaginaire deel gelijk nul.

$$\omega_0 L - \frac{R^2\omega_0 C}{R^2\omega_0^2C^2 + 1} = 0. \text{ We kunnen alle termen delen door } \omega_0.$$

$$L - \frac{R^2C}{R^2\omega_0^2C^2 + 1} = 0 \text{ en vermenigvuldigd met } R^2\omega_0^2C^2 + 1 \text{ geeft:}$$

$$L(R^2\omega_0^2C^2 + 1) - R^2C = 0; \quad LR^2\omega_0^2C^2 + L - R^2C = 0; \quad LR^2\omega_0^2C^2 = R^2C - L.$$

Gedeeld door LR^2C^2 geeft:

$$\omega_0^2 = \frac{R^2C - L}{LR^2C^2} \quad \text{en} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R^2C - L}{LR^2C^2}}.$$

De resonantie-impedantie wordt gevormd door het reële deel voor de frequentie ω_0 .

$$Z_0 = \frac{R}{R^2\omega_0^2C^2 + 1} = \frac{R}{R^2C^2 \frac{(R^2C - L)}{LR^2C^2} + 1} = \frac{R}{\frac{R^2C - L}{L} + 1} = \frac{R}{\frac{R^2C - L + L}{L}} = \frac{L}{CR}.$$

Voorbeeld: Bereken de waarde van de condensator waarbij de keten volgens fig. 7,9 in resonantie is voor een frequentie $\omega_0 = 2 \cdot 10^6$; $L = 400 \mu\text{H}$; $R = 10^3 \Omega$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{-j}{\omega C} + \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \frac{-j}{\omega C} + \frac{jR\omega L(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2L^2} = \\ &= \frac{-j}{\omega C} + \frac{jR^2\omega L + R\omega^2L^2}{R^2 + \omega^2L^2} = 0. \end{aligned}$$

Om aan de resonantievoorwaarde te voldoen, moet het imaginaire deel gelijk nul zijn, dus:

$$-\frac{1}{\omega C} + \frac{R^2\omega L}{R^2 + \omega^2L^2} = 0 \quad \text{of:} \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{R^2\omega L}{R^2 + \omega^2L^2} \quad \text{en:} \quad \frac{1}{C} = \frac{R^2\omega^2L}{R^2 + \omega^2L^2}.$$

$$C = \frac{R^2 + \omega^2L^2}{R^2\omega^2L} = \frac{10^6 + 4 \cdot 10^{12} \cdot 16 \cdot 10^{-8}}{10^6 \cdot 4 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^6 + 64 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^{14}} = \frac{164 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^{14}} = 1025 \text{ pF}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 155 t/m 159.

7.5. Berekening van vermogens in wisselstroomketens

In de vroeger behandelde wisselstroomtheorie werd reeds vastgelegd dat het opgenomen wisselstroomvermogen bepaald is door $P = I_{eff} \cdot U_{eff} \cos \varphi$.

Indien we voor een schakeling waar een wisselspanning op is aangesloten de complexe uitdrukking voor de stroom hebben bepaald, dan is de faseverschuiving tussen stroom en spanning bekend.

Veronderstellen we dat de stroom I een hoek φ na-ijlt op de aangelegde spanning U_a , (fig. 7,12), dan werd $\tan \varphi$ bepaald door het quotiënt van het imaginaire en reële deel van de complexe uitdrukking van de stroom I . In de figuur is dus $\tan \varphi = \frac{b}{a}$.

De cosinus van de hoek van faseverschuiving $\cos \varphi$ wordt bepaald door het quotiënt van het reële deel en de absolute waarde van de complexe uitdrukking van de stroom.

$$\cos \varphi = \frac{\text{reële deel}}{\text{absolute waarde}}$$

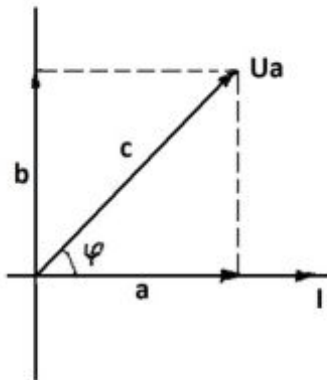


Fig. 7,12. Berekening vermogen.

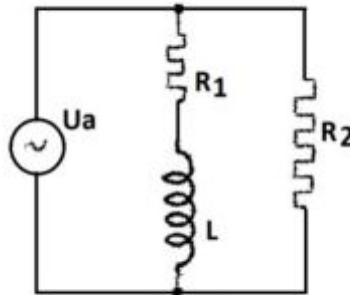


Fig. 7,13. Voorbeeld ter berekening van het vermogen.

In fig. 7,12 dus $\cos \varphi = \frac{a}{c}$. Dit geldt eveneens voor de bepaling van $\cos \varphi$ van een impedantie of van een spanning. We zullen een en ander gaan toepassen op fig. 7,13 en we berekenen het vermogen dat de schakeling opneemt, indien de aangelegde spanning $U_{a_{eff}} = 1000 \text{ V}$, terwijl $R_1 = 10^3 \Omega$, $R_2 = 4 \cdot 10^3 \Omega$, $L = 2 \cdot 10^3 \mu\text{H}$ en $\omega = 10^6$.

De impedantie van de schakeling is:

$$\bar{Z} = \frac{R_2(R_1 + R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L}$$

De stroom, die door de generator U_a wordt geleverd is:

$$\bar{I} = \frac{U_a}{\frac{R_2(R_1 + R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L}} \text{ of } \bar{I} = \frac{U_a(R_1 + R_2 + j\omega L)}{R_2(R_1 + j\omega L)} \text{ en met de gegeven getallen wordt dit:}$$

$$\bar{I} = \frac{10^3(10^3 + 4 \cdot 10^3 + j10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^3(10^3 + j10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3})} = \frac{10^3(5 \cdot 10^3 + j2 \cdot 10^3)}{4 \cdot 10^3(10^3 + j2 \cdot 10^3)} = \frac{(5 + j2)}{4(1 + j2)}$$

Teller en noemer van de verkregen uitdrukking vermenigvuldigd met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{I} = \frac{(5 + j2)(1 - 2j)}{4 \times 5} = \frac{5 - j10 + j2 + 4}{20} = \frac{9 - j8}{20}. \text{ De waarde van } \cos \varphi \text{ van de berekende}$$

stroom is: het reële deel gedeeld door de absolute waarde. De absolute waarde is:

$$I = \frac{\sqrt{9^2 + 8^2}}{20} = \frac{\sqrt{81 + 64}}{20} = \frac{\sqrt{145}}{20} \approx \frac{12}{20} = \frac{3}{5} A_{eff}$$

R.T.

104 W.T.

Nadruk verboden

Het reële deel is: $\frac{9}{20}$ en $\cos \varphi = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4}$. Het toegevoerde vermogen is nu: $P = I_{eff} \cdot U_{eff} \cos \varphi$.

$$P = \frac{3}{5} \cdot 10^3 \cdot \frac{3}{4} = 450 \text{ Watt.}$$

Bezien we nog eens fig. 7,12 dan zien we dat de spanning daarin werd bepaald door $U_a = a + jb$, waarin a het reële deel van de spanning U_a is. Voor a mogen we schrijven: $a = U_a \cos \varphi$. Dit deel a van de aangelegde spanning is in fase met de stroom en is dus de spanning die valt over een weerstand ofwel het reële deel van de impedantie waar het vectordiagram betrekking op heeft.

$$a = U_a \cos \varphi = I_{eff} \cdot I_{eff} \times (\text{reële deel der impedantie}).$$

De uitdrukking voor het vermogen wordt nu:

$$P = I_{eff} \cdot U_{a_{eff}} \cdot \cos \varphi = I_{eff} \cdot I_{eff} \times (\text{reële deel der impedantie}).$$

$$P = I_{eff}^2 \times \text{reële deel.}$$

We kunnen het vermogen in de wisselstroomketen dus ook berekenen uit het product van het kwadraat der stroom en het reële deel der impedantie. We bedenken dat een complexe uitdrukking voor een impedantie altijd kunnen herleiden tot een reëel deel en een imaginair deel, hetgeen de serie-schakeling weergeeft van een ohmse weerstand en een reactantie die dus doorlopen worden door de berekende stroom. De weerstand die door het reële deel wordt aangegeven, vertegenwoordigt alle in de schakeling voorkomende weerstanden in serie met de reactantie.

Het door de gehele schakeling opgenomen vermogen wordt dus ook door de vervangingsweerstand opgenomen.

Voorbeeld: Bereken het vermogen dat de schakeling volgens fig. 7,14 opneemt.

$$R_1 = 10^3 \Omega; C = 10^3 \text{ pF}; R_2 = 2 \cdot 10^3 \Omega; \omega = 10^6; U_{a_{eff}} = 450 \text{ V.}$$

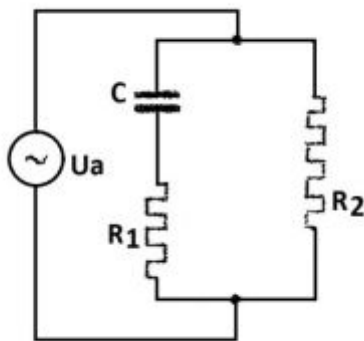


Fig. 7,14. Berekening van het opgenomen vermogen.

Oplissing:

De impedantie is:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{R_2 \left(R_1 - \frac{j}{\omega C} \right)}{R_2 + R_1 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{2 \cdot 10^3 \left(10^3 - j \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}} \right)}{2 \cdot 10^3 + 10^3 - j \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-9}}} \\ &= \frac{2 \cdot 10^3 (10^3 - j10^3)}{3 \cdot 10^3 - j10^3} = \frac{2 \cdot 10^3 (1-j)}{3-j}. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigd met de toegevoegde complexe tweeterm.

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{2 \cdot 10^3 (1-j) (3+j)}{10} = \\ &= 2 \cdot 10^2 (3 + j - j3 + 1) = 2 \cdot 10^4 (4 - j2). \\ \bar{Z} &= 800 - j400. \end{aligned}$$

De absolute waarde: $Z = \sqrt{800^2 + 400^2} \approx 900 \Omega$. De stroom in de keten is dus:

$$I_{eff} = \frac{U_{a_{eff}}}{Z} = \frac{450}{900} = \frac{1}{2} \text{ A.}$$

Het vermogen dat de schakeling opneemt is:

$$P = I_{eff}^2 \times R_v = (0,5)^2 \times 800 = 200 \text{ W.}$$

We moeten hierbij bedenken dat het reële deel van de impedantie 800Ω is. Dit deel stelt de vervangingsweerstand in serie met de reactantie $-j400$ van de schakeling voor.

Oplösungen inzenden van de opgaven Wt, nr. 160 t/m 164.

7.6. Admittanties

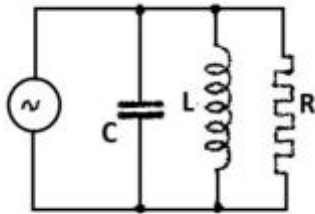


Fig. 7,15. Berekening met behulp van admittanties.

Bij de voorgaande wisselstroomketens hebben we gebruik gemaakt van impedanties om de nadere eigenschappen van de ketens te leren kennen.

Bij parallelschakeling van enkele elementen maakt men dikwijls met voordeel gebruik van admittanties. De voordelen zijn gewoonlijk te vinden in het gebruik van eenvoudiger uitdrukkingen.

We zullen de berekeningen met admittanties eerst toepassen op de schakeling volgens fig. 7,15. De admittantie van de schakeling van fig. 7,15 kunnen we als volgt schrijven:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \text{ of}$$

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right).$$

De absolute waarde van de admittantie is: $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}$.

De faseverschuiving die deze admittantie veroorzaakt, is bepaald door:

$$\tan \varphi = \frac{\text{imaginair deel}}{\text{reëel deel}} = \frac{-\frac{1}{\omega L} + \omega C}{\frac{1}{R}}.$$

Ter bepaling van de stroom die ten gevolge van U_a optreedt, kunnen we het product nemen van de spanning en admittantie, dus:

$$I = U_a \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}.$$

De faseresonantiefrequentie kunnen we eveneens weer bepalen door het imaginaire deel van de admittantie gelijk nul te stellen. Uit de complexe uitdrukking voor de admittantie volgt:

$$-\frac{1}{\omega_0 L} + \omega_0 C = 0 \text{ of: } \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \text{ en } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ of: } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

De admittantie die in geval van resonantie optreedt, is $\frac{1}{R}$ of de resonantie-impedantie is R .

Voorbeeld:

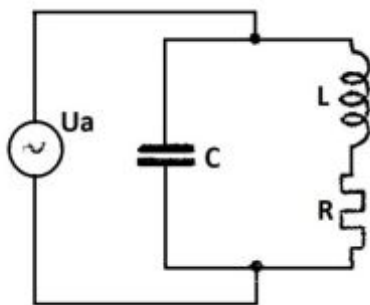


Fig. 7,16. Bepaling resonantiefrequentie met behulp van admittanties.

Bereken de resonantiefrequentie en resonantie-impedantie van de schakeling volgens fig. 7,16 met behulp van admittanties.

Oplossing:

De admittantie van de schakeling is:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

$$Y = \frac{R}{R^2 + j\omega L} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right).$$

Om de resonantiefrequentie te bepalen stellen we het imaginaire deel gelijk nul.

$$\omega_0 - \frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = 0.$$

Delen we de gehele vorm door ω_0 , dan geeft dit:

R.T.

106 W.T.

Nadruk verboden

$C - \frac{L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = 0$ of: $CR^2 + \omega_0^2 L^2 C - L = 0$ en: $\omega_0^2 L^2 C = L - Cr^2$. Deling door $L^2 C$ geeft:

$$\omega_0^2 = \frac{L - CR^2}{L^2 C} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad \text{en} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

De resonantie-admittantie wordt nu gevormd door het reële deel van de complexe uitdrukking voor de admittantie, dus:

$$y_0 = \frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)L^2} \quad y_0 = \frac{R}{R^2 + \frac{L}{C} - R^2} = \frac{RC}{L}$$

Of de resonantie-impedantie is dus: $Z_0 = \frac{L}{RC}$.

Voorbeeld: Bepaal de spanning die ontstaat over de weerstand R_3 van de schakeling volgens fig. 7,17. Gegeven: $I_t = 2 \text{ mA}$; $R_1 = 2 \cdot 10^4 \Omega$; $R_2 = 8 \cdot 10^4 \Omega$; $R_3 = 10^5 \Omega$; $C_1 = 100 \text{ pF}$; $C_2 = 50 \text{ pF}$; $\omega = 10^5$.

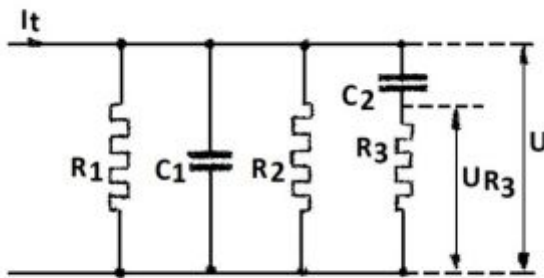


Fig. 7,17. Berekening van spanning met behulp van admittanties.

$$\bar{U}_{R_3} = \frac{I_t R_3}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1\right)\left(R_3 - \frac{j}{\omega C_2}\right) + 1}$$

Hierin de getallen gesubstitueerd:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{R_3} &= \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{\left(\frac{1}{2 \cdot 10^4} + \frac{1}{8 \cdot 10^4} + j10^5 \cdot 10^{-10}\right)\left(10^5 - \frac{j}{10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-11}}\right) + 1} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^2}{\left(\frac{4}{8 \cdot 10^4} + \frac{1}{8 \cdot 10^4} + j10^5\right)\left(10^5 - \frac{j}{5 \cdot 10^{-6}}\right) + 1} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^2}{\left(\frac{5}{8 \cdot 10^4} + j10^{-5}\right)\left(10^5 - j2 \cdot 10^5\right) + 1} \end{aligned}$$

Verder uitvermenigvuldigd geeft:

$$\bar{U}_{R_3} = \frac{2 \cdot 10^2}{\frac{50}{8} + j - j \frac{50}{4} + 2 + 1} = \frac{2 \cdot 10^2}{9,25 - j11,5}$$

De absolute waarde van U_{R_3} is nu:

$$U_{R_3} = \frac{2 \cdot 10^2}{\sqrt{9,25^2 + 11,5^2}} = \frac{200}{14,6} = 13,5 \text{ volt.}$$

Hebben we in het voorgaande reeds wisselstroomketens vervangen door gelijkwaardige serie-schakeling van een weerstand en een reactantie. We kunnen nu ook wisselstroomketens vervangen

Oplossing: We bepalen eerst de uitdrukking voor de spanning U die over de schakeling staat.

$$\bar{U} = \frac{\bar{I}_t}{y}$$

De stroom I_1 , die door de impedantie Z_1 van C_2 en R_3 vloeit, is:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{Z_1} = \frac{\bar{I}_t}{y \cdot Z_1}$$

en de spanning over R_3 is: $\bar{U}_{R_3} = \bar{I}_1 R_3 = \frac{\bar{I}_t R_3}{y \cdot Z_1}$.

De betreffende onderdelen in deze uitdrukking ingevuld, geeft:

$$\bar{U}_{R_3} = \frac{I_t R_3}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1 + \frac{1}{R_3 - \frac{j}{\omega C_2}}\right)\left(R_3 - \frac{j}{\omega C_2}\right)}$$

Gedeeltelijk vermenigvuldigd geeft:



door een gelijkwaardige parallelschakeling van een weerstand en een reactantie.

Als voorbeeld nemen we een serieschakeling van een spoel L met weerstand R_1 die wij door een equivalente parallelschakeling zullen vervangen.

Voorbeeld:

Een serieschakeling van een spoel $L = 600 \mu\text{H}$ en een weerstand $R = 300 \Omega$ moet voor een frequentie $\omega = 10^6$ door een equivalente parallelschakeling worden vervangen. Bepaal de grootte van beide onderdelen.

Oplossing:

De impedantie van de serieschakeling $\bar{Z} = R + j\omega L$. Van de parallelschakeling moet de impedantie eveneens $\bar{Z} = R + j\omega L$ zijn, dus de admittantie moet zijn: $\bar{y} = \frac{1}{R + j\omega L}$. Vermenigvuldigd met de toegevoegde tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{y} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Hieruit volgt dat de admittantie van de parallelschakeling bestaat uit een omgekeerde waarde van een weerstand $\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$ en de omgekeerde waarde van een reactantie $-\frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$.

De weerstand is dus $\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R}$ en de reactantie is:

$\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{-j\omega L} = j \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}$. De laatste uitdrukking wijst op de reactantie van een zelfinductie, daar deze positief is.

Met de getallen wordt de weerstand:

$$R_v = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R} = \frac{9 \cdot 10^4 + 10^{12} \cdot 36 \cdot 10^{-8}}{300} = \frac{45 \cdot 10^4}{300} = 1500 \Omega.$$

De reactantie van de zelfinductie wordt:

$$\omega L_v = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L} = \frac{9 \cdot 10^4 + 10^{12} \cdot 36 \cdot 10^{-8}}{10^6 \cdot 10^{-4}} = \frac{45 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^2} = 750 \Omega.$$

Bedenken we dat deze reactantie is voor te stellen door ωL_v , dan volgt de zelfinductie van de spoel als we de reactantie delen door ω , dus: $L = \frac{750}{10^6} = 750 \mu\text{H}$.

Dezelfde berekening hadden we ook kunnen uitvoeren door aan het begin van de oplossing de getallen reeds in te voeren. De bewerking wordt dan tevens iets korter.

We voeren in de impedantie $\bar{Z} = R + j\omega L$ de getallen in; dit geeft:

$$\bar{Z} = 300 + j10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 300 + j600.$$

De admittantie van de parallelschakeling wordt nu:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{300 + j600} = \frac{300 - j600}{9 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^4} = \frac{300}{45 \cdot 10^4} - j \frac{600}{45 \cdot 10^4} = \\ &= \frac{1}{1500} - j \frac{1}{750}. \end{aligned}$$

De parallelschakeling bestaat dus uit een weerstand van 1500Ω en een inductieve reactantie van 750Ω .

Voorbeeld: In de schakeling volgens fig. 7,17a mogen de inwendige weerstand van de generator en de verliezen van de spoel en de condensator worden verwaarloosd.

De frequentie van de door de generator geleverde wisselspanning heeft een zodanige waarde dat de spanning U_2 ten opzichte van U_1 een faseverschuiving van 90° vertoont. Bereken de frequentie.

R.T.

108 W.T.

Nadruk verboden

Oplissing:

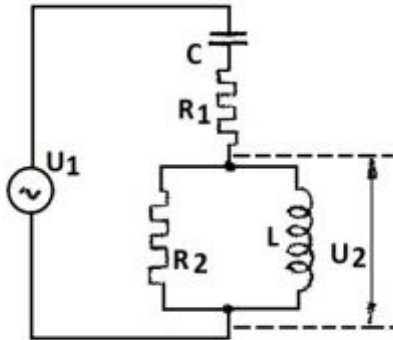


Fig. 7,17a. Voorbeeld.

$$\bar{U}_2 = U_1 \frac{R_2 \omega L}{-jR_1 R_2 - \frac{R_2}{\omega C} + R_1 \omega L - j\frac{L}{C} + R_2 \omega L} \text{ of:}$$

$$\bar{U}_2 = U_1 \frac{R_2 \omega L}{\left(R_1 \omega L + R_2 \omega L - \frac{R_2}{\omega C}\right) - j\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)}.$$

Vermenigvuldigd met de toegevoegde tweeterm van de noemer geeft:

$$\bar{U}_2 = U_1 \frac{R_2 \omega L \left(R_1 \omega L + R_2 \omega L - \frac{R_2}{\omega C}\right) + j\left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)}{\left(R_1 \omega L + R_2 \omega L - \frac{R_2}{\omega C}\right)^2 + \left(R_1 R_2 + \frac{L}{C}\right)^2}.$$

Indien de faseverschuiving tussen U_2 en U_1 90° moet zijn, dan moet het reële deel van verkregen uitdrukking nul zijn. Het imaginaire deel dat dan overblijft, geeft dan tevens aan dat de spanning U_2 90° voorijlt op U_1 , daar het imaginaire deel positief is.

De frequentie waarbij de gewenste fase tussen U_2 en U_1 optreedt, is nu te berekenen uit het reële deel van de breuk, dus:

$$R_1 \omega L + R_2 \omega L - \frac{R_2}{\omega C} = 0.$$

Vermenigvuldigd met ω geeft:

$$R_1 \omega^2 L + R_2 \omega^2 L = \frac{R_2}{C} \text{ of:}$$

$$\omega^2 (R_1 L + R_2 L) = \frac{R_2}{C}.$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{R_2}{C}}{R_1 L + R_2 L} = \frac{R_2}{LC(R_1 + R_2)} \text{ en } \omega = \sqrt{\frac{R_2}{LC(R_1 + R_2)}}.$$

De stroom I_t die door de generator U_1 wordt geleverd is bepaald door:

$$\bar{I}_t = \frac{U_1}{R_1 - \frac{j}{\omega C} + \frac{jR_2 \omega L}{R_2 + j\omega L}}.$$

De spanning U_2 is bepaald door het product van de stroom I_t en de impedantie van de parallelschakeling van L en R_2 , dus:

$$U_2 = \frac{U_1}{R_1 - \frac{j}{\omega C} + \frac{jR_2 \omega L}{R_2 + j\omega L}} \times \frac{jR_2 \omega L}{R_2 + j\omega L}.$$

Vermenigvuldigen we beide breuken met elkaar, dan krijgen we:

$$\bar{U}_2 = U_1 \frac{jR_2 \omega L}{R_1 R_2 - \frac{jR_2}{\omega C} + jR_1 \omega L + \frac{L}{C} + jR_2 \omega L}.$$

Vermenigvuldigen we teller en noemer met $-j$, dan geeft dit:

Oplösungen inleveren van de opgaven Wt. nr. 165 t/m 168.

7.7. Brugschakelingen voor wisselstroom

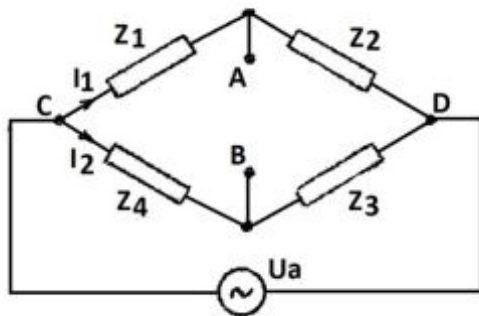


Fig. 7,18. Bepaling spanning tussen de brugpunten.

Veronderstel een brugschakeling volgens fig. 7,18, die bestaat uit 4 willekeurige impedanties.

Gevraagd wordt de spanning tussen de punten A en B te bepalen als op de schakeling een wisselspanning \bar{U}_a is aangesloten.

We berekenen weer de spanningen die de punten A en B hebben ten opzichte van punt C of ten opzichte van punt D.

Om de spanning tussen A en B te bepalen, moeten we echter bedenken dat de faseverschuivingen die de spanningen tussen de punten A en C en B en C ook van invloed zijn op de spanning tussen de punten A en B.

Veronderstellen we dat de spanning gemeten tussen A en C even groot is als de spanning B en C, dan is het geheel afhankelijk van de fasen van deze spanningen, welke spanning tussen A en B optreedt. Zijn de spanningen tussen A en C en B en C in fase, dan is tussen A en B de spanning nul volt. Waren de spanningen tussen A en C en B en C in tegenfase, dan meten we tussen A en B een spanning die tweemaal zo groot is als de spanning tussen A en C of B en C.

De moeilijkheden betreffende de faseverschuivingen omzeilen we geheel als we de spanning tussen A en B op complexe wijze bepalen.

We bepalen het verschil tussen de complexe uitdrukkingen voor de stroom tussen de punten A en C en B en C en vinden dan de complexe uitdrukking voor de spanning tussen de punten A en B.

Dit toegepast op fig. 7,18 geeft:

De stroom door de tak gevormd door \bar{Z}_1 en \bar{Z}_2 is: $\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_a}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$ en de spanning tussen de punten A en C is: $\bar{U}_{A-C} = \bar{U}_a \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$.

De stroom door de tak gevormd door \bar{Z}_3 en \bar{Z}_4 is: $\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_a}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}$; de spanning tussen de punten B en C is: $\bar{U}_{B-C} = \bar{U}_a \frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3}$.

De spanning tussen A en B is:

$$\bar{U}_{A-B} = \bar{U}_{A-C} - \bar{U}_{B-C} = \bar{U}_a \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} - \bar{U}_a \frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3}.$$

$$\bar{U}_{A-B} = \bar{U}_a \left(\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} - \frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3} \right).$$

Voorbeeld:

Bereken de spanning tussen de punten A en B van de schakeling volgens fig. 7,19.

Gegevens: $\omega = 10^6$; $R_1 = 3000 \Omega$; $R_2 = 1000 \Omega$; $L = 500 \mu H$; $C = 500 pF$; $U_a = 10 V$.

Oplossing:

$$\bar{I}_1 = \frac{U_a}{R_1 - \frac{j}{\omega C}}.$$

$$\bar{U}_{A-C} = U_a \frac{\frac{-j}{\omega C}}{R_1 - \frac{j}{\omega C}} = U_a \frac{1}{jR_1\omega C + 1}.$$

R.T.

110 W.T.

Nadruk verboden

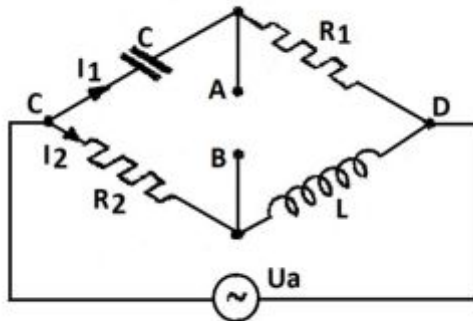


Fig. 7,19. Berekening spanning tussen de brugpunten.

$$\bar{I}_2 = \frac{U_a}{R_2 + j\omega L}.$$

$$\bar{U}_{B-C} = U_a \frac{R_2}{R_2 + j\omega L}.$$

De spanning tussen de punten A en B is:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{A-B} &= \bar{U}_{A-C} - \bar{U}_{B-C} = \\ &= U_a \frac{1}{jR_1\omega C + 1} - U_a \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} = \\ &= U_a \left(\frac{1}{jR_1\omega C + 1} - \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \right). \end{aligned}$$

Vullen we hier de getallen in, dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{A-B} &= U_a \left(\frac{1}{j3 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10} + 1} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{10^3}{10^3 + j10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= U_a \left(\frac{1}{j1,5 + 1} - \frac{10^3}{10^3 + j500} \right) = \\ &= U_a \left(\frac{2}{j3 + 2} - \frac{2}{2 + j} \right). \end{aligned}$$

Elk van de voorkomende breuken vermenigvuldigen met de toegevoegde complexe tweeterm geeft:

$$\bar{U}_{A-B} = U_a \left\{ \frac{2(-3j+20)}{13} - \frac{2(2-j)}{5} \right\} = U_a \left(\frac{-j6+4}{13} - \frac{4-j2}{5} \right).$$

De noemers van de breuk gelijk gemaakt:

$$\bar{U}_{A-B} = U_a \left(\frac{-j30+20}{65} - \frac{52-j26}{65} \right) = U_a \left(\frac{-32-j4}{65} \right).$$

De faseverschuiving tussen \bar{U}_{A-B} en U_a is bepaald door: $\tan \varphi = \frac{-4}{-32} = \frac{1}{8}$.

De absolute waarde van de spanning \bar{U}_{A-B} is:

$$\bar{U}_{A-B} = 10 \frac{\sqrt{32^2 + 4^2}}{65} = 10 \frac{32,4}{65} = \frac{324}{65} = 5 \text{ volt.}$$

Het zal duidelijk zijn dat, bij juiste keuze van de geschakelde onderdelen en de frequentie, de spanning die optreedt tussen de punten van de brug nul kan zijn.

Het is ook mogelijk de voorwaarden te bepalen waarbij de spanning tussen de brugpunten nul volt zal zijn. Op deze wijze komen we tot de brug van Wheatstone voor wisselstroom waarmee dus direct de grootte van de weerstand of reactantie kan worden gemeten.

Voor de schakeling volgens fig. 7,18 werd afgeleid dat de spanning:

$$\bar{U}_{A-B} = \bar{U}_a \left(\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} - \frac{\bar{Z}_4}{\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3} \right).$$

Deze uitdrukking herleiden we door de noemers gelijk te maken.

$$\begin{aligned} \bar{U}_{A-B} &= \bar{U}_a \frac{\bar{Z}_1(\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3) - \bar{Z}_4(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)(\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3)} = \\ &= U_a \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_4 + \bar{Z}_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1\bar{Z}_4 - \bar{Z}_2\bar{Z}_4}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)(\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3)} = U_a \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2\bar{Z}_4}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)(\bar{Z}_4 + \bar{Z}_3)}. \end{aligned}$$

De spanning \bar{U}_{A-B} zal nul zijn als de teller van de breuk nul is, dus $\bar{Z}_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2\bar{Z}_4 = 0$ of: $\bar{Z}_1\bar{Z}_3 = \bar{Z}_2\bar{Z}_4$.

We komen dus weer tot de evenwichtsvoorwaarde van de brug van Wheatstone, die luidt:

De spanning tussen de brugpunten zal nul volt zijn, indien de producten van de tegenover elkaar geplaatste impedanties gelijk zijn.

Voorbeeld:

Bereken de grootte van de weerstand R_1 en de condensator C_1 waarbij de brug volgens fig. 7,20 in evenwicht is.

Gegeven: $\omega = 10^6$; $R_2 = 500 \Omega$; $R_3 = 10^3 \Omega$; $R_4 = 2000 \Omega$; $C_4 = 400 \text{ pF}$.

Oplossing:

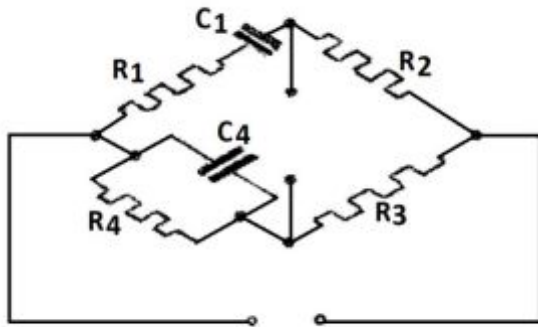


Fig. 7,20. Berekening evenwichtsvoorwaarde.

Stellen we de impedantie van R_1 en C_1 op Z_1 en die van R_4 en C_4 op Z_4 , dan zal de brug in evenwicht zijn als voldaan wordt aan:

$$\bar{Z}_1 R_3 = \bar{Z}_4 R_2.$$

Vullen we de gegeven onderdelen in, dan krijgen we:

$$\left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1}\right) R_3 = \frac{-jR_4}{\omega C_4} R_2.$$

De breuk achter het =-teken vermenigvuldigd met $j\omega C_4$ geeft:

$$R_1 R_3 - \frac{jR_3}{\omega C_1} = \frac{R_4 R_2}{jR_4 \omega C_4 + 1}.$$

De breuk na het =-teken vermenigvuldigd met de toegevoegde complexe

tweeterm van de noemer geeft:

$$\begin{aligned} R_1 R_3 - \frac{jR_3}{\omega C_1} &= \frac{R_4 R_2 (-jR_4 \omega C_4 + 1)}{R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1} = \\ &= \frac{R_4 R_2}{R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1} + \frac{-jR_4^2 R_2 \omega C_4}{R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1}. \end{aligned}$$

Twee complexe grootheden zullen alleen dan aan elkaar gelijk zijn, indien zowel de reële delen als de imaginaire delen aan elkaar gelijk zijn.

Dus bovenstaande brugschakeling zal in evenwicht zijn, indien aan twee voorwaarden wordt voldaan, deze zijn:

$$R_1 R_3 = \frac{R_4 R_2}{R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1} \quad \text{en} \quad \frac{R_3}{\omega C_1} = \frac{R_4^2 R_2 \omega C_4}{R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1}.$$

Uit de eerste vergelijking volgt:

$$R_1 = \frac{R_4 R_2}{R_3 (R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1)}$$

en uit de tweede vergelijking:

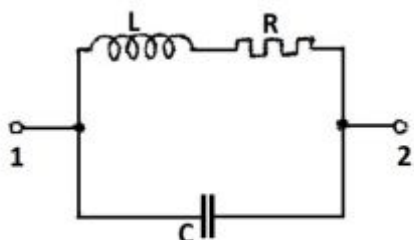
$$\frac{1}{C_1} = \frac{R_4^2 R_2 \omega^2 C_4}{R_3 (R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1)} \quad \text{of} \quad C_1 = \frac{R_3 (R_4^2 \omega^2 C_4^2 + 1)}{R_4^2 R_2 \omega^2 C_4}.$$

Vullen we de getallen in de uitdrukking voor R_1 , dan wordt dit:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^2}{10^3 (4 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} \cdot 16 \cdot 10^{-20} + 1)} = \\ &= \frac{10^6}{10^3 (0,64 + 1)} = \frac{10^3}{1,64} = 610 \Omega. \end{aligned}$$

De capaciteit C_1 wordt: $C_1 = \frac{10^3 (0,64 + 1)}{4 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^{-10}} = \frac{10^3 \times 1,64}{8 \cdot 10^{11}} = 2050 \text{ pF}$.

Voorbeeld:



Toon aan dat de absolute waarde van de impedantie tussen de punten 1 en 2 van nevenstaande schakeling volgens fig. 7,21 onafhankelijk is van de waarden van R , indien voldaan wordt aan de voorwaarde $\omega^2 LC = 1/2$.

Fig. 7,21. Voorbeeld.

R.T.

112 W.T.

Nadruk verboden

Oplossing: De admittantie van gegeven schakeling is:

$$y = j\omega C + \frac{1}{R+j\omega L} = j\omega C + \frac{R-j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Deze vorm gesplitst in reëel deel en imaginair deel geeft:

$$y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right).$$
 De absolute waarde van deze admittantie is:

$$y = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2}.$$

Bij het uitwerken van de kwadraten moeten we bedenken dat het tweede deel het kwadraat van een tweeterm voorstelt van het type $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$y = \sqrt{\frac{R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\omega^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}}.$$

De eerste en laatste term hebben gelijke noemers, dus kunnen we schrijven:

$$y = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

De eerste breuk kan vereenvoudigd worden door teller en noemer te delen door $R^2 + \omega^2 L^2$.

$$y = \sqrt{\frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC}{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Voor de teller van de derde term kunnen we 1 schrijven, daar $\omega^2 LC = 1/2$.

De eerste term valt weg tegen de derde term en blijft voor de admittantie $y = \sqrt{\omega^2 C^2}$ of: $y = \omega C$. Hieruit blijkt dat de admittantie en dus ook de impedantie onafhankelijk is van de weerstand R , daar deze niet meer in de uitdrukking voorkomt.

Voorbeeld: Leid af onder welke voorwaarde in de schakeling volgens fig. 7,22 de spanningsdeling $\frac{U_u}{U_i}$ onafhankelijk is van de frequentie.

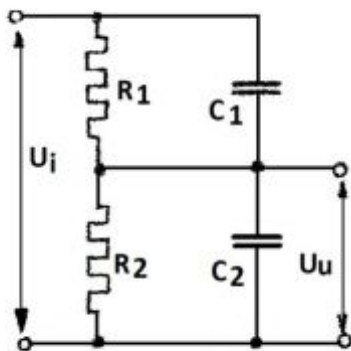


Fig. 7,22.

Oplossing: De stroom I_t die de spanningsbron U_i levert, is

bepaald door:
$$I_t = \frac{U_i}{\frac{-jR_1}{\omega C_1} + \frac{-jR_2}{\omega C_2} + \frac{R_1 - \frac{j}{\omega C_1}}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}}}.$$

Teller en noemer van de eerste breuk vermenigvuldigd met $j\omega C_1$ en die van de tweede breuk met $j\omega C_2$ geeft:

$$I_t = \frac{U_i}{\frac{R_1}{jR_1\omega C_1 + 1} + \frac{R_2}{jR_2\omega C_2 + 1}}.$$
 De spanning U_u wordt bepaald

door:
$$\bar{U}_u = \bar{I}_t \frac{-jR_2}{R_2 - \frac{j}{\omega C_2}} = \bar{I}_t \frac{R_2}{jR_2\omega C_2 + 1}$$
 of:

$$\bar{U}_u = \frac{U_i}{\frac{R_1}{jR_1\omega C_1 + 1} + \frac{R_2}{jR_2\omega C_2 + 1}} \times \frac{R_2}{jR_2\omega C_2 + 1}.$$

De beide breuken met elkaar vermenigvuldigd geeft:
$$\bar{U}_u = U_i \frac{R_2}{\frac{R_1(jR_2\omega C_2 + 1)}{jR_1\omega C_1 + 1} + R_2}.$$

De spanning zal onafhankelijk van ω zijn, als in de breuk $\frac{R_1(jR_2\omega C_2 + 1)}{jR_1\omega C_1 + 1}$ teller en noemer gelijk zijn (dan valt de tweeterm eruit). Dit zal het geval zijn als $R_2\omega C_2 + 1 = R_1\omega C_1 + 1$ of: $R_2\omega C_2 = R_1\omega C_1$, dus als $R_1C_1 = R_2C_2$.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 169 t/m 172.

Hoofdstuk 8

Samengestelde trillingen

8.1. Trilling, opgebouwd uit twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en gelijke fase

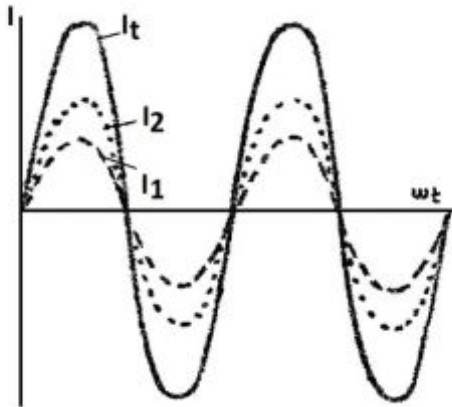


Fig. 8,1. Optellen van twee wisselstromen met gelijke frequenties en gelijke fase.

Indien we twee sinusvormige wisselstromen, respectievelijk $I_1 = \hat{I}_1 \sin \omega t$ en $I_2 = \hat{I}_2 \sin \omega t$, aan een keten, bestaande uit een weerstand, toevoeren, dan kunnen we deze stromen op elk moment bij elkaar optellen om de resulterende stroom te bepalen.

$$I_t = I_1 + I_2 = \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_2 \sin \omega t$$

of: $I_t = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \sin \omega t.$

De resulterende uitdrukking geeft aan dat de amplituden van de twee stromen bij elkaar kunnen worden opgeteld en dat de resulterende stroom weer een sinusvormige stroom van dezelfde gedaante is als de beide oorspronkelijke stromen I_1 en I_2 , echter met een amplitude $(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$.

In fig. 8,1 hebben we de beide stromen eveneens bij elkaar opgeteld en zo, dat we het bovenstaande ook uit de figuur kunnen concluderen.

We zien tevens dat de fase van de resulterende sinusvormige stroom gelijk is aan die van de oorspronkelijke stromen.

De effectieve waarde van de resulterende stroom is nu $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2)$ en de gemiddelde waarde is nul.

8.2. Trilling, opgebouwd uit twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en verschillende fasen

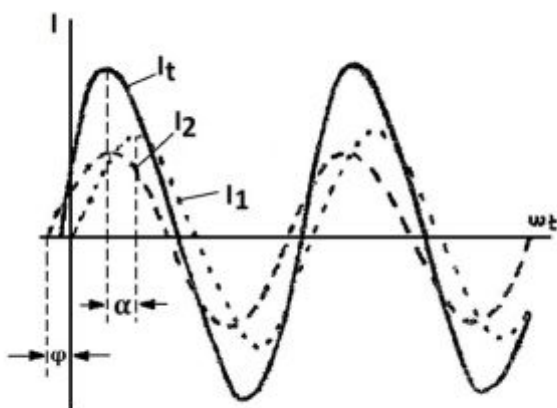


Fig. 8,2. Optellen van twee wisselstromen met gelijke frequenties en verschillende fasen.

De twee sinusvormige trillingen die we aan een keten, bestaande uit een weerstand, zullen toevoeren, noemen we:

$$I_1 = \hat{I}_1 \sin \omega t \text{ en}$$

$$I_2 = \hat{I}_2 \sin(\omega t + \varphi).$$

In fig. 8,2 zijn de stromen I_1 en I_2 getekend. Zij bezitten een onderlinge faseverschuiving. We tellen de momentele waarden van beide stromen weer bij elkaar op en vinden dan de totaalstroom. De resulterende stroom is wederom sinusvormig en heeft ook weer een frequentie ω . Deze stroom heeft echter een andere fase gekregen. Een en ander kunnen we op de volgende manier berekenen.

De som van de stromen is:

$$I_t = \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Voor de uitdrukking $\sin(\omega t + \varphi)$

kunnen we schrijven:

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi,$$

door gebruik te maken van een bekende

formule uit de goniometrie. De totaalstroom wordt nu:

$$I_t = \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_2 \sin \omega t \cos \varphi + \hat{I}_2 \cos \omega t \sin \varphi.$$

R.T.

114 W.T.

Nadruk verboden

Bij de eerste twee termen na het =-teken kunnen we $\sin \omega t$ buiten haakjes brengen:

$$I_t = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi) \sin \omega t + \hat{I}_2 \cos \omega t \sin \varphi.$$

Brengen we nu bij de gehele vorm $(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi)$ buiten haken, dan geeft dit:

$$I_t = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi) \left\{ \sin \omega t + \frac{\hat{I}_2 \sin \varphi}{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi} \cos \omega t \right\}$$

Tussen accoladen hebben we nu de som van $\sin \omega t$ en $\cos \omega t$ staan, echter de constante factor $\frac{\hat{I}_2 \sin \varphi}{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}$ (onafhankelijk van de tijd) maakt het vereenvoudigen van deze som moeilijker.

We vervangen de factor $\frac{\hat{I}_2 \sin \varphi}{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}$ door de tangens van een hulphoek, die we dus alleen invoeren om de verkregen uitdrukking verder te kunnen behandelen.

Stel $\frac{\hat{I}_2 \sin \varphi}{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi} = \tan \alpha$. Daar de grootte van de van de uitdrukking niet bekend is en dus zowel groter als kleiner kan zijn dan 1, moeten we hier een tangensfunctie gebruiken, daar sinus- of cosinusfuncties de waarden groter dan 1 uitsluiten. De totaalstroom wordt nu:

$$I_t = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi) \{ \sin \omega t + \tan \alpha \cos \omega t \}.$$

Daar $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ verkrijgen we:

$$I_t = (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi) \left\{ \sin \omega t + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \omega t \right\}.$$

of:

$$I_t = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}{\cos \alpha} \{ \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha \}$$

Op de vorm tussen accoladen de bovengenoemde formule uit de goniometrie toegepast, geeft:

$$I_t = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}{\cos \alpha} \sin(\omega t + \alpha).$$

Daar $\cos \alpha$ een door ons zelf ingevoerde hulphoek is, moeten we deze in bekende grootheden uitdrukken. Daartoe tekenen we een hoek α van willekeurige grootte (zie fig. 8,3). We maken met behulp van hoek α een willekeurige rechthoekige driehoek ABC . Daar $\tan \alpha = \frac{\hat{I}_2 \sin \varphi}{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}$, is: $BC = \hat{I}_2 \sin \varphi$ en

$AB = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi$. De hypotenusus AC is nu: $\sqrt{\hat{I}_2^2 \sin^2 \varphi + (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi)^2}$. Uitgewerkt geeft dit:

$$AC = \sqrt{\hat{I}_2^2 \sin^2 \varphi + \hat{I}_1^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \cos \varphi + \hat{I}_2^2 \cos^2 \varphi}.$$

Daar $\hat{I}_2^2 \sin^2 \varphi + \hat{I}_2^2 \cos^2 \varphi = \hat{I}_2^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$ en $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ is: $AC = \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \cos \varphi}$.

De driehoek levert verder:

$$\cos \alpha = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2 \cos \varphi}{\sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \cos \varphi}}.$$

Dit ingevuld voor $\cos \alpha$ in de uitdrukking voor I_t geeft:

$$I_t = \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \cos \varphi} \sin(\omega t + \alpha).$$

De resulterende stroom is dus wederom sinusvormig met de

frequentie ω . De amplitude is: $\sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \cos \varphi}$ en is een hoek α verschoven ten opzichte van de stroom I_1 .

De effectieve waarden van de resulterende stroom vinden we weer door de amplitude I_t te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2} \sqrt{2}$.

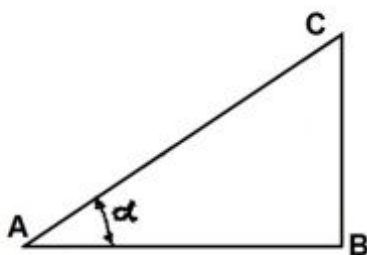


Fig. 8,3. Herleiding van de functies der hulphoek.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt. nr. 173 t/m 174.

8.2. Trilling, opgebouwd uit twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en verschillende fasen (vervolg)

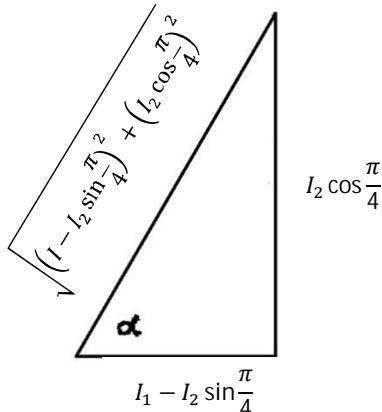


Fig. 8,4. Voorbeeld

Voorbeeld:

Gegeven zijn: $I_1 = \hat{I}_1 \sin \omega t$ en $I_2 = \hat{I}_2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$. Bepaal de amplitude van de resulterende stroom en de fasehoek die deze stroom heeft ten opzichte van de stroom I_1 , indien we de gegeven stromen bij elkaar optellen. $I_1 = 100 \text{ mA}$ en $I_2 = 200 \text{ mA}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} I_t &= I_1 + I_2 = \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_2 \cos \omega t \frac{\pi}{4} - \hat{I}_2 \sin \omega t \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4} \right) \sin \omega t + \hat{I}_2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \omega t = \\ &= \left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \sin \omega t + \frac{\hat{I}_2 \cos \frac{\pi}{4}}{\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4}} \cos \omega t \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Stel: } \frac{\hat{I}_2 \cos \frac{\pi}{4}}{\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4}} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} I_t &= \left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \sin \omega t + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \omega t \right\} = \\ &= \frac{(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})}{\cos \alpha} \{ \sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha \} = \frac{(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})}{\cos \alpha} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Met behulp van de rechthoekige driehoek volgens fig. 8,4 kunnen we de uitdrukking voor $\cos \alpha$ bepalen. Door $\tan \alpha$ is de verhouding van de beide rechthoekszijden bepaald en met behulp van de stelling van Pythagoras vinden we voor de hypotenusa de wortel uit de som van de kwadraten der rechthoekszijden.

$$\cos \alpha \text{ is nu: } \cos \alpha = \frac{(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})}{\sqrt{((\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})^2 + (\hat{I}_2 \cos \frac{\pi}{4})^2)}} \text{ of: } \cos \alpha = \frac{(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\hat{I}_1^2 - 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4} + \hat{I}_2^2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \hat{I}_2^2 \cos^2 \frac{\pi}{4}}}.$$

Daar de laatste twee termen samen gelijk zijn aan \hat{I}_2^2 zijn, krijgen we:

$$\cos \alpha = \frac{(\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 - 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4}}}. \text{ De uitdrukking voor } I_t \text{ wordt:}$$

$$I_t = \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 - 2\hat{I}_1\hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4}} \sin(\omega t + \alpha) = \hat{I}_t \sin(\omega t + \alpha).$$

$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en de gegeven getallen ingevuld, geeft voor de amplitude \hat{I}_t :

$$\begin{aligned} \hat{I}_t &= \sqrt{10^4 + 4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^2 \times \frac{1}{2} \sqrt{2}} = \sqrt{5 \cdot 10^4 - 2\sqrt{2} \cdot 10^4} = \\ &= \sqrt{5 \cdot 10^4 - 2,8 \cdot 10^4} = \sqrt{2,2 \cdot 10^4} = 148 \text{ mA}. \end{aligned}$$

De faseverschuiving die I_t heeft ten opzichte van I_1 is de hoek α waarvoor $\tan \alpha$ is:

$$\tan \alpha = \frac{\hat{I}_2 \cos \frac{\pi}{4}}{\hat{I}_1 - \hat{I}_2 \sin \frac{\pi}{4}}.$$

R.T.

116 W.T.

Nadruk verboden

Met de gegeven getallen en voor $\sin \frac{\pi}{4}$ en $\cos \frac{\pi}{4}$ de waarde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ingevuld wordt:

$$\tan \alpha = \frac{200 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{100 - 200 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{100 - 100\sqrt{2}} = \frac{141}{100 - 141} = \frac{141}{-41} = -3,44.$$

Bij het samenvoegen van sinusvormige trillingen met gelijke frequenties zal de resulterende trilling dus ook sinusvormig zijn en wel met dezelfde frequentie als die van de oorspronkelijke trillingen.

In dit geval is de effectieve waarde weer te bepalen door de amplitude der resulterende trilling te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Een uitzondering hierop komt voor als men twee sinusvormige trillingen met gelijke frequenties en amplituden doch in tegenfase bij elkaar optelt. Het resultaat zal dan een trilling zijn waarvan de amplitude nul is.

De gemiddelde waarde is gelijk aan nul.

8.3. De som van sinusvormige trillingen met verschillende frequenties.

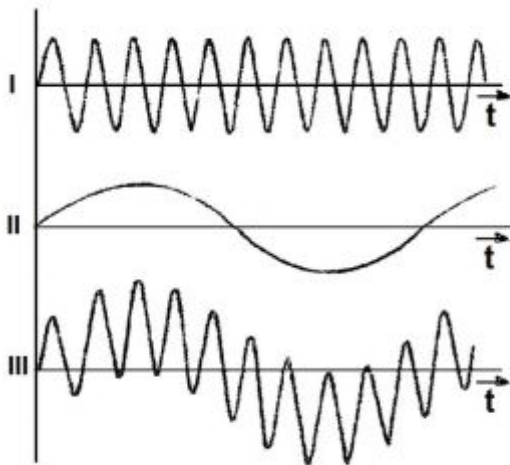


Fig. 8,5. Som van trillingen met verschillende frequenties.

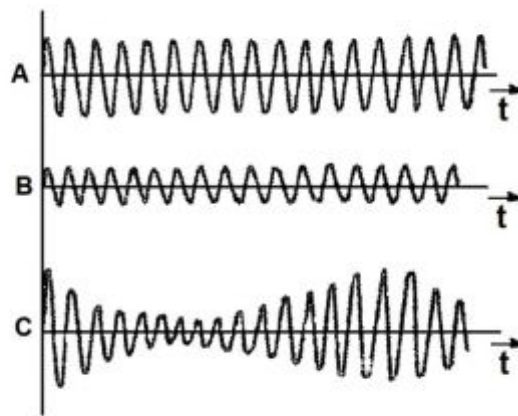


Fig. 8,6. Som van sinusvormige trillingen met een klein frequentieverschil.

Indien we twee sinusvormige trillingen met verschillende frequenties bij elkaar optellen, dan zal de resulterende trilling een niet sinusvormige trilling zijn. Men spreekt dan van superpositie, het superponeren (optellen) van verschillende trillingen. In fig. 8,5 is een trilling I weergegeven met hoge frequentie en een trilling II met lage frequentie. De trilling III geeft het resultaat weer dat ontstaat door de som van de momentele waarden te bepalen.

Stellen we de eerste trilling voor door $U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t$ en de tweede door $U_2 = \hat{U}_2 \sin pt$, dan is de derde trilling voor te stellen door $U_t = \hat{U}_1 \sin \omega t + \hat{U}_2 \sin pt$. In de resulterende trilling zijn de oorspronkelijke trillingen ongewijzigd terug te vinden. Superponeren we twee trillingen met een klein frequentieverschil op elkaar, dan zal het resultaat in gedaante afwijken van het voorgaande geval.

In fig. 8,6 zijn de trillingen A en B weergegeven, die weinig in frequentie verschillen. De trilling C is wederom verkregen door de som der momentele waarden van A en B bij elkaar op te tellen.

We zien dat de trilling C een trilling is met een frequentie die weinig verschilt met die van A en B en dat de amplitude zich in een bepaald ritme wijzigt. Geven we de trillingen A en B aan door resp.

$$I_1 = \hat{I}_1 \sin \omega_1 t \text{ en } I_2 = \hat{I}_2 \sin \omega_2 t, \text{ dan is de som van beide } I_1 + I_2 = \hat{I}_1 \sin \omega_1 t + \hat{I}_2 \sin \omega_2 t.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt. nr. 175 t/m 177.

8.3. De som van sinusvormige trillingen met verschillende frequenties (vervolg)

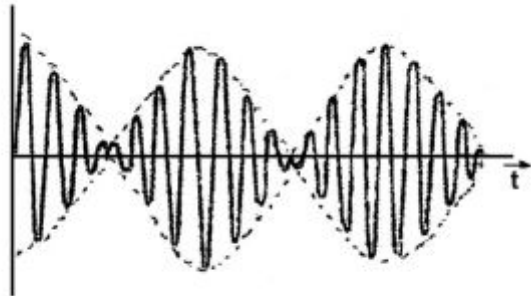


Fig.8.7. Som van twee trillingen met gelijke amplitude, doch verschillende frequenties.

met amplitude $2\hat{I}_1$ en een gemiddelde frequentie $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, die vermenigvuldigd wordt met $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$, waarvan de frequentie gelijk is aan de helft van het frequentieverschil der componenten.

In fig. 8,7 is de resulterende trilling getrokken weergegeven. De amplitudes worden begrensd door de gestippelde krommen $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$. We kunnen in de figuur ook de gestippelde kromme $-\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ tekenen.

Deze ontstaat door de negatieve momentele waarden van de trilling $2\hat{I} \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ te vermenigvuldigen met $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$.

Op de tijdstippen dat de trilling $\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ de nulwaarde passeert, keert deze van teken om. Het gevolg hiervan is dat de resulterende trilling op die momenten in fase omkeert. De resulterende trilling bevat dus geen sinusvormige component met de frequentie $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, daar deze periodiek van teken omkeert.

8.4. De som van een gelijkspanning en een wisselspanning

In de radiotechniek komt veelvuldig de som van een wisselspanning en gelijkspanning- of stromen voor, bijvoorbeeld in de anodeketen van een versterkerbuis. De som van een gelijkstroom (fig. 8,8a) en een wisselstroom met kleine amplitude (fig. 8,8b) is in fig. 8,8c weergegeven.

Bij een gelijkstroom vloeit een constante lading steeds in dezelfde richting. Bij wisselstroom wordt een lading in wisselende richting verplaatst; bij een sinusvormige wisselstroom wordt in de ene richting evenveel lading verplaatst als in de andere richting.

Gemiddeld blijft de lading dus op haar plaats en voert slechts een heen- en weergaande beweging om de evenwichtsstand uit.

Bij een stroom volgens fig. 8,8 vloeit de lading wel steeds in dezelfde richting, doch nu eens wat sterker en dan weer wat zwakker. De totale ladingsverplaatsing wordt alleen bepaald door de grootte van de gelijkstroom. In fig. 8,9 is de som van een gelijkstroom en een wisselstroom met grote amplitude getekend. De amplitude van de wisselstroom is nu groter dan de waarde van de gelijkstroom, waardoor de elektrische stroom niet steeds in dezelfde richting vloeit.

We zullen deze uitdrukking mathematisch gaan onderzoeken en stellen ter wille van de eenvoud $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$, dus wordt:

$$I_t = \hat{I}_1 (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

De trilling die we bij gelijke amplitudes \hat{I}_1 en \hat{I}_2 verkrijgen, is in fig. 8,7 weergegeven.

$$I_t = \hat{I}_1 (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

Volgens de goniometrische formule:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

kunnen we de vorm $\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t$ herleiden tot:

$$2 \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t.$$

De uitdrukking voor I_t wordt nu:

$$I_t = 2\hat{I}_1 \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t.$$

We kunnen de aldus verkregen trilling nu voorstellen als een trilling $2\hat{I}_1 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$,

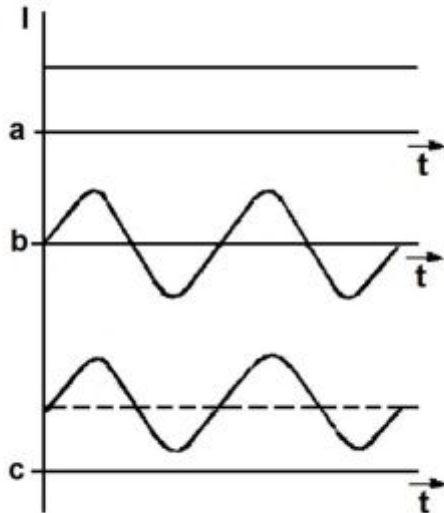


Fig. 8,8. De som van een gelijkstroom en een sinusvormige wisselstroom.

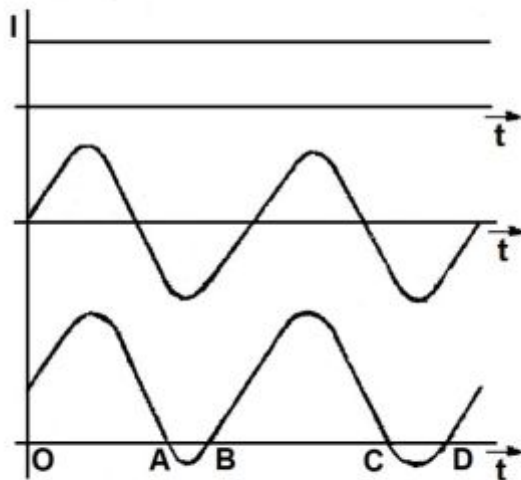


Fig. 8,9. Som van een gelijkstroom en een wisselstroom met grote amplitude.

Gedurende de tijdvakjes *AB* en *CD* vloeit de stroom in tegengestelde richting als gedurende de tijdvakken *OA*, *BC* enz. In de tijdvakken *OA*, *BC* wordt in de ene richting meer lading verplaatst als gedurende de tijdvakken *AB* en *CD* in de andere richting.

De gemiddelde ladingsverplaatsing is weer alleen bepaald door de waarde van de gelijkstroom. In beide gevallen fig. 8,8 en fig. 8,9 is de gemiddelde waarde van de totale stroom dus gelijk aan de waarde van de gelijkstroom.

Een draaispoelmeter zal dus alleen de gelijkstroom aanwijzen.

Om te bepalen welke waarde bijvoorbeeld een hittedraadmeter zal aanwijzen, indien de som der stromen er door vloeit, berekenen we de effectieve waarde van de som der stromen.

We kunnen de effectieve waarde bepalen door vast te leggen, welke gelijkstroom in dezelfde tijd evenveel energie levert als de gegeven stroom.

De gelijkstroom levert

$$I_g^2 \cdot R \cdot t \text{ en de wisselstroom } \frac{1}{2} \hat{I}_w^2 R t \text{ of: } I_{weff}^2 R t \text{ aan energie.}$$

De effectieve waarde van de totaalstroom levert een energie $I_{teff}^2 R t$.

$$\text{Dus } I_{teff}^2 R t = I_g^2 R t + I_{weff}^2 R t$$

$$\text{of: } I_{teff}^2 = I_g^2 + I_{weff}^2$$

$$\text{en: } I_{teff} = \sqrt{I_g^2 + I_{weff}^2}.$$

Op dezelfde wijze kunnen we voor de totale effectieve waarde van de som van enige sinusvormige trillingen met verschillende frequenties afleiden dat deze is:

$$I_{teff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_{3eff}^2 + \dots}$$

Of in woorden:

De effectieve waarde van de som van sinusvormige trillingen waarvan de frequenties verschillen, is bepaald door de wortel uit de som van de kwadraten van de effectieve waarden der componenten.



8.4. De som van een gelijkspanning en een wisselspanning (vervolg)

Voorbeeld:

In een gesloten keten zijn in serie geschakeld een gelijkspanningsbron van $U_g = 100$ volt, een wisselspanningsbron met een amplitude $\hat{U}_w = 100$ volt en een weerstand $R = 500 \Omega$. Bepaal de gemiddelde waarde en de effectieve waarde van de stroom in de keten.

Oplossing:

De totale effectieve waarde van de spanning over de weerstand is:

$$U_{eff\,tot} = \sqrt{U_g^2 + U_{weff}^2} = \sqrt{10^4 + \frac{1}{2} \cdot 10^4} = \sqrt{15 \cdot 10^3} = 122 \text{ volt.}$$

De effectieve waarde van de stroom in dan:

$$I_{teff} = \frac{122}{500} = 244 \text{ mA.}$$

De gemiddelde waarde van de stroom is gelijk aan de gelijkstroom

$$I_{gem} = \frac{U_g}{R} = \frac{100}{500} = 200 \text{ mA.}$$

Voorbeeld:

Een keten bestaat uit een serieschakeling van een spoel $L = 1000 \mu\text{H}$ en een weerstand $R = 500 \Omega$. In de keten zijn in serie werkzaam een wisselspanningsbron $\hat{U}_1 = 100$ volt met een frequentie $\omega_1 = 10^6$, een wisselspanningsbron $\hat{U}_2 = 200 \text{ V}$ met frequentie $\omega_2 = 8 \cdot 10^5$ en een gelijkspanningsbron $U_3 = 150 \text{ V}$. Bepaal de gemiddelde- en de effectieve waarde van de stroom in de keten.

Oplossing:

De stroom die ten gevolge van de spanning \hat{U}_1 in de keten vloeit, is te berekenen uit:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\sqrt{R^2 + \omega_1^2 L^2}} = \frac{100}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 10^{12} \cdot 10^{-6}}} = \frac{100}{\sqrt{125 \cdot 10^4}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \text{ A. Ten gevolge van } \hat{U}_2 \text{ vloeit de stroom:}$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\sqrt{R^2 + \omega_2^2 L^2}} = \frac{200}{\sqrt{25 \cdot 10^4 + 64 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6}}} = \frac{200}{\sqrt{89 \cdot 10^4}} = \frac{2}{\sqrt{89}} \text{ A. De gelijkspanning veroorzaakt een stroom:}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R} = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} \text{ A. De effectieve waarde van de totaalstroom is: } I_{teff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_3^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{89}}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{250} + \frac{1}{178} + \frac{9}{100}} =$$

$$= \sqrt{0,004 + 0,0056 + 0,09} = \sqrt{0,996} = 0,998 \text{ A.}$$

8.5. De effectieve en gemiddelde waarde van niet-sinusvormige stromen en spanningen

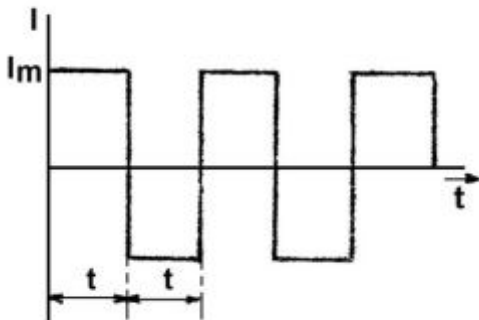


Fig. 8,10. Symmetrische rechthoekspanning.

Treedt in een stroomketen een stroom op van de gedaante zoals in fig. 8,10 die weergeeft, dan kunnen we elke stroomstoot opvatten als een gelijkstroom I_m gedurende de tijd t . Daar deze gelijkstroompjes alle gelijk in grootte en duur zijn, kunnen we ons voorstellen dat, indien de tijdvakjes t zeer kort zijn, een draaispoelmeter niet zal uitslaan. De gemiddelde waarde is dus nul. Zijn de tijdvakjes t groot, dan zal de wijzer van de draaispoelmeter van de ene aanwijzingsstand naar de andere zwaaien.

Voor wat betreft de effectieve waarde (de aanwijzing van een hittedraadmeter) moeten we bedenken, dat een gelijkstroomstoot in positieve richting evenveel energie ontwikkelt als een gelijk-

R.T.

120 W.T.

Nadruk verboden

stroomstoot in negatieve richting. In de aanwijzing van de hittedraadmeter zal dus geen verandering optreden als we de negatieve stroompulsen omgeklapt denken naar boven zodat een gelijkstroom I_m gevormd wordt.

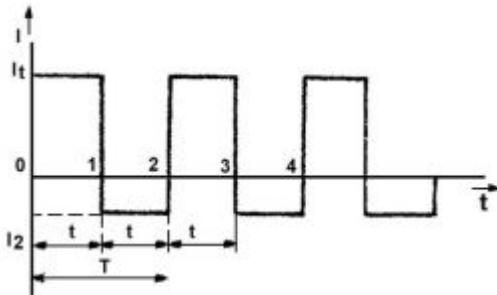


Fig. 8,11. Niet symmetrische rechthoekspanning.

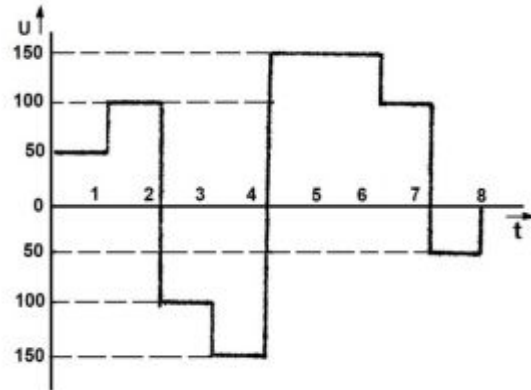


Fig. 8,12. Willekeurige rechthoekspanning.

De hittedraadmeter zal de gelijkstroomwaarde I_m aanwijzen; dit is dus eveneens de effectieve waarde. Heeft de stroom of spanning het aanzien van fig. 8,11, dan moeten we een andere weg bewandelen om de gemiddelde- of effectieve waarde te bepalen. Gedurende het tijdvak 0 – 1 wordt door de stroom een lading $I_1 \times t$ en gedurende het tijdvak 1 – 2 een lading $-I_2 \times t$ verplaatst. Het minteken geeft aan dat de lading gedurende het 2^e tijdvak in tegengestelde richting wordt verplaatst als in het 1^e tijdvak. Gedurende de gehele periode wordt dus een lading $I_1 t - I_2 t$ verplaatst. De gemiddelde waarde van de stroom I_{gem} zal in dezelfde tijd eenzelfde lading verplaatsen. $I_{gem} \times 2t$.

Dus: $I_1 t - I_2 t = I_{gem} \times 2t$ of: $I_1 - I_2 = 2I_{gem}$ en $I_{gem} = \frac{I_1 - I_2}{2}$. De effectieve waarde bepalen we op soortgelijke wijze. De energie, ontwikkeld gedurende de tijdvakken 0 – 1 en 1 – 2 is: $I_1^2 R t + I_2^2 R t$.

Deze energie wordt in dezelfde tijd ook door de effectieve waarde ontwikkeld. $I_{eff}^2 R \times 2t$, dus:

$$I_{eff}^2 R \times 2t = I_1^2 R t + I_2^2 R t \text{ of: } I_{eff}^2 R \times 2t = I_1^2 R t + I_2^2 R t \text{ en } I_{eff} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2}{2}}.$$

Voorbeeld: Bepaal de gemiddelde- en effectieve waarde van de spanning die volgens fig. 8,12 gegeven is.

Oplossing: Bepalen we eerst de gemiddelde waarde dan kunnen we achtereenvolgens de lading die door de opvolgende stroomstoten worden verplaatst, noteren.

Ter wille van de eenvoud geven we de hierbedoelde tijdvakjes van 1 μsec met de letter t aan.

De totaal verplaatste lading wordt:

$$50 \times t + 100 \times t - 100 \times t - 150 \times t + 150 \times 2t + 100 \times t - 50 \times t.$$

De gemiddelde waarde van de stroom heeft een ladingsverplaatsing $I_{gem} \times 8t$ ten gevolge.

We hebben nu de volgende gelijkheid:

$$50t + 100t - 100t - 150t + 150 \times 2t + 100t - 50t = I_{gem} \times 8t.$$

Alle termen gedeeld door t en samengevoegd geeft: $250 = 8I_{gem}$ of: $I_{gem} = \frac{250}{8} = 31,25 \text{ V}$.

De effectieve waarde vinden we als volgt:

$$50^2 \times t + 100^2 t + 100^2 t + 150^2 t + 150^2 \times 2t + 100^2 t + 50^2 t = I_{eff}^2 \times 8t.$$

$$2500 + 10000 + 10000 + 22500 + 45000 + 10000 + 2500 = 8I_{eff}^2.$$

$$102500 = 8I_{eff}^2.$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{102500}{8}} = \frac{1}{4} \sqrt{205000} = 113 \text{ volt}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 181 t/m 187.



8.6. In amplitude gemoduleerde trillingen

Beschouwen we een omroepzender, dan dient deze om te bewerkstelligen dat de geluidstrillingen, die in de studio worden geproduceerd, door de luidspreker in de ontvanger worden weergegeven.

De geluidstrillingen worden in de studio door de microfoon in elektrische trillingen omgezet.

Deze elektrische trillingen moeten weer aan de luidspreker worden toegevoerd om deze in de gelegenheid te stellen hetzelfde geluid weer te geven als in de studio voor de microfoon werd gemaakt.

Het eenvoudigste zou zijn de elektrische trilling, die van de microfoon afkomt, door de zendantenne te doen uitstralen en door de ontvangstantenne te doen opvangen. Daar de geluidstrillingen, dus ook de betreffende elektrische trillingen lage frequenties hebben, is op deze manier niet te verwachten dat de zender op grote afstand waarneembaar zal zijn.

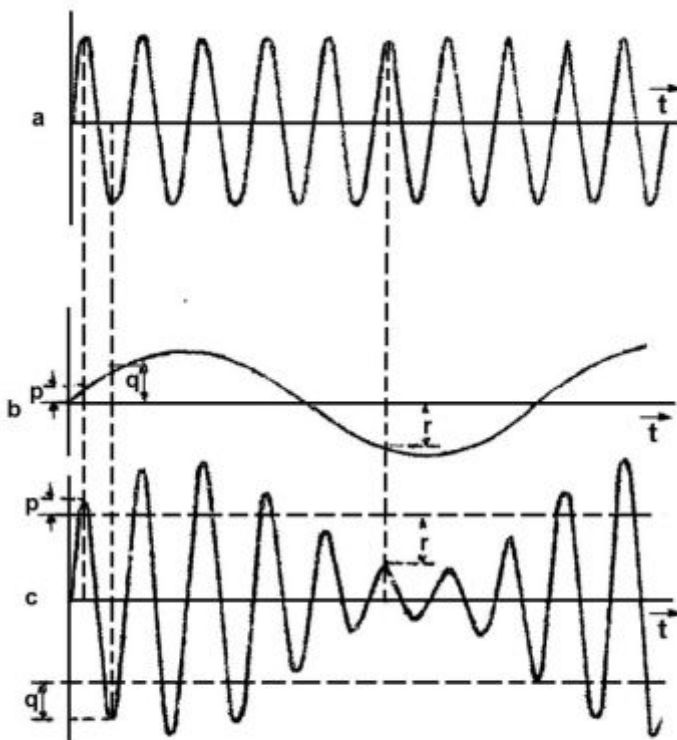
Wel is het mogelijk de laagfrequent trillingen via een kabel naar de plaats van ontvangst te transporteren.

Zonder kabel is het wel mogelijk grote afstanden te overbruggen, indien gebruik wordt gemaakt van trillingen met hogere frequenties.

Men lost dit in de praktijk op door een trilling met hoge frequentie te moduleren met de trilling met lage frequentie; de hoogfrequent trilling wordt dan gebruikt om de laagfrequent trilling van zender naar ontvanger over te dragen. Men noemt de hoogfrequent trilling dan ook wel draagtrilling.

Een tot nu toe veel gebruikt principe van moduleren wordt amplitudemodulatie genoemd.

Onder amplitudemodulatie wordt verstaan het veranderen van de amplituden van een hoogfrequent trilling met de momentele waarde van een laagfrequent trilling.



In fig. 8,13a is een hoogfrequent trilling getekend die gemoduleerd moet worden met de laagfrequent trilling volgens fig. 8,13b.

De amplitude gemoduleerde trilling kunnen we construeren door bij de amplitude van de h.f.-trilling de op hetzelfde moment optredende momentele waarde van de l.f.-trilling op te tellen. Bij positieve waarden van de l.f.-trilling wordt de amplitude van de h.f.-trilling vermeerderd met de momentele van de l.f.-trilling en bij negatieve waarden van de l.f.-trilling wordt de amplitude van de h.f.-trilling verminderd met de momentele waarde van de l.f.-trilling.

Indien we de toppen van de verkregen trilling verbonden denken door een lijn, dan stelt deze lijn de l.f.-trilling *b* voor.

Fig. 8,13. Amplitude gemoduleerde trilling.

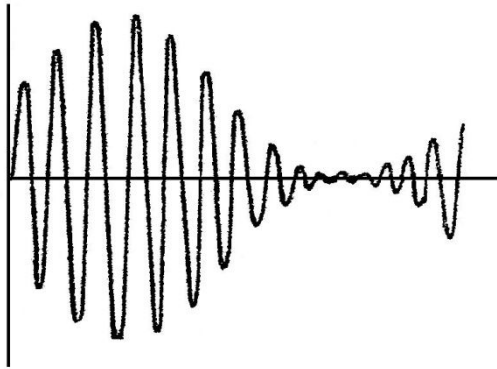


Fig. 8,14. Amplitude gemoduleerd signaal met modulatie diepte van 100 %.

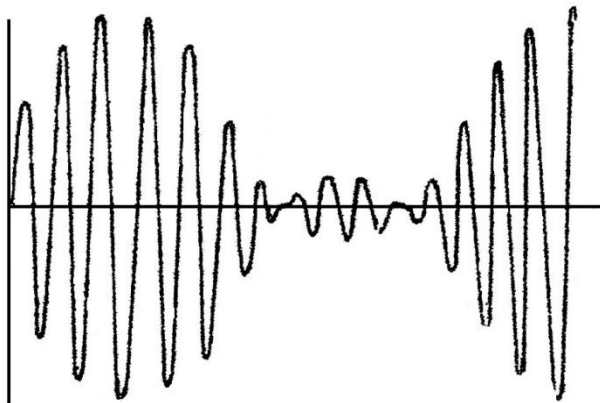


Fig. 8,15. Amplitude gemoduleerd signaal met modulatie diepte groter dan 100 %.

ontoelaatbare vervorming ten gevolge zou hebben.

Bij de maximaal toelaatbare modulatie diepte is $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$ en hebben we een modulatie diepte van 100 %. In fig. 8,14 is een dergelijk signaal getekend, terwijl in fig. 8,15 een amplitude gemoduleerd signaal met een modulatie diepte groter dan 100 % is getekend.

Stellen we de h.f.-trilling voor door $U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t$ en de laagfrequent trilling door $U_2 = \hat{U}_2 \sin pt$, dan is met ω een hoge frequentie en met p een lage frequentie aangeduid.

De amplitude van de gemoduleerde trilling wordt gevormd door de som van de h.f.-amplitude en de momentele waarde van de l.f.-trilling, dus:

$$\hat{U}_{gemod} = \hat{U}_1 + U_2 \text{ en daer}$$

$$U_2 = \hat{U}_2 \sin pt$$

$$\hat{U}_{gemod} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 \sin pt.$$

We hebben in de hoogfrequent-trilling $U_1 = \hat{U}_1 \sin \omega t$ alleen de amplitude \hat{U}_1 gewijzigd in: $\hat{U}_1 + \hat{U}_2 \sin pt$. Dus de momentele waarde van de gemoduleerde trilling wordt:

$$U_{gemod} = (\hat{U}_1 + \hat{U}_2 \sin pt) \sin \omega t.$$

Brengen we \hat{U}_1 buiten haken, dan geeft dit:

$$U_{gemod} = \hat{U}_1 \left(1 + \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \sin pt \right) \sin \omega t.$$

De verhouding $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$ wordt in procenten uitgedrukt, de modulatie diepte genoemd en aangeduid met de letter m , dus:

$$m = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \times 100 \% \text{ en } U_{gemod} =$$

$$= \hat{U}_1 (1 + m \sin pt) \sin \omega t.$$

Naarmate de amplitude van U_2 , de laagfrequent trilling, groter wordt ten opzichte van de hoogfrequent amplitude \hat{U}_1 , wordt er dieper gemoduleerd. Voor praktisch gebruik mag de amplitude \hat{U}_2 echter niet groter worden dan \hat{U}_1 , daar dit



8.7. Analyse van het in amplitude gemoduleerd signaal

Een in amplitude gemoduleerde trilling is een niet sinusvormige trilling. Om te kunnen nagaan wat er gebeurt, indien een dergelijk signaal aan een keten wordt toegevoerd, is het nuttig te weten uit welke sinusvormige trillingen de gemoduleerde trilling is opgebouwd.

We zullen dit gaan onderzoeken bij de trilling voorgesteld door:

$$U = \hat{U}_1(1 + m \sin pt) \sin \omega t.$$

Na wegwerken der haakjes krijgen we:

$$U = \hat{U}_1 \sin \omega t + m\hat{U}_1 \sin \omega t \sin pt.$$

Het laatste product is volgens een bekende formule uit de goniometrie te herleiden:

$$-2 \sin a \sin b = \cos(a + b) - \cos(a - b)$$

$$\text{Dus: } \sin \omega t \sin pt = -\frac{1}{2} \cos(\omega + p)t + \frac{1}{2} \cos(\omega - p)t.$$

$$\text{Dit geeft: } U = \hat{U}_1 \sin \omega t - \frac{1}{2} m\hat{U}_1 \cos(\omega + p)t + \frac{1}{2} m\hat{U}_1 \cos(\omega - p)t.$$

Hieruit blijkt dat een in amplitude gemoduleerd signaal dat met een sinusvormige trilling is gemoduleerd, opgebouwd is uit drie sinusvormige hoogfrequent trillingen, waarvan de frequenties ω , $\omega + p$ en $\omega - p$ zijn.

De eerste is gelijk aan de draaggolfrequentie, terwijl de tweede en derde frequentie respectievelijk een laagfrequent aantal perioden hoger en lager is dan de draaggolfrequentie.

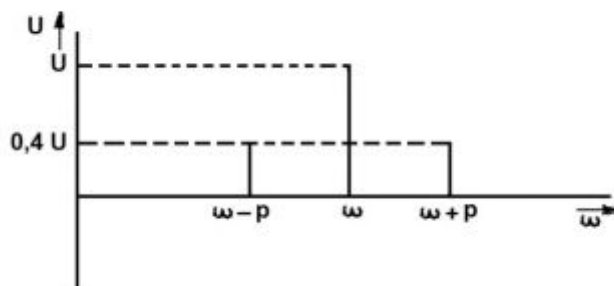


Fig. 8,16. Amplitude-frequentiediagram van een in amplitude gemoduleerde trilling.

In fig. 8,16 is een amplitude-frequentiediagram van een in amplitude gemoduleerd signaal getekend voor een modulatie diepte van 80 %.

De componenten met de verschil- en somfrequenties, zijcomponenten genaamd, hebben bij 80 % modulatie diepte of $m = 0,8$ een amplitude $\frac{1}{2} m\hat{U}_1 = 0,4 \hat{U}_1$.

De frequentieafstand van de zijcomponenten tot de draaggolfrequentie wordt bepaald door de frequentie van de modulerende trilling.

In fig. 8,17 is een amplitude-frequentiediagram van een in amplitude gemoduleerde trilling weergegeven voor het geval dat de draaggolf tegelijkertijd door een trilling van 30 Hz met een modulatie diepte van 40 % en een trilling met een frequentie van 15000 Hz met een modulatie diepte van 30 % wordt gemoduleerd.

We hebben hierbij de frequenties op de horizontale as in Hertz aangegeven. Gaan we uit van de gedachte dat de modulerende trillingen alle in het audiodoelgebied (het frequentiegebied der geluidsfrequenties) gelegen zijn, dan kunnen we praktisch als hoogste frequentie 15000 Hz en als laagste 30 Hz aannemen. De zijcomponenten die hierbij optreden, zijn in fig. 8,17 aangegeven. Alle geluidsfrequenties tussen 30 en 15000 Hz kunnen ook al-of-niet gelijktijdig voorkomen. Alle hierbij voorkomende zijcomponenten zullen tussen de reeds getekende componenten gelegen zijn.

R.T.

124 W.T.

Nadruk verboden

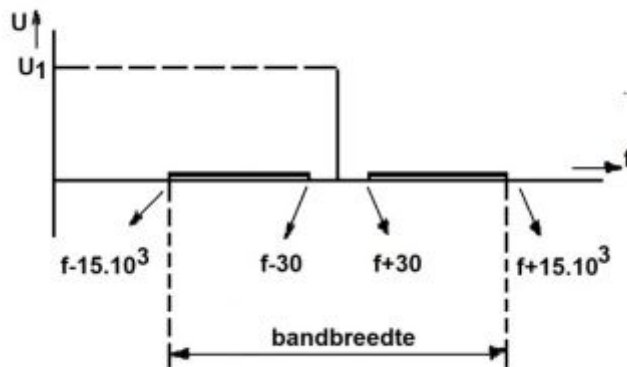


Fig. 8,17. Amplitude-frequentiediagram van een in amplitude gemoduleerde trilling.

Het frequentiegebied dat in beslag genomen wordt door alle zijcomponenten met de somfrequenties of alle componenten met de verschillfrequenties wordt een zijband van de in amplitude gemoduleerde trilling genoemd.

In fig. 8,17 zijn de zijbanden door een dikke lijn aangegeven.

Het totale frequentiegebied dat in beslag wordt genomen door het gehele in amplitude gemoduleerde signaal wordt de bandbreedte genoemd.

8.8. De effectieve waarde van een in amplitude gemoduleerde trilling

De totale effectieve waarde van de drie sinusvormige componenten die de in amplitude gemoduleerde trilling, bij modulatie met een sinusvormige trilling, bevat, wordt weer bepaald door de wortel uit de som van de kwadraten der effectieve waarden der componenten.

$$\begin{aligned} U_{gemodeff} &= \sqrt{(\hat{U}_{1eff})^2 + \left(\frac{1}{2} m \hat{U}_{1eff}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} m \hat{U}_{1eff}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\hat{U}_{1eff})^2 + \frac{1}{4} m^2 (\hat{U}_{1eff})^2 + \frac{1}{4} m^2 (\hat{U}_{1eff})^2} = \\ &= \hat{U}_{1eff} \sqrt{1 + \frac{1}{2} m^2}. \end{aligned}$$

Bij een signaal dat 100 % gemoduleerd is, is de effectieve waarde gelijk aan de wortel uit $\frac{3}{2}$ maal de effectieve waarde van de draaggolf ($m = 1$).

Voorbeeld:

Bepaal de effectieve waarde van een in amplitude gemoduleerd signaal als de amplitude van de draaggolf 2 A en de modulatie diepte 80 % is.

Oplossing:

De effectieve waarde berekenen we uit:

$$\begin{aligned} I_{AMeff} &= \hat{I}_{1eff} \sqrt{1 + \frac{1}{2} m^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 0,32} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1,32} = \\ &= \sqrt{2,64} = 1,63 \text{ A.} \end{aligned}$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 193 t/m 195.



8.9. Het vectordiagram van een in amplitude gemoduleerde trilling

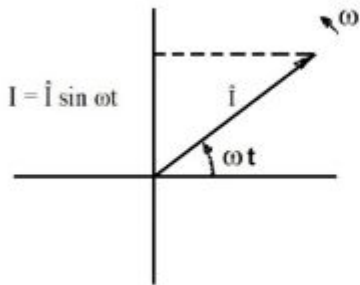


Fig. 8,18 Vectordiagram met roterende vector.

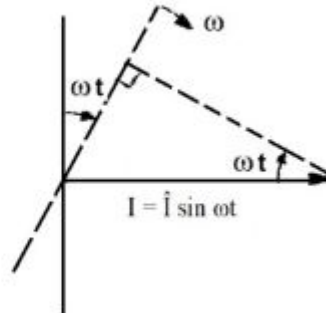


fig. 8,19. Vectordiagram met roterende tijdlijn.

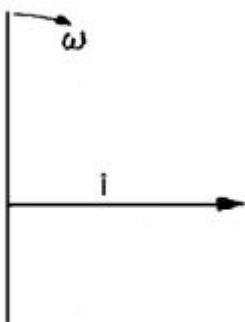


Fig. 8,20. Vectordiagram voor $I = \hat{I} \sin \omega t$ op het tijdstip $t = 0$.

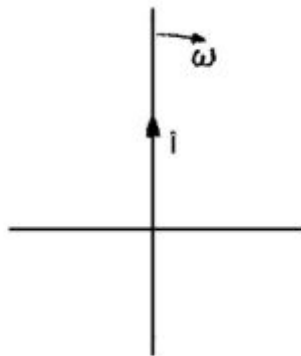


fig. 8,21. Vectordiagram voor $I = \hat{I} \cos \omega t$ op het tijdstip $t = 0$.

rechtsond draait.

Als we bedenken dat de stippelijnen loodrecht op elkaar staan, zal het duidelijk zijn dat de projectie op de roterende lijn (de tijdlijn) gelijk is aan $I = \hat{I} \sin \omega t$.

Tekenen we de vector voor de stroom $I = \hat{I} \sin \omega t$ op het tijdstip $t = 0$, dan verkrijgen we fig. 8,20. De tijdlijn bevindt zich nu nog in verticale stand en de projectie van de vector daarop is gelijk aan nul.

De stroom $I = \hat{I} \cos \omega t$ in een vectordiagram op het tijdstip $t = 0$ getekend, is in fig. 8,21 weergegeven. De vector is nu samenvallend met de verticaal staande tijdlijn getekend, zodat de projectie van de vector daarop gelijk is aan de vectorlengte en dus maximaal is, hetgeen overeenkomt met de waarde van een cosinusfunctie op het tijdstip $t = 0$.

Wordt een stroom $I = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)$ door een vector op het tijdstip $t = 0$ getekend, dan krijgen we fig. 8,22. Een stroom $I = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$ geeft het vectordiagram volgens fig. 8,23.

Het gebruik van vectordiagrammen met roterende tijdlijn geeft vooral veel vereenvoudiging als vectoren getekend moeten worden van sinusvormige of cosinusvormige trillingen, die verschil in

Tot nu toe hebben we vectordiagrammen getekend waarbij de vector met een hoeksnelheid linksom ronddraait. We kunnen de vector wel voor een bepaald ogenblik tekenen, doch voor een ander ogenblik moet een nieuwe vector worden getekend.

We lossen dit anders op. We tekenen de vectoren in de stand die ze innemen op het tijdstip $t = 0$ en laten de verticale as met een hoeksnelheid ω rechtsond draaien. Om de momentele waarde van de voorgestelde trilling te vinden, projecteren we de vector op deze draaiende lijn.

In fig. 8,18 is het vectordiagram getekend waarbij de vector draait van de stroom $I = \hat{I} \sin \omega t$.

In fig. 8,19 is dezelfde stroom in een vectordiagram weergegeven, echter nu door een stilstaande vector waarbij de verticale as

R.T.

126 W.T.

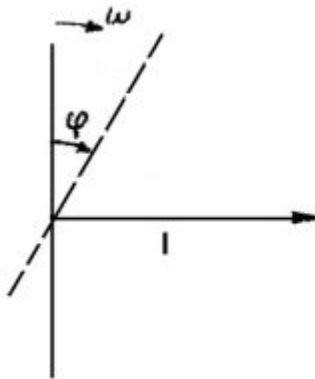


Fig. 8,22. Vectordiagram voor $I = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)$ op tijdstip $t = 0$.

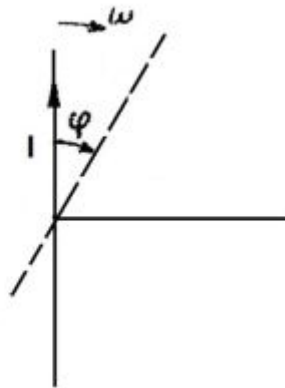


Fig. 8,23. Vectordiagram voor $I = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi)$ op tijdstip $t = 0$.

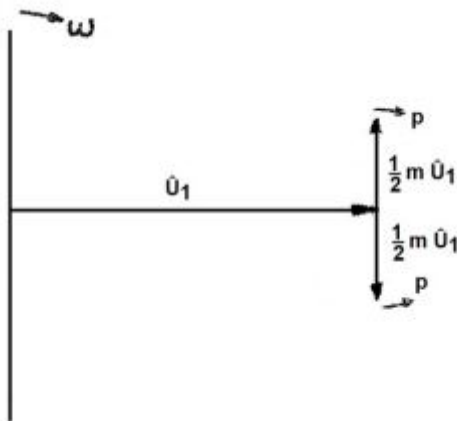


Fig. 8,24 Vectordiagram van een in amplitude gemoduleerde trilling op tijdstip $t = 0$.

p linksom draaien.

We moeten hierbij bedenken dat de hoeksnelheid die twee tegen elkaar in draaiende vectoren ten opzichte van elkaar hebben, bepaald wordt door de som der hoeksnelheden der afzonderlijke vectoren.

Draaien de vectoren met verschillende hoeksnelheden in dezelfde richting, dan is de hoeksnelheid, die ze ten opzichte van elkaar hebben, bepaald door het verschil der hoeksnelheden.

In fig. 8,24 werden de vectoren getekend op het tijdstip $t = 0$. De beide zijcomponenten heffen elkaar op. Op dit moment is de amplitude van de A.M.-trilling gelijk aan die van de draaggolf.

Nadruk verboden

frequentie hebben zoals bij in amplitude gemoduleerde trillingen het geval is.

We gebruiken allereerst de in het voorgaande afgeleide uitdrukking voor een in amplitude gemoduleerd signaal.

$$U_{AM} = \hat{U}_1 \sin \omega t + \frac{1}{2} m \hat{U}_1 \cos(\omega - p)t + -\frac{1}{2} m \hat{U}_1 \cos(\omega + p)t.$$

In fig. 8,24 is de vector voor de component $\hat{U}_1 \sin \omega t$ getekend. De vector die de component

$\frac{1}{2} m \hat{U}_1 \cos(\omega - p)t$ voorstelt, zou in de oorsprong samenvallend met de tijdlijn getekend moeten worden. Daar we uiteindelijk de som van de vectoren moeten bepalen is het gemakkelijker deze vector loodrecht op het einde van \hat{U}_1 te tekenen. Daar de hoeksnelheid van deze vector niet ω maar $\omega - p$ is, dus kleiner dan ω , laten we deze vector in dezelfde richting als ω met een hoeksnelheid p rechtsom draaien.

De component $-\frac{1}{2} m \hat{U}_1 \cos(\omega + p)t$ moet ook evenwijdig met de tijdlijn op tijdstip $t = 0$ getekend worden, echter ten gevolge van het minteken dat ervoor staat, in negatieve richting worden uitgezet. Daar de frequentie van deze component p groter is dan ω laten we deze vector met een hoeksnelheid

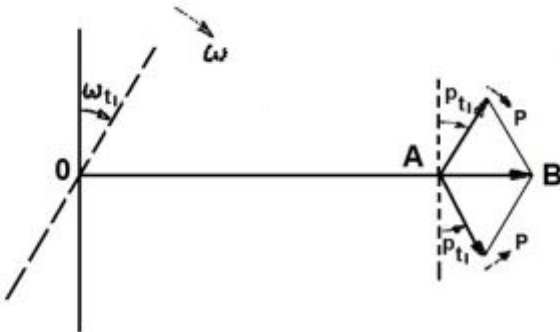


Fig. 8,25. Vectordiagram van A.M.-trilling op tijdstip t_1 .

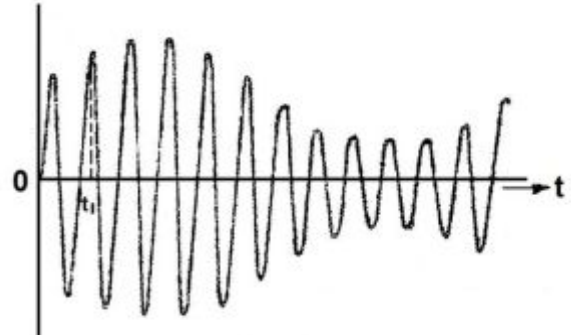


Fig. 8,26. Het in amplitude gemoduleerde signaal als functie van de tijd.

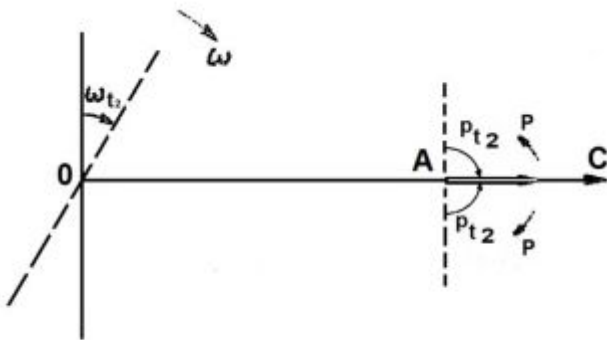


Fig. 8,27. Vectordiagram A.M.-trilling Op tijdstip t_2 .

In fig.8,25 zijn de vectoren getekend op het tijdstip dat de vectoren met hoeksnelheid p en hoek pt , die kleiner is dan $\frac{\pi}{2}$, hebben doorlopen. Tellen we deze twee vectoren bij elkaar op, dan vinden we als som de vector AB die in het verlengde ligt van de draaggolfvector OA . De amplitude van de A.M.-trilling is op dit moment gelijk aan de vector OB .

In het tijdvak dat de vectoren met hoeksnelheid p een hoek pt_1 hebben doorlopen, heeft de tijdlijn een veel grotere hoek doorlopen, daar ω een veel hogere frequentie is dan p .

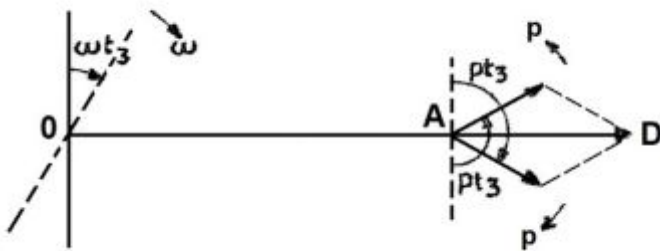


Fig. 8,28. Als fig. 8,25 op tijdstip t_3 .

De tijdlijn zal in dezelfde tijd een groot aantal omwentelingen gemaakt hebben. Wij geven de hoek ωt_1 slechts aan ten opzichte van de stand op $t = 0$. De amplitude OB in fig. 8,25 komt bijvoorbeeld overeen met de amplitude van de trilling volgens fig. 8,26 op tijdstip t_1 .

Laten we de vectoren met hoeksnelheid p een hoek pt_2 doorlopen die gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$, dan vallen beide vectoren samen (zie fig. 8,27). De som hiervan wordt dus verkregen door ze bij elkaar op te tellen. De amplitude van de A.M.-trilling is nu overeenkomstig de vectorlengte OC . De hoek, die de tijdlijn in de tijd t_2 heeft doorlopen, is aangeduid met ωt_2 .

De amplitude van de gemoduleerde trilling heeft nu haar maximale waarde bereikt. In fig. 8,28 hebben de kleine vectoren een hoek pt_3 doorlopen; de resulterende amplitude wordt nu weer kleiner en gelijk aan OD .

R.T.

128 W.T.

Nadruk verboden

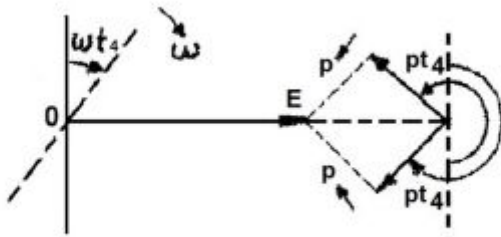


Fig. 8,29. Als fig. 8,25 op tijdstip t_4 .

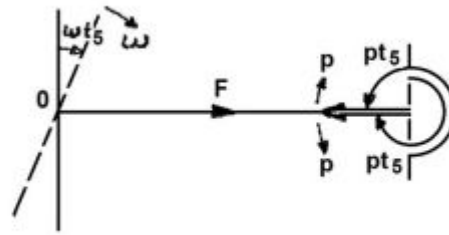


Fig. 8,30. Als fig. 8,25 op tijdstip t_5 .

In fig. 8,29 hebben de kleine vectoren een hoek pt_4 doorlopen. De resulterende amplitude is gelijk aan OE .

Fig. 8,30 geeft het geval weer dat de kleine vectoren een hoek pt_5 , die gelijk is aan $\frac{3}{2}\pi$, doorlopen. De resulterende amplitude is nu ook kleiner dan die van de draaggolf (OF). We zien uit deze vectordiagrammen dus, dat de amplitude van de in amplitude gemoduleerde trilling varieert tussen de waarde OC van fig. 8,27 en OF van fig. 8,29.

8.10. De in amplitude gemoduleerde trilling toegevoerd aan een afgestemde kring

In de praktijk komt het dikwijls voor dat een in amplitude gemoduleerde stroom of spanning ω toegevoerd wordt aan een keten die afgestemd is op de draaggolf van de trilling. Daar de afgestemde kring in het algemeen voor verschillende frequenties verschillende impedanties vertegenwoordigt, zullen de zijcomponenten van de in amplitude gemoduleerde trilling een andere impedantie ondervinden dan de draaggolf.

Om dit te kunnen overzien zullen we eerst de uitdrukking van de impedantie van een serie-schakeling van een spoel, condensator en weerstand in een andere vorm brengen.

De complexe uitdrukking voor de impedantie is:

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

We vermenigvuldigen de gehele vorm met $\omega_0 L$ en delen elk der termen eveneens door $\omega_0 L$, als ω_0 de resonantiefrequentie van de kring is.

$$\bar{Z} = \omega_0 L \left\{ \frac{R}{\omega_0 L} + j \left(\frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) \right\} = \omega_0 L \left\{ \frac{R}{\omega_0 L} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0} \cdot \frac{1}{LC} \right) \right\}.$$

Daar $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ wordt deze vorm voor de impedantie verder:

$$\bar{Z} = \omega_0 L \left\{ \frac{R}{\omega_0 L} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right\}.$$

De term $\frac{R}{\omega_0 L}$ wordt de verliesfactor genoemd en voorgesteld door de letter δ (delta) en de term

$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ wordt relatieve verstemming genoemd en aangegeven met de letter β .

De eerste term is het omgekeerde van de reeds bekende kwaliteitsfactor Q . In de tweede term wordt het verschil tussen de frequentie van de aangelegde spanning en de resonantiefrequentie van de keten met betrekking tot de resonantiefrequentie van de keten weergegeven.

Dus: $\bar{Z} = \omega_0 L (\delta + j\beta)$ en de absolute waarde van de impedantie is $Z = \omega_0 L \sqrt{\delta^2 + \beta^2}$.

Is de aangelegde spanning voor te stellen door $U = \hat{U} \sin \omega t$, dan is de amplitude van de stroom in de keten:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega_0 L \sqrt{\delta^2 + \beta^2}}.$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 196 t/m 198.

8.10. De in amplitude gemoduleerde trilling toegevoerd aan een afgestemde Kring (vervolg)

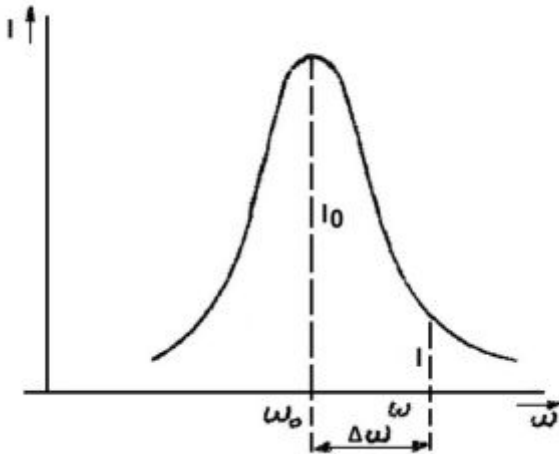


Fig. 8,31. Resonantiekromme van een serieschakeling van L , C en R .

Heeft de aangelegde spanning een frequentie gelijk aan de resonantiefrequentie ω_0 van de keten, dan is de amplitude van de stroom $\hat{I}_0 = \frac{\hat{U}}{R}$ (zie fig.8,31).

De verhouding α tussen de stroom in resonantie en de stroom bij de willekeurige frequentie ω is:

$$\alpha = \frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{\frac{\hat{U}}{\omega_0 L \sqrt{\delta^2 + \beta^2}}}{\frac{\hat{U}}{R}} = \frac{R}{\omega_0 L \sqrt{\delta^2 + \beta^2}} \text{ of: } \frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{\frac{R}{\omega_0 L}}{\sqrt{\delta^2 + \beta^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\delta^2}}}$$

Daar $\delta = \frac{1}{Q}$ wordt de verhouding:

$$\alpha = \frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}}.$$

Deze uitdrukking leent zich bij uitstek om vlug enige punten van een resonantiekromme te berekenen. Voor elk andere frequentie is een andere waarde van β te berekenen.

Voor kleine frequenties die weinig afwijken van de resonantiefrequentie is bovengenoemde uitdrukking nog iets te vereenvoudigen door een kleine benadering toe te passen.

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega + \omega_0}{\omega}.$$

Indien ω en ω_0 weinig verschillen kunnen we met een kleine verwaarlozing $\frac{\omega + \omega_0}{\omega}$ gelijk aan 2 stellen.

Als we verder $\omega - \omega_0$ (de verstemming) voorstellen door $\Delta\omega$, dan wordt de vorm voor

$\beta = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$. Hiermee wordt de verhouding tussen de stromen buiten de resonantiefrequentie:

$$\alpha = \frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}}.$$

Het is natuurlijk ook mogelijk de verhouding der impedanties bij de frequentie ω en ω_0 vast te leggen. Noemen we de resonantie-impedantie z_0 en de impedantie bij de frequentie ω , z , dan is:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{z} \text{ en } \hat{I}_0 = \frac{\hat{U}}{z_0} \text{ dus } \frac{\hat{I}}{\hat{I}_0} = \frac{\frac{\hat{U}}{z}}{\frac{\hat{U}}{z_0}} = \frac{z_0}{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Voorbeeld:

Een serieschakeling van een spoel ($L = 400 \mu H$) een weerstand $R = 5 \Omega$ met een condensator is afgestemd op een frequentie van $\omega = 10^6$.

Op deze keten is werkzaam een spanning \hat{U}_1 van 10 V met de resonantiefrequentie ω_0 en een spanning \hat{U}_2 van 20 V met een frequentie ω van $105 \cdot 10^4$. Bepaal de effectieve waarde van de totaalstroom die in de keten vloeit.

R.T.

130 W.T.

Nadruk verboden

Oplossing:

De stroom ten gevolge van de spanning \hat{U}_1 is: $\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$.

Voor het berekenen van de stroom bij de frequentie ω bepalen we eerst de impedantie bij deze frequentie.

$$z = z_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2} = 5 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \times 5 \cdot 10^4}{10^6} \times \frac{10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{5}\right)^2} = 5 \sqrt{1 + 64} = 5\sqrt{65} \approx 40 \Omega \text{ (de verstemming } \Delta\omega \text{ is gelijk aan } 5 \cdot 10^4 \text{).}$$

De stroom bij de frequentie ω is dan: $\hat{I}_2 = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \text{ A}$. De effectieve waarde van de totaalstroom wordt bepaald uit:

$$I_{teff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 + \frac{1}{8}} = \sqrt{2,125} = 1,46 \text{ A}.$$

Sluiten we een in amplitude gemoduleerde spanning aan op een serieschakeling van L , C en R , dan zal de modulatie diepte van de stroom afwijken van die van de spanning.

Stellen we de in amplitude gemoduleerde spanning voor door

$U_{gemod} = \hat{U}_1(1 + m \sin pt) \cos \omega t$, dan kunnen we deze weer opgebouwd denken uit drie componenten. We gaan verder uit van de afspraak dat de kring is afgestemd op de frequentie ω .

$$\begin{aligned} U_{gemod} &= \hat{U}_1 \cos \omega t + m \hat{U}_1 \cos \omega t \sin pt = \\ &= \hat{U}_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} m \hat{U}_1 \sin(\omega + p)t - \frac{1}{2} m \hat{U}_1 \sin(\omega - p)t. \end{aligned}$$

Afgezien van de onderlinge faseverschuiving der componenten kunnen we de stroom als volgt uitdrukken:

$$I_{gemod} = \frac{\hat{U}_1}{z_0} \cos \omega t + \frac{\frac{1}{2} m \hat{U}_1}{z} \sin(\omega + p)t - \frac{\frac{1}{2} m \hat{U}_1}{z} \sin(\omega - p)t.$$

Daar $z = \frac{z_0}{\alpha}$ wordt deze vorm:

$$I_{gemod} = \frac{\hat{U}_1}{z_0} \cos \omega t + \frac{\frac{1}{2} m \alpha \hat{U}_1}{z_0} \sin(\omega + p)t - \frac{\frac{1}{2} m \alpha \hat{U}_1}{z_0} \sin(\omega - p)t.$$

De verhouding van de amplitude der zijcomponenten tot die der draaggolf is bij een in amplitude gemoduleerde trilling steeds gelijk aan $\frac{1}{2} m$ (de halve modulatie diepte).

Daar de stroom in bovengenoemde keten ook een in amplitude gemoduleerde trilling voorstelt, geldt dus ook dat de verhouding van de amplitude der zijcomponenten tot de amplitude der draaggolf gelijk is aan de halve modulatie diepte van de stroom.

Duiden we de modulatie diepte van de stroom aan met m_1 , dan is:

$$\frac{1}{2} m_1 = \frac{\frac{1}{2} m \alpha \hat{U}_1}{\frac{z_0}{\hat{U}_1}} = \frac{1}{2} m \alpha \text{ of: } m_1 = m \alpha.$$

Daar α kleiner is dan 1, is de modulatie diepte van de stroom dus kleiner geworden dan de modulatie diepte van de aangelegde spanning.

Dit zal duidelijk worden als we bedenken dat de kring voor de trillingen met frequenties $(\omega + p)$ en $(\omega - p)$ een grotere impedantie heeft dan voor de trilling met de frequentie ω (de draaggolf).

De stroom, die door de zijcomponenten wordt veroorzaakt, zal dus kleiner zijn dan deze zou moeten zijn om de oorspronkelijke modulatie diepte van de spanning te handhaven.

Voor een parallelschakeling van een condensator met spoel en weerstand kan eenzelfde uitdrukking worden afgeleid als we voor de serieschakeling vonden.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 199 t/m 201.

8.10. De in amplitude gemoduleerde trilling toegevoerd aan een afgestemde kring (vervolg)

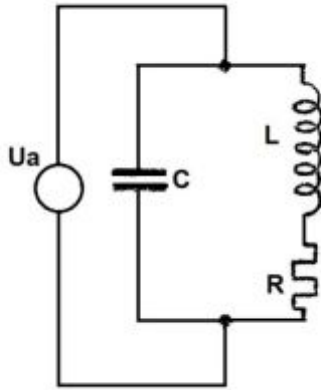


Fig. 8.32. Verstemming bij een parallelschakeling.

De impedantie van de keten fig. 8,32 is:

$$Z = \frac{\frac{-j}{\omega C}(R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Bij dergelijk afgestemde kringen is in het algemeen R veel kleiner dan ωL zodat we geen grote fout maken als we in de teller R verwaarlozen ten opzichte van ωL .

$$\bar{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Uit het voorgaande is gebleken dat we voor de noemer van de breuk mogen schrijven:

$$\omega_0 L(\delta + j\beta), \text{ dus:}$$

$$\bar{Z} = \frac{\frac{L}{C}}{\omega_0 L(\delta + j\beta)}.$$

De resonantie-impedantie van de parallelketen is: $Z_0 = \frac{L}{CR}$. Hiermee wordt:

$$\frac{\bar{Z}}{Z_0} = \frac{\frac{L}{C}}{\omega_0 L(\delta + j\beta)} = \frac{R}{\omega_0 L(\delta + j\beta)} = \frac{\frac{R}{\omega_0 L}}{\delta + j\beta} = \frac{\delta}{\delta + j\beta} = \frac{1}{1 + j\beta Q}.$$

De absolute waarde van deze verhouding wordt:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}} = \alpha.$$

Voor kleine verstemmingen mogen we ook deze vorm weer benaderen tot:

$$\alpha = \frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}}.$$

Voorbeeld:

Een parallelschakeling van een condensator met een spoel ($L = 500 \mu H$) en een weerstand $R = 5 \Omega$ is afgestemd op een frequentie $\omega_0 = 10^6$. De stroom die aan deze keten wordt toegevoerd is in amplitude gemoduleerd met een modulatie diepte $m = 0,8$. De frequentie van de draaggolf is $\omega_0 = 10^6$, de amplitude 1 mA en de modulatiefrequentie $p = 10^4$.

Bepaal de modulatie diepte en de effectieve waarde van de spanning die over de kring wordt ontwikkeld.

Oplossing:

De modulatie diepte van de spanning is α maal de modulatie diepte van de stroom, dus: $m_1 = \alpha m$.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 10^4}{10^6} \cdot \frac{10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,446.$$

De nieuwe modulatie diepte is dus: $m_1 = \alpha m = 0,446 \times 0,8 = 0,357$.

De draaggolf ontwikkelt over de kring een spanning

$$\hat{U}_0 = \hat{I}_0 \frac{L}{CR} = \hat{I}_0 \frac{\omega_0^2 L^2}{R} = 10^{-3} \cdot \frac{10^{12} \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{5} = 50 V.$$

R.T.

132 W.T.

Nadruk verboden

De effectieve waarde van de spanning over de keten berekenen we uit:

$$U_{efftot} = U_{0eff} \sqrt{1 + \frac{1}{2} m_1^2} = 50 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \times 0,357^2} =$$

$$= 50 \sqrt{1 + 0,0637} = 50 \sqrt{1,0637} = 50 \times 1,06 = 53 \text{ volt.}$$

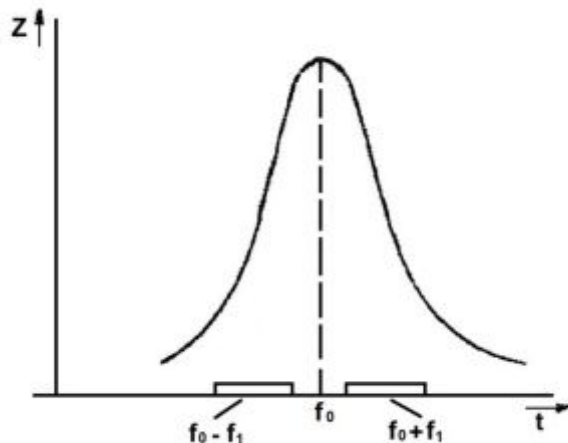


Fig. 8,33. Vermindering van de modulatie diepte t.g.v. een afgestemde kring.

Bezien we nu het gehele gemoduleerde signaal eens in verband met een afgestemde parallelkring, dan kunnen we dit weergeven zoals fig. 8,33 dit aangeeft. De kring is afgestemd op de draaggolf frequentie f_0 van de in amplitude gemoduleerde trilling die op de kring wordt aangesloten. De modulerende frequentie is f_1 . Is de modulatie frequentie een hoge frequentie, dan liggen de zijbandfrequenties $f_0 + f_1$ en $f_0 - f_1$ ver verwijderd van de draaggolf frequentie. Naarmate de frequentie van de modulerende trilling lager is, liggen de zijbandfrequenties dichterbij de draaggolf frequentie.

De zijbandfrequenties behorende bij hoge modulatie frequenties ondervinden dus een kleinere impedantie dan

de zijbandfrequenties behorende bij lage modulatie frequenties.

Voeren we een in amplitude gemoduleerde stroom aan de parallelketen toe, dan zullen de zijbandfrequenties behorende bij hoge modulatie frequenties een kleinere spanning over de kring veroorzaken dan de zijbandfrequenties behorende bij lage modulatie frequenties.

In de spanning over de keten, die ook weer in amplitude gemoduleerd zal zijn, komen de hogere modulatie frequenties dus zwakker voor als de lage modulatie frequenties. De modulatie diepte voor de hoge frequenties in de spanning over de kring is dus kleiner geworden ten opzichte van de modulatie diepte bij de lage frequenties.

We kunnen de nieuwe modulatie diepte m_1 die bij de spanning voorkomt als volgt berekenen. De stroom die we toevoeren is:

$$I = \hat{I}_1 (1 + m \cos pt) \cos \omega t = \hat{I}_1 \cos \omega t + m \hat{I}_1 \cos \omega t \cos pt =$$

$$= \hat{I}_1 \cos \omega t + \frac{1}{2} m \hat{I}_1 \cos(\omega + p)t + \frac{1}{2} m \hat{I}_1 \cos(\omega - p)t .$$

Stellen we de impedantie in resonantie (voor de frequentie ω) voor door Z_0 en die voor de frequentie $\omega + p$ en $\omega - p$ voor door Z , dan wordt de uitdrukking voor de gemoduleerde spanning over de kring:

$$U = \hat{I}_1 Z_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} m \hat{I}_1 Z \cos(\omega + p)t + \frac{1}{2} m \hat{I}_1 Z \cos(\omega - p)t .$$

Daar de verhouding tussen de amplitude van de zijbandtrilling tot die der draaggolf de helft van de modulatie diepte is, kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{2} m_1 = \frac{\frac{1}{2} m \hat{I}_1 Z}{\hat{I}_1 Z_0} . \quad m_1 = m \frac{Z}{Z_0} \text{ en daar } \frac{Z}{Z_0} = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} \text{ is de nieuwe}$$

modulatie diepte, dus: $m_1 = \alpha m$.



Naarmate de Q -factor van de kring groter is, zal de modulatie diepte meer achteruitgaan; bij hoge modulatiefrequentie meer dan bij lage modulatiefrequentie. Om dus te zorgen dat de modulatie diepte niet te veel vermindert, zullen we dus een kring moeten gebruiken met niet te grote Q -factor, zodat de top van de resonantiekromme een horizontaal verloop krijgt voor het frequentiegebied waar de zijbandfrequenties voorkomen. De zijbandfrequenties in de spanning hebben dan onderling dezelfde verhouding als deze hadden in de toegevoerde stroom, zodat de kwaliteit van het gemoduleerde signaal niet is geschaad.

8.11. Selectiviteit en resonantiebreedte

Bij ontvangst van een in amplitude gemoduleerd signaal streeft men ernaar kringen te gebruiken die, afgestemd op de draaggolffrequentie van de te ontvangen zender, voor alle daarbij behorende zijcomponenten eenzelfde impedantie hebben. Tevens moet de kring voor frequenties buiten de zijbanden van de gemoduleerde trilling een zodanige impedantie bezitten dat deze trillingen zo min mogelijk effect sorteren.

Daar het praktisch moeilijk uitvoerbaar is afstemkringen te maken die voor alle zijbandfrequenties eenzelfde impedantie bezitten, neemt men genoegen met een maximale toelaatbare verzwakking vast te leggen en daarop de eigenschappen van de kring te definiëren.

Om in de gelegenheid te zijn de bijdrage tot de selectiviteit van verschillende kringen te kunnen vergelijken, definiëren we het selectiviteitscijfer.

Onder het selectiviteitscijfer verstaan we de verhouding van de resonantiefrequentie tot de verstemming die nodig is om een verzwakking van $0.7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tot stand te brengen.

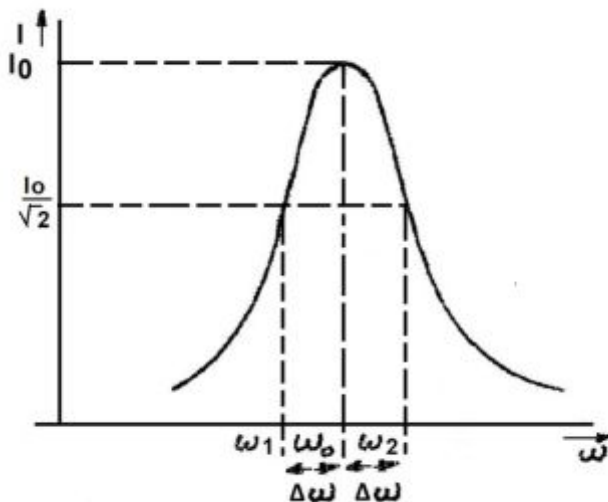


Fig. 8,34. Resonantiekromme ter bepaling van S .

is dus die verstemming die een verzwakking $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ten gevolge heeft. Uit bovenstaande gelijkheid

volgt:
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ en } \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q = 1 \text{ of: } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \text{ en } S = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 2Q = 2 \frac{\omega_0 L}{R}.$$

$$S = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Gaan we uit van de gedachte dat ω_1 en ω_2 niet veel van ω_0 verschillen, dan kunnen we de resonantiekromme symmetrisch onderstellen, dus is $I_1 = I_2$.

Voor de verhouding van I_2 tot I_0 mogen we dan schrijven :

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}}.$$

Stellen we in deze verhouding I_2 gelijk aan $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$, dan kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De verstemming $\Delta\omega$ die in deze verhouding voorkomt,

R.T.

134 W.T.

Nadruk verboden

Daar deze factor ons slechts een verhouding weergeeft, is het nodig nog een grootheid te definiëren; we voegen de resonantiebreedte in.

Onder de resonantiebreedte wordt verstaan het frequentieverschil van die frequentie waarbij een verzwakking van $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$ optreedt.

Dus: $B = 2\Delta f$.

In bovenstaande vonden we reeds dat bij een verzwakking van $0,7$, $\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q = 1$ of:

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \text{ en } B = 2\Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{\omega_0 R}{2\pi\omega_0 L} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}.$$

Men definieert de resonantiebreedte ook wel als het frequentieverschil van die frequenties waarbij de verzwakking $\frac{1}{10}$ is.

We kunnen dan schrijven:

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{10} \text{ of: } 1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2 = 100.$$

Bij verwaarlozing van 1 ten opzichte van 100 wordt:

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q = 10 \text{ en } 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{10 Q}.$$

$$\text{Dus: } B = 2\Delta f = \frac{10}{2\pi} \frac{\omega_0 R}{\omega_0 L} = \frac{10R}{2\pi L}.$$

We zien dat zowel het selectiviteitscijfer als de resonantiebreedte in belangrijke mate bepaald worden door de verhouding $\frac{R}{L}$ van de kring. Bij het beoordelen van een kring dient men eerst na te gaan welke bandbreedte de kring moet doorlaten en daarbij moet dan het selectiviteitscijfer een zo groot mogelijke waarde hebben. De resonantiekromme moet een afgeplatte top en daarbij steile flanken hebben om aan de gestelde eisen te voldoen. Met deze enkelvoudige kringen is het niet gemakkelijk deze een zodanige resonantiekromme te geven dat de zijbanden zoveel mogelijk gelijkmatig worden doorgegeven en de trillingen met frequenties die buiten de zijbanden gelegen zijn zoveel mogelijk te verzwakken. Hebben deze kringen voldoende bandbreedte, dan laten zij in het algemeen de storende frequenties (frequenties die buiten de door te laten zijbandfrequenties liggen) te veel door. De kring is dan niet in staat een gewenste selectie tussen de gewenste en niet gewenste signalen tot stand te brengen. Gebruikt men meerdere enkelvoudige kringen achter elkaar, dan is het wel mogelijk te zorgen dat de zijbandfrequenties nagenoeg gelijkmatig worden doorgegeven, terwijl de selectie ook naar wens is.

Men gebruikt dan bv. drie kringen met een hoge kwaliteitsfactor; de zijbandfrequenties worden door een kring dan vrij veel verzwakt, vergeleken met de resonantiefrequentie (de draaggolf).

De beide andere kringen regelt men dan zo af dat hun resonantiefrequenties gelegen zijn in de zijbanden van de ontvangen signalen.

De twee laatste kringen versterken dan de zijbanden meer dan de draaggolffrequentie (de zijbanden waren door de 1^e kring verzwakt).

Daar de kringen een grote kwaliteitsfactor, dus smalle resonantiekrommen hebben, worden de trillingen buiten de gewenste zijbanden toch maar weinig versterkt.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 202 t/m 209.

Hoofdstuk 9

Gekoppelde kringen

9.1. Inleiding

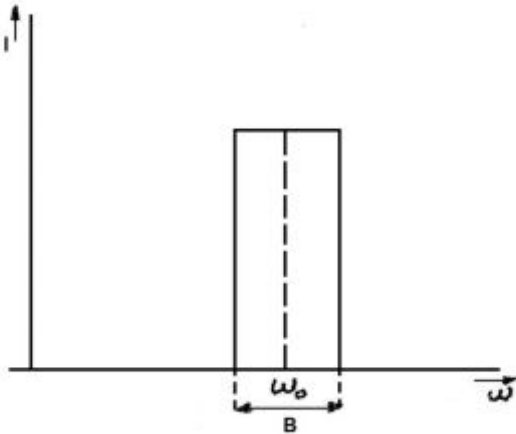


Fig. 9,1. Ideale resonantiekromme.

Zoals we in het voorgaande hebben gezien, moet een afgestemde kring een resonantiekromme hebben, die enerzijds een platte top en anderzijds steile flanken heeft. De ideale resonantiekromme zou de gedaante van een rechthoek moeten hebben, zoals fig. 9,1 dit aangeeft. De bandbreedte, in dit geval de breedte van de rechthoek, moet dan juist de gewenste bandbreedte geven om een gewenst signaal te ontvangen.

Met een enkelvoudige kring is het moeilijk om een resonantiekromme van dit type te benaderen. Wel is het mogelijk een kring te maken, waarbij de top van de resonantiekromme vrijwel vlak verloopt (kleine Q -factor) en ook is het mogelijk een resonantiekromme te krijgen, waarbij de flanken steil verlopen (grote Q -factor), maar tegelijkertijd aan deze voorwaarde voldoen, is met een enkelvoudige kring niet mogelijk.

Om aan deze twee eisen zoveel mogelijk te voldoen moeten we gebruik maken van gekoppelde kringen. Onder gekoppelde kringen verstaan we twee of meer afgestemde kringen die zo zijn opgesteld dat wederzijds energie-overdracht mogelijk is.

We zullen in principe vier schakelingen van gekoppelde kringen onderscheiden, zie fig. 9,2.

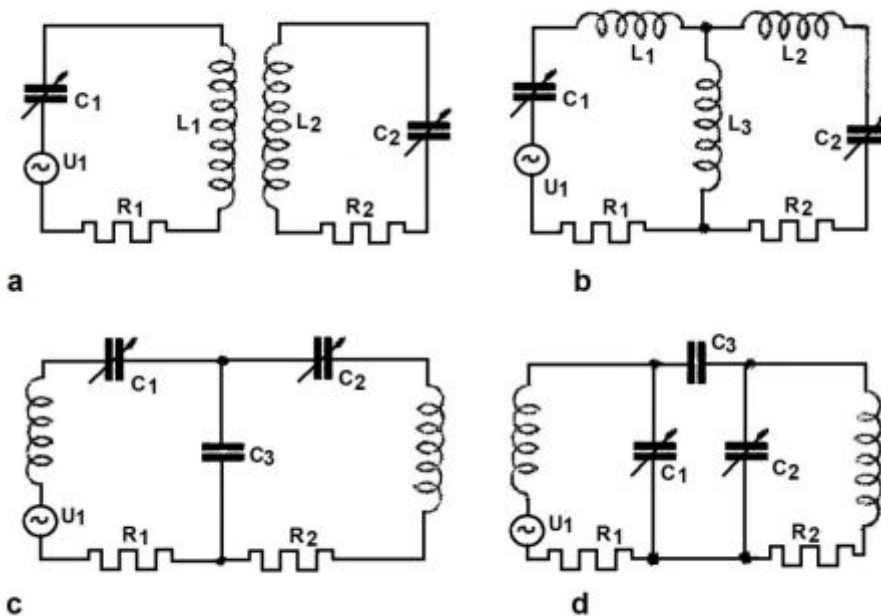


Fig. 9,2. Gekoppelde kringen. a: Indirect inductief gekoppeld stelsel. b: Direct inductief gekoppeld stelsel. c: Direct capacitief gekoppeld stelsel. d: Indirect capacitief gekoppeld stelsel.

In fig. 9,2a is het indirect inductief gekoppelde systeem weergegeven. De primaire kring bestaat uit de serieschakeling van L_1 , C_1 en R_1 en de secundaire kring uit de serieschakeling van L_2 , C_2 en R_2 . De spoelen L_1 en L_2 beïnvloeden elkaar op gelijke wijze als dit bij de transformator plaatsvindt. De koppeling wordt tot stand gebracht doordat een magnetisch krachtenveld wordt opgebouwd, dat zowel door de primaire als door de secundaire spoel wordt omvat. Naarmate de spoelen

meer magnetische flux omvatten, wordt de koppeling vaster.

R.T.

136 W.T.

Nadruk verboden

De koppeling kan gevarieerd worden door de afstand of positie der spoelen L_1 en L_2 ten opzichte van elkaar te veranderen.

De primaire kring is afgestemd op de frequentie $\omega_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ en de secundaire kring op de frequentie $\omega_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$. In de praktijk zijn veelal deze frequenties gelijk, dus: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$.

In fig. 9,2b is het direct inductieve systeem weergegeven. De primaire kring bestaat uit de serieschakeling van L_1 , L_3 , C_1 en R_1 en de secundaire uit de serieschakeling van L_2 , L_3 , C_2 en R_2 .

Als gemeenschappelijke impedantie van de twee kringen komt de spoel L_3 voor, de zogenaamde koppelreactantie. De grootte van de impedantie van L_3 bepaalt de mate van koppeling. Naarmate ωL_3 groter wordt, zal de stroom die door de spanningsbron U_1 wordt geleverd een grotere spanning over de parallelschakeling van L_3 met L_2 , C_2 en R_2 veroorzaken en dus ook een grotere stroom door L_2 , C_2 en R_2 . De koppeling wordt vaster bij vergroting van ωL_3 .

De resonantiefrequentie van de primaire kring is nu $\omega_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3)C_1}}$ en die van de secundaire kring $\omega_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{(L_2 + L_3)C_2}}$. Ook deze frequenties kunnen natuurlijk weer gelijk zijn.

In fig. 9,2c is een directe capacatieve koppeling weergegeven. De primaire kring bestaat hier uit de serieschakeling van L_1 , C_1 , C_3 en R_1 en de secundaire kring uit de serieschakeling van L_2 , C_2 , C_3 en R_2 .

De gemeenschappelijke impedantie wordt gevormd door C_3 , dus: $\frac{1}{\omega C_3}$ is de koppelreactantie. De grootte van deze reactantie bepaalt de mate van koppeling op dezelfde wijze als we zagen bij de spoel L_3 in fig. 9,2b. De resonantiefrequentie van de primaire kring is:

$$\omega_{0_1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_3}{L_1 C_1 C_3}}$$

en die van de secundaire kring:

$$\omega_{0_2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}}} = \sqrt{\frac{C_2 + C_3}{L_2 C_2 C_3}}$$

Ten slotte is in fig. 9,2d het indirecte capacatieve systeem weergegeven. De primaire kring wordt gevormd door de serieschakeling L_1 , C_1 en R_1 en de secundaire kring door de serieschakeling van L_2 , C_2 en R_2 .

De mate van koppeling tussen beide kringen wordt bepaald door de koppelreactantie $\frac{1}{\omega C_3}$.

Naarmate de reactantie van C_3 groter wordt, wordt de koppeling losser, aangezien dan meer spanning over C_3 valt en er minder spanning over de secundaire kring komt te staan.

Het onderscheid tussen directe en indirecte koppeling kan het beste op de volgende wijze worden gezien.

Nemen we bij een directe koppeling de koppelreactantie weg, dan houden de primaire en secundaire kring op te bestaan.

Bij de fig. 9,2b en 9,2c zien we inderdaad dat na verwijdering van de koppelreactantie een resulterende kring overblijft en is er dus geen sprake meer van de afzonderlijke kringen.

Nemen we bij een indirecte koppeling de koppelreactantie weg, dan blijven de primaire en secundaire kringen intact.

9.2. Indirect inductief gekoppelde kringen

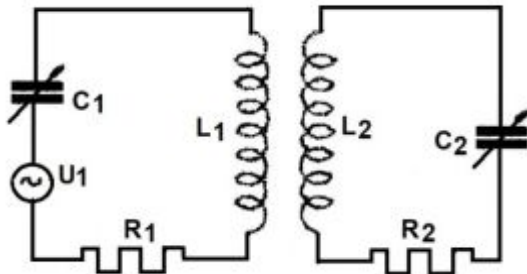


Fig. 9,3. Indirect gekoppeld systeem.

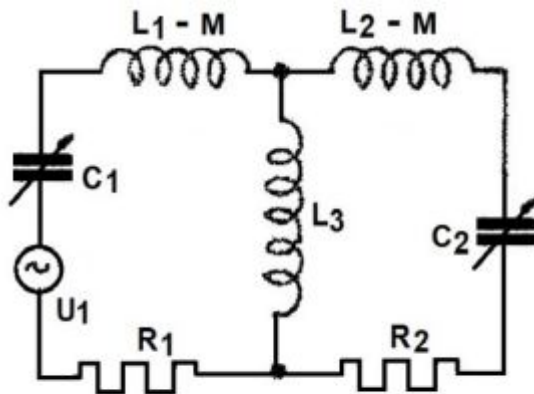


Fig. 9,4 Vervanging van de schakeling volgens fig. 9,3.

Het is nu de spanning, die over de spoel M wordt ontwikkeld, die door de primaire stroom in de secundaire wordt geïnduceerd. Deze emk van inductie in de secundaire keten is 90° in fase verschoven en wel na-ijlend ten opzichte van de primaire stroom. We kunnen deze spanning als volgt uitdrukken:

$$\bar{U}_{i_2} = -j\omega M \bar{I}_1.$$

Ten gevolge van deze spanning vloeit in de secundaire keten een stroom:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{i_2}}{\bar{Z}_2} = \frac{-j\omega M \bar{I}_1}{\bar{Z}_2}.$$

Door deze stroom \bar{I}_2 wordt weer een magnetisch veld opgebouwd dat op zijn beurt een spanning terug induceert in de primaire keten. Deze spanning kunnen we aanduiden met:

$$\bar{U}_{i_1} = -j\omega M \bar{I}_2.$$

Hierin de waarde van \bar{I}_2 gesubstitueerd geeft:

$$\bar{U}_{i_1} = -j\omega M \frac{-j\omega M \bar{I}_1}{\bar{Z}_2} = -\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} \bar{I}_1.$$

In de primaire keten zijn nu twee spanningen in serie werkzaam, nl. U_1 en U_{i_1} .

We zullen nu eerst de eigenschappen van het indirecte inductieve systeem onderzoeken. In fig. 9,3 hebben we nogmaals dit systeem weergegeven. Evenals bij de transformator kunnen we het totale magnetische veld, dat zich bij de spoelen L_1 en L_2 voordoet, splitsen in drie delen.

In de eerste plaats de magnetische flux die zowel door de spoel L_1 als door L_2 wordt omvat. Dit veld is dus het veld dat de wederzijdse energie-overdracht bewerkstelligt. Dit veld kunnen we ontstaan denken door een denkbeeldige spoel die zowel in primaire als in secundaire keten voorkomt. Deze spoel duiden we aan als de wederzijdse inductie en geven hem aan met de letter M (zie fig. 9,4). Deze spoel M is dus ook weer uitgedrukt in Henry's of onderdelen daarvan.

Verder bestaat het totale veld uit een gedeelte dat alleen maar in de primaire kring voorkomt. Dit veld kunnen we ook ontstaan denken door een spoel die alleen in de primaire keten voorkomt. Daar in de primaire keten de spoel L_1 werkzaam is en de spoel M ook in de primaire keten voorkomt, kunnen we de betreffende spoel voorstellen door $L_1 - M$.

Op dezelfde wijze kunnen we het veld, dat alleen in de secundaire keten voorkomt, ontstaan denken door een spoel $L_2 - M$, die alleen in de secundaire keten voorkomt.

R.T.

138 W.T.

Nadruk verboden

De som van deze spanningen moet dus over de impedantie van de primaire keten staan, dus:

$$U_1 + \bar{U}_{i_1} = \bar{I}_1 \bar{Z}_1,$$

of:

$$U_1 = \bar{I}_1 \bar{Z}_1 - \bar{U}_{i_1} = \bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} \bar{I}_1$$

$$U_1 = \bar{I}_1 \left(\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} \right).$$

De stroom die in de primaire keten van dit gekoppelde stelsel zal vloeien is dus:

$$\bar{I}_1 = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}}.$$

De impedantie die we aan de primaire klemmen van dit gekoppelde stelsel aantreffen, is dus:

$$\bar{Z}_t = \bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}.$$

Als we ωM de koppelreactantie noemen, dan kunnen we de totale impedantie van dit stelsel als volgt definiëren:

De totale impedantie, gemeten aan de primaire klemmen van het gekoppelde stelsel wordt bepaald door de primaire impedantie vermeerderd met de koppelreactantie in het kwadraat gedeeld door de secundaire impedantie.

Zoals we later nog zullen zien, geldt deze definitie voor alle gekoppelde systemen. We hebben het gehele gekoppelde stelsel nu vervangen door een enkele kring, bestaande uit de serieschakeling van \bar{Z}_1 en $\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}$ (zie fig. 9,5), waarin L_1 , C_1 en R_1 de primaire impedantie \bar{Z}_1 vormen.

De invloed van de secundaire keten op de primaire keten wordt vertegenwoordigd door de belastingsimpedantie $\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}$. Hiermee is de secundaire kring dus vervangen door de equivalente

impedantie $\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}$ in de primaire kring.

Afhankelijk van de frequentie van de aangelegde spanning zal \bar{Z}_2 zich gedragen als een serieschakeling van een weerstand en zelfinductie of een serieschakeling van een weerstand en condensator. Door deze reactantie zal de vervangingsimpedantie dus een andere resonantiefrequentie krijgen die hoger of lager ligt dan de frequentie ω_0 .

De weerstand die in $\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}$ voorkomt geeft aan, dat door de primaire stroom energie wordt geleverd aan de secundaire kring.

De totale ohmse weerstand van de vervangingsketen is dus groter dan die was van de primaire kring alleen. De totale Q -factor is

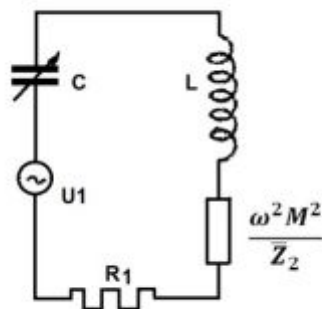


Fig. 9,5. Vervanging van de schakeling volgens fig. 9,3.

dus ook kleiner.

Bij die frequentie waarbij de kring \bar{Z}_2 in resonantie is, wordt de impedantie $\frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}$ een reële grootheid, dus slechts een ohmse weerstand.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 210 t/m 214.



9.3. De resonantiefrequentie van het gekoppelde stelsel.

Voor de primaire impedantie kunnen we schrijven $\bar{Z}_1 = \omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta)$ en voor de secundaire impedantie $\bar{Z}_2 = \omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta)$. De totale impedantie wordt hiermee:

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta) + \frac{\omega^2 M^2}{\omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta)}.$$

Na van de breuk teller en noemer vermenigvuldigd te hebben met de toegevoegde complexe tweeterm van de noemer krijgen we:

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta) + \frac{\omega^2 M^2 (\delta_2 - j\beta)}{\omega_0 L_2 (\delta_2^2 + \beta^2)}$$

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\omega^2 M^2 (\delta_2 - j\beta)}{\omega_0^2 L_1 L_2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right\}$$

De mate van koppeling tussen primaire en secundaire kring geven we aan met de koppelfactor k . We definiëren deze koppelfactor als volgt:

De koppelfactor wordt bepaald door een koppelreactantie, gedeeld door de wortel uit het product van de gelijksoortige reactanties van primaire en secundaire kring.

Dus: $k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \times \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$. Hieruit volgt voor de wederzijdse inductie $M = k\sqrt{L_1 L_2}$.

Vullen we deze waarde voor M in de verkregen uitdrukking voor Z_t , dan geeft dit:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2 (\delta_2 - j\beta)}{\omega_0^2 L_1 L_2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right\} = \\ &= \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\omega^2 k^2 (\delta_2 - j\beta)}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right\} = \\ &= \omega_0 L_1 \left\{ \left(\delta_1 + \frac{\omega^2 k^2 \delta_2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right) + j \left(\beta - \frac{\omega^2 k^2 \beta}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Er zal tussen de primair aangelegde spanning en de primaire stroom geen faseverschuiving optreden als het imaginaire deel van \bar{Z}_t gelijk aan nul is. De resonantiefrequentie kunnen we dus bepalen door het imaginaire deel gelijk nul te stellen.

$$\beta - \frac{\omega^2 k^2 \beta}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} = 0 \quad \beta \left(1 - \frac{\omega^2 k^2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right) = 0$$

Hieraan wordt voldaan ten eerste als $\beta = 0$ en ten tweede als: $1 - \frac{\omega^2 k^2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} = 0$.

Uit de eerste voorwaarde volgt: dat als de frequentie ω van de aangelegde spanning gelijk is aan ω_0 , de resonantiefrequentie van primaire of secundaire kring alleen, ook het gehele gekoppelde stelsel resonantie vertoont. $\left(\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ is gelijk aan nul als $\omega = \omega_0$.

De tweede voorwaarde zullen we eerst enigszins herleiden. De waarde van ω , waarbij deze vorm gelijk is aan nul, geven we aan met ω_r .

$$1 - \frac{\omega_r^2 k^2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_2^2 + \beta^2 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} k^2 = 0$$

$$\beta^2 = \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} k^2 - \delta_2^2 \quad \rightarrow \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} k^2 - \delta_2^2} = \pm \frac{\omega_r}{\omega_0} \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2}$$

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} = \pm \frac{\omega_r}{\omega_0} \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2}$$

$$\omega_r^2 - \omega_0^2 = \pm \omega_r^2 \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2}$$

$$\omega_r^2 \pm \omega_0^2 = \pm \omega_r^2 \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2} = \omega_0^2$$

$$\omega_r^2 \left(1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2} \right) = \omega_0^2.$$

Zonder een al te grote benadering te maken, kunnen we de breuk $\frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}$ gelijk stellen aan 1.

Aan beide zijden gedeeld door de vorm tussen haakjes geeft:

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \pm \sqrt{k^2 - \delta_2^2}} \text{ en}$$

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - \delta_2^2}}}.$$

We zien dat naast de faseresonantiefrequentie ω_0 nog twee frequenties voorkomen waarbij faseresonantie optreedt. We onderscheiden deze frequenties:

$$\omega_{r_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \delta_2^2}}} \text{ en } \omega_{r_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \delta_2^2}}}.$$

De frequentie ω_{r_1} is kleiner en de frequentie ω_{r_2} is groter dan de frequentie ω_0 .

Het verschil tussen ω_{r_1} en ω_0 of ω_{r_2} en ω_0 is afhankelijk van de waarde van de koppelfactor.

Is k groter dan δ_2 , dan spreken we van overkritische koppeling.

Hierbij onderscheiden we dus de drie faseresonantiefrequenties ω_0 , ω_{r_1} en ω_{r_2} .

Is k gelijk aan δ_2 , dan spreken we van kritische koppeling en zijn de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} gelijk aan ω_0 .

Is k kleiner dan δ_2 , dan spreken we van onderkritische koppeling; de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} zijn dan imaginair, zodat alleen ω_0 als faseresonantiefrequentie optreedt.

9.4. Resonantiekromme van primaire stroom als functie van de frequentie

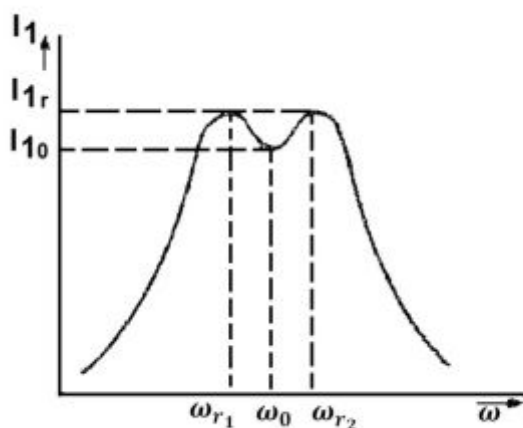


fig. 9,6. Resonantiekromme bij overkritische koppeling.

We kunnen van een gekoppeld stelsel de stroom in de primaire keten als functie van de frequentie in een grafiek uitzetten en krijgen dan een resonantiekromme.

In fig. 9,6 is een kromme opgenomen bij een koppelfactor die groter is dan δ_2 , dus overkritische koppeling. De resonantiekromme bezit twee toppen en wel bij de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} . Bij de frequentie ω_0 vertoont de resonantiekromme een dip. Voor elke willekeurige frequentie is de stroom uit te rekenen door de spanning U_1 te delen door de totale impedantie van het stelsel. deze impedantie hebben we in het voorgaande reeds vastgelegd.

De uitdrukking voor de primaire stroom wordt nu:

$$\bar{I}_1 = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \left\{ \left(\delta_1 + \frac{\omega^2 k^2 \delta_2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right) + j \left(\beta - \frac{\omega^2 k^2 \beta}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right) \right\}}.$$



9.4. Resonantiekromme van primaire stroom als functie van de frequentie (vervolg)

a. De stroom in de primaire kring bij de frequentie ω_0 .

Voor de bepaling van de stroom I_{1_0} bij de frequentie ω_0 kunnen we het imaginaire deel van de impedantie gelijk aan nul stellen, dan blijft alleen het reële gedeelte over.

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \left(\delta_1 + \frac{\omega_0^2 k^2 \delta_2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right)}$$

Denken we de frequentie ω_0 werkzaam, dan is $\beta = 0$; dus wordt: $I_{1_0} = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \left(\delta_1 + \frac{k^2}{\delta_2} \right)}$.

Vullen we voor δ_1 en δ_2 respectievelijk $\frac{R_1}{\omega_0 L_1}$ en $\frac{R_2}{\omega_0 L_2}$ in, dan krijgen we:

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \left(\frac{R_1}{\omega_0 L_1} + \frac{k^2 \omega_0 L_2}{R_2} \right)} = \frac{U_1}{R_1 + K^2 \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2}} \quad \text{en daar } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \text{ wordt dit:}$$

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{M^2}{L_1 L_2} \cdot \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{R_2}} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}}$$

Gaan we uit van de eerste uitdrukking, die we voor de primaire stroom vonden: $\bar{I}_1 = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}}$, dan

kunnen we de uitdrukking op kortere wijze vinden.

Voor de frequentie ω_0 is de impedantie \bar{Z}_1 gelijk aan R_1 en de impedantie \bar{Z}_2 gelijk aan R_2 . De uitdrukking voor I_{1_0} wordt dus:

$$I_{01} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}}$$

b. De stroom in de primaire keten bij de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} .

Voor de bepaling van I_{1_r} kunnen we eveneens het imaginaire deel der totale impedantie gelijk aan nul stellen. De stroom I_{1_r} wordt dus:

$$I_{1_r} = \frac{u_1}{\omega_0 L_1 \left(\delta_1 + \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2}{\omega_0^2 (\delta_2^2 + \beta^2)} \right)}. \quad \text{Na het wegwerken van de haakjes krijgen we:}$$

$$I_{1_r} = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \delta_1 + \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 (\delta_2^2 + \beta^2)}}.$$

We zullen de breuk $\frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 (\delta_2^2 + \beta^2)}$ eerst afzonderlijk herleiden.

We kunnen hiervoor schrijven: $\frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \left\{ \delta_2^2 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} \right)^2 \right\}}$. Brengen we $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ buiten de accoladen, dan geeft

dit: $\frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \left\{ \delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \right)^2 \right\}}$. We vullen nu voor ω_r^2 , die tussen haakjes voorkomt in:

$$\frac{\omega_0^2}{1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}} \delta_2^2} \quad (\text{We gebruiken } \omega_r: \text{ dus de vorm waarin nog geen benadering is toegepast.})$$

R.T.

142 W.T.

Nadruk verboden

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \left\{ \delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\frac{\omega_0^2}{1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2}}} \right)^2 \right\}} = \\ & = \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \left\{ \delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + k^2 \left(1 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2} \right)^2 \right\}} = \\ & = \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} \left\{ \delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} \delta_2^2 \right\}} = \frac{\omega_r^2 k^2 \delta_2 L_1}{\omega_0 \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} k^2} = \omega_0 \delta_2 L_1. \end{aligned}$$

Dit ingevuld in de oorspronkelijke vorm voor I_{1r} geeft:

$$I_{1r} = \frac{U_1}{\omega_0 \delta_1 L_1 + \omega_0 \delta_2 L_1} = \frac{U_1}{\omega_0 L_1 \frac{R_1}{\omega_0 L_1} + \omega_0 L_1 \frac{R_2}{\omega_0 L_2}} = \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}}.$$

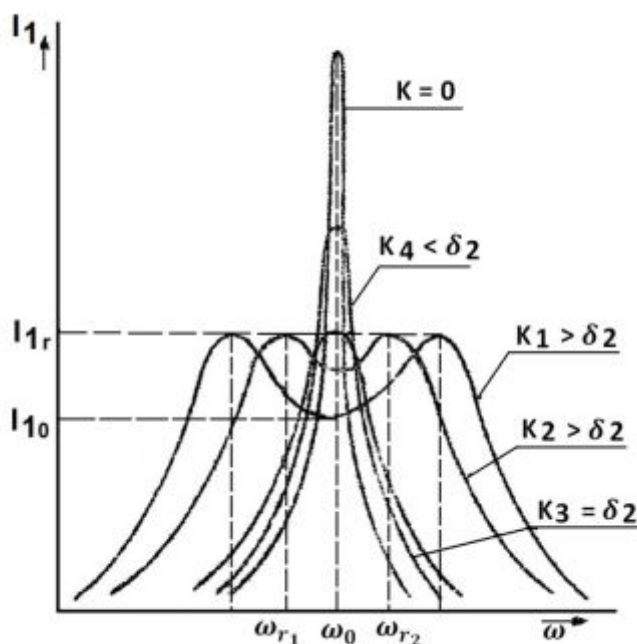


Fig. 9,7. Resonantiekromme van primaire stroom bij verschillende waarden van k .

In deze uitdrukking komen geen frequenties en geen koppelfactor voor. Hieruit volgt dat I_{1r} dus de stroomwaarde bij ω_{r_1} zowel als bij ω_{r_2} is en dat deze zelfde stroomwaarden zich ook voordoen bij verschillende waarden van k bij overkritische koppeling.

In fig. 9,7 zijn enkele resonantiekrommen weergegeven bij verschillende waarden van de koppelfactor.

De krommen met koppelfactoren k_1 en k_2 zijn van een overkritische koppeling. Naarmate we vaster koppelen (k groter maken) wordt het verschil tussen ω_{r_1} en ω_{r_2} groter. De stromen I_{1r} zijn echter alle gelijk, terwijl bij grotere waarden van k (bij overkritische koppeling) I_{10} kleiner wordt.



9.4. Resonantiekromme van primaire stroom als functie van de frequentie (vervolg)

c. De stroom in de primaire keten bij kritische koppeling en frequentie ω_0 .

Bij kritische koppeling is $k = \delta_2$ en vallen de drie faseresonantiefrequenties ω_0 , ω_{r_1} en ω_{r_2} samen. De resonantiekromme heeft nu slechts één top (zie de kromme bij k_3). We zullen de stroom I_{1_0} bij kritische koppeling bepalen. Hiertoe voeren we de uitdrukking voor I_{1_0} de voorwaarde $k = \delta_2$ in.

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 k^2 L_1 L_2}{R_2}} \quad (M = k\sqrt{L_1 L_2}).$$

Deze stroom bij kritische koppeling wordt nu:

$$I_{1_0} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 \delta_2^2 L_1 L_2}{R_2}} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} L_1 L_2} = \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}}.$$

We zien dat het stroommaximum bij kritische koppeling $I_{1_0_k}$ even groot is als de stroom I_{1_r} .

Veronderstellen we een ogenblik dat de kringen uit gelijke onderdelen zijn samengesteld, dus $L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$ en $C_1 = C_2$, dan wordt de stroom bij kritische koppeling:

$I_{1_{c_k}} = \frac{1}{2} \frac{U_1}{R}$. We zien dat bij kritische koppeling de stroom de helft is van de stroom die in de primaire kring zou vloeien als de primaire kring alleen op de spanning U_1 wordt aangesloten, want deze zou dan zijn: $I_0 = \frac{U_1}{R}$.

Bij onderkritische koppeling komt slechts 1 bestaande resonantiefrequentie voor en deze is ω_0 . De resonantiefrequentie zal dus ook maar één top bezitten. Naarmate we meer onderkritisch gaan koppelen, zien we in de uitdrukking voor I_{1_0} , M en dus daarmee de term $\frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}$ steeds kleiner worden. De stroom I_{1_0} wordt dus steeds groter, totdat bij $k = 0$ en $M = 0$ de stroom is toegenomen tot $\frac{U_1}{R}$, hetgeen duidelijk zal zijn als men bedenkt dat bij $k = 0$ de primaire kring geheel alleen is komen te staan en geen invloed meer heeft op de secundaire keten.

Bij $k = 0$ is het stroommaximum dus $2 \times$ zo groot als bij kritische koppeling $k = \delta_2$.

9.5. De stroom in de secundaire keten

In 9,2 hebben we de principiële uitdrukking voor de secundaire stroom vastgelegd, deze was:

$$\bar{I}_2 = \frac{-j\omega M \bar{I}_1}{\bar{Z}_2}.$$

Vullen we hierin de gevonden uitdrukking voor \bar{I}_1 , dan geeft dit:

$$\bar{I}_2 = \frac{-j\omega M}{\bar{Z}_2} \times \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}} = \frac{-j\omega M U_1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 M^2}.$$

Met de uitdrukkingen voor \bar{Z}_1 en \bar{Z}_2 ingevuld wordt dit:

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \frac{-j\omega M U_1}{\omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta) \omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta) + \omega^2 M^2} = \\ &= \frac{-j\omega M U_1}{\omega_0^2 L_1 L_2 (\delta_1 + j\beta) (\delta_2 + j\beta) + \omega^2 M^2} = \\ &= \frac{-j\omega M U_1}{\omega_0^2 L_1 L_2 \{\delta_1 \delta_2 - \beta^2 + \omega^2 M^2 + j\beta (\delta_1 + \delta_2)\}}. \end{aligned}$$

Uit deze uitdrukking is voor elke willekeurige frequentie en koppelfactor de stroom I_2 te berekenen.

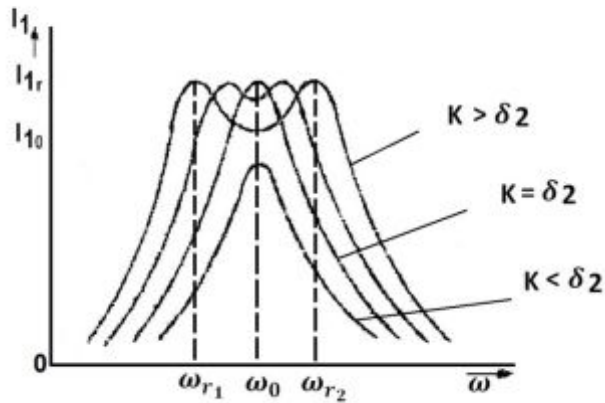


Fig. 9,8. Resonantiekrommen van de secundaire stroom.

In fig. 9,8 zijn enige resonantiekrommen van de secundaire stroom weergegeven. We zien ook hier weer, dat naarmate de koppelfactor groter wordt, de resonantiekromme een bredere gedaante krijgt. Bij onderkritische koppeling komt de top van de resonantiekromme lager te liggen dan bij kritische koppeling. Dit in tegenstelling tot de primaire stroom.

Men bedenke hier dat naarmate de koppelfactor meer tot de waarde nul nadert, de secundaire steeds minder energie ontvangt.

Wij zullen allereerst de stroom berekenen bij de frequentie ω_0 .

a. De stroom in de secundaire kring bij frequentie ω_0

$$\bar{I}_{2_0} = \frac{-j\omega_0 M U_1}{Z_{1_0} Z_{2_0} + \omega_0^2 M^2} = \frac{-j\omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2}.$$

De absolute waarde van deze stroom is: $I_{2_0} = \frac{\omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2}$.

b. De stroom in de secundaire keten bij de frequentie ω_{r_1} en ω_{r_2} .

De stroom I_2 bij de frequentie ω_r wordt:

$$\bar{I}_{r_2} = \frac{-j\omega_r M I_{1r}}{Z_{2r}} = \frac{-j\omega_r M}{\omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta)} \cdot \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}}. \quad \text{De absolute waarde van } I_{2r} \text{ is:}$$

$$\bar{I}_{r_2} = \frac{\omega_r M}{\omega_0 L_2 \sqrt{\delta_2^2 + \beta^2}} \cdot \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}}.$$

We zullen de eerste breuk herleiden:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r M}{\omega_0 L_2 \sqrt{\delta_2^2 + \beta^2}} &= \frac{\omega_r k \sqrt{L_1 L_2}}{\omega_0 L_2 \sqrt{\delta_2^2 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2}} = \frac{\omega_r k \sqrt{L_1 L_2}}{\omega_0 L_2 \frac{\omega_r}{\omega_0} \sqrt{\delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2}} = \\ &= \frac{k \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{L_2 \left[\delta_2^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2}\right)^2 \right]}} = \frac{k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{\sqrt{\frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} + \left(1 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{R_2^2}{\omega_r^2 L_2^2}}\right)^2}} = \frac{k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{\sqrt{\frac{R_2^2}{\omega_r^2 L_2^2} + k^2 - \frac{R_2^2}{\omega_r^2 L_2^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad \text{De uitdrukking voor } I_{r_2} \text{ wordt nu: } I_{r_2} = \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \end{aligned}$$



9.5. De stroom in de secundaire keten (vervolg)

c. De stroom in de secundaire keten bij kritische koppeling en frequentie ω_0

De stroom bij ω_0 en bij kritische koppeling in de secundaire keten $I_{2_{0K}}$ kunnen we vastleggen door in de bovenvermelde uitdrukking voor I_{2_0} de voorwaarde voor kritische koppeling ($k = \delta_2$) in te voeren .

$$I_{2_0} = \frac{\omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2} = \frac{\omega_0 U_1 k \sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2 + \omega_0^2 k^2 L_1 L_2}.$$

Vervangen we hierin k door $\delta_2 = \frac{R_2}{\omega_0 L_2}$ dan geeft dit:

$$I_{2_{0K}} = \frac{\omega_0 U_1 \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2 + \omega_0^2 L_1 L_2 \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2}} = \frac{U_1 R_2 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{R_1 R_2 + R_2^2 \frac{L_1}{L_2}} = \frac{U}{R_1 R_2 + R_2^2 \frac{L_1}{L_2}} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

We zien dat deze stroomwaarde gelijk is aan de stroom I_{2_r} .

Gaan we weer uit van de gedachte dat $R_1 = R_2$ en $L_1 = L_2$, dan krijgen we : $I_{2_0} = I_{2_r} = \frac{1}{2} \frac{U}{r}$.

Deze stroom is gelijk aan de stroom in de primaire keten bij kritische koppeling.

9.6. De spanning over de secundaire condensator

$\bar{U}_{C_2} = \bar{I}_2 \times \frac{-j}{\omega C_2}$ geeft de algemene uitdrukking voor de spanning over de secundaire condensator C_2 . We kunnen hier de uitdrukking voor de secundaire stroom invullen.

Bij de frequentie ω_0 is de spanning $\bar{U}_{C_{2_0}} = \bar{I}_{2_0} \times \frac{-j}{\omega_0 C_2}$ of:

$$\bar{U}_{C_{2_0}} = \frac{-j \omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2} \times \frac{-j}{\omega_0 C_2} = -\frac{M U_1}{C_2 (R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2)}.$$

Bij de frequentie ω_r is de spanning $\bar{U}_{C_{2_r}} = \bar{I}_{2_r} \times \frac{-j}{\omega_r C_2}$ of:

$$U_{C_{2_r}} = \frac{U_1}{R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2}} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \times \frac{-j}{\omega_r C_2} = -j \frac{U}{\omega_r C_2 (R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2})} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

We zien dat deze stroom voor de twee verschillende waarden van ω_r ook verschillende waarden aanneemt. Voor ω_{r_2} is deze spanning kleiner dan voor ω_{r_1} .

Deze spanning als functie van de frequentie bij overkritische koppeling is in fig. 9,9 weer gegeven. Dit is ook als volgt in te zien.

Bij de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} zijn de stromen I_{2_r} gelijk. Voor ω_{r_2} is de reactantie van C_2 kleiner dan voor ω_{r_1} . De spanning moet bij ω_{r_2} dus ook kleiner zijn dan bij ω_{r_1} . Bij kritische koppeling is de spanning over C_2 bepaald door:

$U_{C_{2_{0k}}} = \bar{I}_{2_{0k}} \times \frac{-j}{\omega_0 C_2} = \frac{U_1}{2R} \times \frac{-j}{\omega_0 C_2}$ (waarbij is verondersteld dat de kringen uit gelijke delen zijn samengesteld.) Afgezien van de faseverschuiving kunnen we schrijven:

$$U_{C_{2_{0k}}} = \frac{1}{2} U_1 \frac{1}{\omega_0 C_2 R}.$$

Daar $\frac{1}{\omega_0 C_2 R}$ gelijk is aan de Q -factor van de kringen mogen we dus ook schrijven: $U_{C_{2_{0k}}} = \frac{1}{2} QU$.

Hieruit blijkt: dat de opslingering van een kritisch gekoppeld bandfilter gelijk is aan de halve Q -factor van een van deze kringen.

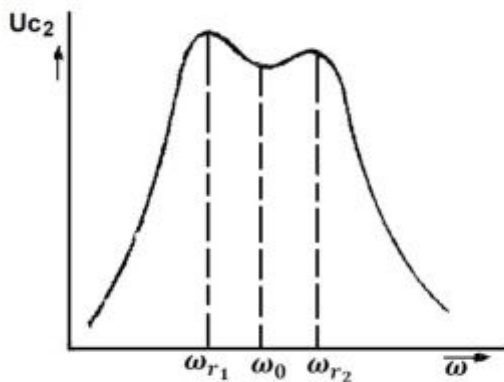


Fig. 9,9. De spanning over C_2 bij overkritische koppeling.

Bij toepassing van gekoppelde bandfilters kunnen we dus zorgen dat de resonantiekromme een min of meer afgeplatte top krijgt. Indien we de koppeling iets vaster dan kritisch maken, komen de twee faseresonantiefrequenties dicht bij elkaar te liggen, zodat de beide pieken van de resonantiekromme bij als het ware in elkaar overgaan en een afgeplatte top ontstaat.

Door de beide kringen die worden gekoppeld een grote kwaliteitsfactor te geven, zullen de flanken van de resonantiekromme een steil verloop hebben. Op deze wijze wordt meer de ideale vorm (zie fig. 9,1) van de resonantiekromme benaderd.

Met een enkelvoudige afstemkring zijn deze beide wensen niet makkelijk te realiseren.

Met gekoppelde kringen of bandfilters wordt dus een beter compromis gevonden om die afstemkringen naast het bevorderen van

een goede selectiviteit tevens de gewenste bandbreedte te doen doorlaten.

Voorbeeld:

Op de primaire kring van een indirect gekoppeld stelsel is werkzaam een spanning van $U_1 = 10 \mu V$. De frequentie van deze spanning is gelijk aan de resonantiefrequentie van elk der kringen. $L_1 = L_2 = 400 \mu H$. $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $\omega_0 = 2 \cdot 10^6$. Als de spanning over de secundaire condensator C_2 gelijk is aan $U_{C_{20}} = -200 \mu V$. Hoe groot is dan de koppelfactor van het systeem?

Oplossing:

De stroom in de primaire keten is bepaald door:

$$I_{10} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}}$$

De spanning geïnduceerd in de secundaire keten is: $U_{i_2} = -j\omega_0 M I_1$ en de stroom in de secundaire keten wordt:

$$I_{20} = \frac{-j\omega_0 M I_1}{R_2} = \frac{-j\omega_0 M}{R_2} \times \frac{U_1}{R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}} = \frac{-j\omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2}$$

De spanning over de secundaire condensator is: $U_{C_{20}} = I_{20} \times \frac{-j}{\omega_0 C_2}$. Daar $\frac{1}{\omega_0 C_2} = \omega_0 L_2$ kunnen we voor $U_{C_{20}}$ ook schrijven:

$$U_{C_{20}} = I_{20} \times j\omega_0 L_2 = \frac{-j\omega_0 M U_1}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2} \times -j\omega_0 L_2 \rightarrow U_{C_{20}} = -\frac{\omega_0^2 M U_1 L_2}{R_1 R_2 + \omega_0^2 M^2}$$

In deze uitdrukking is alleen M onbekend.

$$U_{C_{20}} R_1 R_2 + U_{C_{20}} \omega_0^2 M^2 = -\omega_0^2 M U_1 L_2$$

$$U_{C_{20}} \omega_0^2 M^2 + \omega_0^2 M U_1 L_2 + U_{C_{20}} R_1 R_2 = 0$$

$$-2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{12} M^2 + 4 \cdot 10^{12} M \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 0$$

$$-8 \cdot 10^8 M^2 + 16 \cdot 10^3 M + 2 \cdot 10^{-2} = 0$$



$$M = \frac{-16 \cdot 10^3 \pm \sqrt{256 \cdot 10^6 - 64 \cdot 10^6}}{-16 \cdot 10^8} =$$

$$= \frac{-16 \cdot 10^3 \pm \sqrt{192 \cdot 10^6}}{-16 \cdot 10^8} = \frac{-16 \cdot 10^3 \pm 13,8 \cdot 10^3}{-16 \cdot 10^8}.$$

$$M_1 = \frac{29,8 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^8} = \frac{298}{16 \cdot 10^6} = 18,6 \mu H.$$

$$M_2 = \frac{2,2 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^8} = \frac{22}{16 \cdot 10^6} = 1,38 \mu H.$$

$$K_1 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{L} = \frac{18,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,186}{4} = 0,04625.$$

$$K_2 = \frac{M_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M_2}{L} = \frac{1,38 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,0138}{4} = 0,00345.$$

Uit deze resultaten blijkt dat er twee maten van koppeling mogelijk zijn, waarbij aan de voorwaarden van de spanningen wordt voldaan.

Bij nadere beschouwing blijkt dat K_1 een overkritische koppeling en K_2 een onderkritische koppeling ten gevolge heeft. (Bij kritische koppeling is: $k = \delta_2 = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{80} = 0,0125$.)

Door de spanningskrommen te tekenen, ziet men zeer goed dat deze uit twee mogelijkheden bestaat.

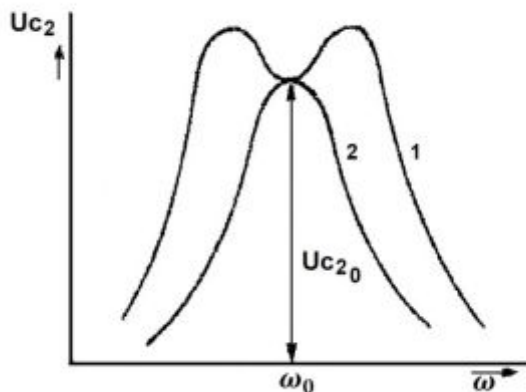


Fig. 9,10. Spanning over de secundaire condensator als functie van de frequentie bij overkritische en onderkritische koppeling.

stroom door L_2 , C_2 en R_2 en de spanning over C_2 .

De koppelfactor van deze schakeling is eveneens bepaald door de koppelreactantie gedeeld door de wortel uit het product van de gelijksoortige reactanties die in beide kringen voorkomen. Dus:

$$K = \frac{\omega L_3}{\sqrt{(\omega L_1 + \omega L_3)(\omega L_2 + \omega L_3)}} = \frac{L_3}{\sqrt{(L_1 + L_3)(L_2 + L_3)}}. \quad \text{Schrijven we voor } L_1 + L_3 = L_{1t}$$

en voor $L_2 + L_3 = L_{2t}$ dan wordt de koppelfactor $K = \frac{L_3}{\sqrt{L_{1t} \cdot L_{2t}}}$. De impedantie gezien vanaf de ingangsklemmen is:

$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{j \omega L_3 \left\{ R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right\}}{R_2 + j \left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}.$$

De teller van de grote breuk zullen we enigszins wijzigen.

In fig. 9,10 geeft kromme 1 de spanningskromme bij overkritische- en kromme 2 de spanningskromme bij onderkritische koppeling weer. Bij de frequentie ω_0 treedt zowel bij overkritische koppeling (kromme 1 in de dip) als bij onderkritische koppeling (kromme 2 in de top) dezelfde waarde van $U_{C_2_0}$ op.

9.7. Direct inductief gekoppeld systeem

In fig. 9,11 hebben we nogmaals een direct inductief gekoppeld stelsel weergegeven.

Bij deze schakeling is het de reactantie van de spoel L_3 , dus ωL_3 die de mate van koppeling bepaalt. De reactantie ωL_3 is zo klein ten opzichte van de impedantie van L_2 , C_2 en R_2 , dat deze de totale impedantie tussen de punten A, B bepaalt en daarmee dus ook de

R.T.

148 W.T.

Nadruk verboden

$$\bar{Z}_t = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{j\omega L_3 \left\{ -j\omega L_3 + R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right) \right\}}{R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{\omega^2 L_3^2 + j\omega L_3 \left\{ R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right) \right\}}{R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{\omega^2 L_3^2}{R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} + j\omega L_3$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j\left(\omega L_1 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{\omega^2 L_3^2}{R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

Daar $R_1 + j\left(\omega L_1 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \bar{Z}_1$ en $R_2 + j\left(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \bar{Z}_2$ wordt: $\bar{Z}_t = \bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}$.
Hiermee is nogmaals de impedantie van een bandfilter in het kort geformuleerd.

$$\bar{Z}_t = \text{primaire impedantie plus } \frac{(\text{Koppelreactantie})^2}{\text{secundaire impedantie}}$$

De totale impedantie kunnen we ook als volgt schrijven:

$$\bar{Z}_t = R_1 + j\left(\omega L_{1t} - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{\omega^2 L_3^2}{R_2 + j\left(\omega L_{2t} - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \text{ of: } \bar{Z}_t = \omega_0 L_{1t} (\delta_1 + j\beta) + \frac{\omega^2 L_3^2}{\omega_0 L_{2t} (\delta_2 + j\beta)} \text{ of:}$$

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_{1t} \left\{ \left(\delta_1 + j\beta + \frac{\omega^2 L_3^2}{\omega_0^2 L_{1t} + L_{2t} (\delta_2 + j\beta)} \right) \right\} \text{ daar: } \frac{L_3^2}{L_{1t} \cdot L_{2t}} = k^2$$

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_{1t} \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\omega^2 k^2}{\omega_0^2 (\delta_2 + j\beta)} \right\}$$

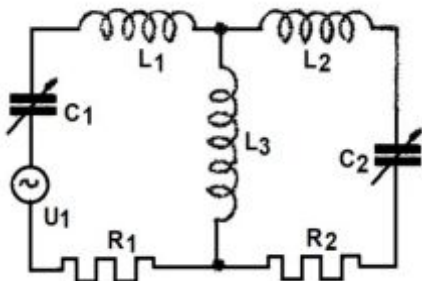


Fig. 9,11. Direct inductief gekoppeld stelsel.

We hebben hiermee dezelfde uitdrukking gekregen voor de totale impedantie als bij het vorige gekoppelde stelsel. Ook dus de uitdrukkingen voor I_1 , I_{1r} , I_{2r} , I_{10} , I_{20} , U_{C_2} , ω_{r_1} en ω_{r_2} zullen dus hetzelfde zijn als in het voorgaande werd bepaald. In al deze uitdrukkingen geldt nu voor:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_3)C_1}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_2 + L_3)C_2}},$$

$$k = \frac{L_3}{\sqrt{L_{1t} + L_{2t}}}, \quad L_{1t} = L_1 + L_3 \text{ en } L_{2t} = L_2 + L_3$$

Ook de resonantiekrommen zullen eenzelfde gedaante hebben als bij de indirect inductieve koppeling.

Ter bepaling van de secundaire stroom gaan we als volgt te werk:

De primaire stroom is: $I_1 = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}}$. De spanning ontwikkeld over L_3 is nu:

$$\bar{U}_{L_3} = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}} \times \frac{j\omega L_3 \left\{ R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \right\}}{j\omega L_3 + R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \text{ en de stroom } \bar{I}_2 \text{ is nu:}$$

$$\bar{U}_{L_3} = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}} \times \frac{j\omega L_3}{j\omega L_3 + R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \text{ of: } \bar{U}_{L_3} = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}} \times \frac{j\omega L_3}{\bar{Z}_2} =$$

$$\bar{U}_{L_3} = \frac{U_1 \times j\omega L_3}{\left(\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 L_3^2}{\bar{Z}_2}\right) \bar{Z}_2} = \frac{U_1 \times j\omega L_3}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 L_3^2}$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 226 t/m 231.

9.8. Directe capacatieve gekoppeld stelsel

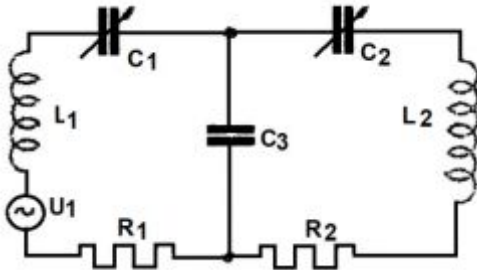


Fig. 9,12. Directe capacatieve koppeling.

In de schakeling volgens fig. 9,12 wordt op dezelfde wijze als bij het directe inductieve systeem de mate van koppeling bepaald door C_3 .

De koppelreactantie is dus $\frac{1}{\omega C_3}$.

De koppelfactor is nu:

$$k = \frac{\frac{1}{\omega C_3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_3}\right) \left(\frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3}\right)}} = \frac{\frac{1}{\omega C_3}}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)}} = \frac{\frac{1}{C_3}}{\sqrt{\frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}{C_1 C_2 C_3}}} = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}}$$

De impedantie gezien vanaf de ingangsklemmen is:

$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{-j \left\{ R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right\}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)} \quad \text{of:}$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{\frac{-j}{\omega C_3} \left\{ \frac{j}{\omega C_3} + R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right\}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)} \quad \text{of:}$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{\frac{1}{\omega^2 C_3^2} + \frac{-j}{\omega C_3} \left\{ R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right\}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)}$$

en
$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{\frac{1}{\omega^2 C_3^2}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)} - \frac{j}{\omega C_3}.$$

$$\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_3} \right) + \frac{\frac{1}{\omega^2 C_3^2}}{R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)}.$$

Daar $\bar{Z}_t = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_3} \right)$ en $\bar{Z}_2 = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right)$ wordt de totale impedantie:
$$\bar{Z}_t = \bar{Z}_1 + \frac{1}{\bar{Z}_2}.$$

Hiervoor geldt dus ook de algemene uitdrukking voor de totale impedantie als bij de vorige systemen werd bepaald. Daar voor $\bar{Z}_1 = \omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta)$ en $\bar{Z}_2 = \omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta)$ geschreven kan worden, wordt hiermee \bar{Z}_t :

$$\bar{Z}_t = \omega_0 L_1 (\delta_1 + j\beta) + \frac{\frac{1}{\omega_0^2 C_3^2}}{\omega_0 L_2 (\delta_2 + j\beta)} \quad \text{of:} \quad \bar{Z}_t = \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\frac{1}{\omega_0^2 C_3^2}}{\omega_0^2 L_1 L_2 (\delta_2 + j\beta)} \right\}.$$

Daar voor de primaire kring geldt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}}}$ en voor de secundaire $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}}}$ valt hieruit

af te leiden:

R.T.

150 W.T.

Nadruk verboden

$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}} = \frac{C_1 + C_3}{\omega_0^2 C_1 C_3} \quad \text{en} \quad L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}} = \frac{C_2 + C_3}{\omega_0^2 C_2 C_3}.$$

De waarden voor L_1 en L_2 in de laatst verkregen vorm voor Z_t gesubstitueerd geeft:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\frac{1}{\omega^2 C_3^2}}{\omega_0^2 \frac{C_1 + C_3}{\omega_0^2 C_1 C_3} \cdot \frac{C_2 + C_3}{\omega_0^2 C_2 C_3} (\delta_2 + j\beta)} \right\} = \\ &= \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2 C_3^2} \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}}{(\delta_2 + j\beta)} \right\} = \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{C_1 C_3}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}}{\delta_2 + j\beta} \right\} = \\ &= \omega_0 L_1 \left\{ \delta_1 + j\beta + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{k^2}{\delta_2 + j\beta} \right\}. \end{aligned}$$

We zien dat ook deze uitdrukking nagenoeg gelijk is aan die we bij de vorige systemen vonden, echter de breuk $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ is nu omgekeerd.

Bepalen we hierbij ook de frequenties waarbij tussen primaire stroom en primair aangelegde spanning geen faseverschuiving is, dan vinden we bij overkritische koppeling weer drie frequenties, ω_0 , ω_{r_1} en ω_{r_2} . De frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} zijn nu respectievelijk gelijk aan:

$$\omega_{r_1} = \omega_0 = \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \delta_2^2}} \quad \text{en} \quad \omega_{r_2} = \omega_0 = \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \delta_2^2}}.$$

9.9. Indirect capacitief gekoppeld stelsel

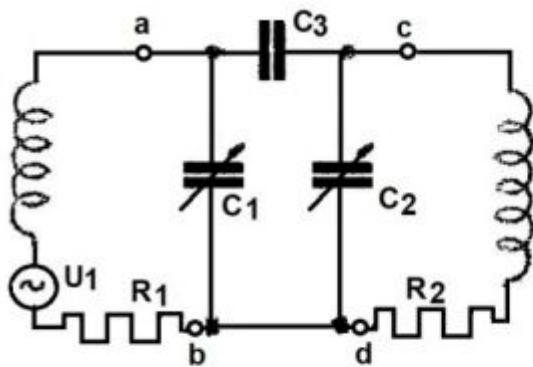


Fig. 9.13. Indirecte capacitieve koppeling.

Alvorens ons te verdiepen in de Indirecte capacitieve koppeling (zie fig. 9,13) zullen we eerst in algemene gedaante een gelijkwaardig schema vastleggen ter vervanging van soortgelijke schakeling als van de condensatoren C_1 , C_2 en C_3 .

In fig. 9,14 is een dergelijke schakeling, bestaande uit drie willekeurige impedanties (driehoekschakeling genoemd) weergegeven.

We zullen deze driehoekschakeling omzetten in een gelijkwaardige sterschakeling van drie impedanties (zie fig. 9,15).

Indien de schakelingen volgens fig. 9,14 en 9,15 gelijkwaardig of equivalent moeten zijn, dan moeten de impedanties tussen overeen-

komstige klemmen gelijk zijn.

In fig. 9,14 is de impedantie tussen de klemmen $a - b$:
$$\bar{Z}_{a-b} = \frac{\bar{Z}_1(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}.$$

In fig. 9,15 is deze impedantie:
$$\bar{Z}_{a-b} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b.$$

(De impedantie tussen de klemmen $a - b$ wordt in beide gevallen bepaald bij open klemmen $c - d$.), dus:

$$\bar{Z}_{a-b} = \frac{\bar{Z}_1(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b \quad \dots \dots \dots (1)$$

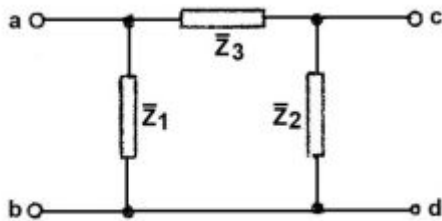


Fig. 9,14. Driehoekschakeling van drie impedanties.

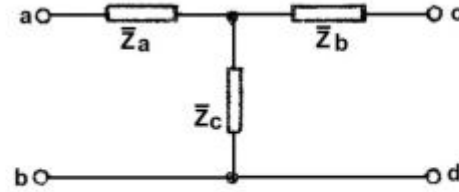


Fig. 9,15. Sterschakeling van drie Impedanties.

Op gelijke wijze kunnen we voor de impedantie tussen de klemmen $c - d$ schrijven:

$$\bar{Z}_{c-d} = \frac{\bar{Z}_2 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_b + \bar{Z}_c \dots \dots \dots (2)$$

En voor de klemmen $a - c$ geldt dan:

$$\bar{Z}_{a-c} = \frac{\bar{Z}_3 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b \dots \dots \dots (3)$$

Door de vergelijking (2) van de vergelijking (1) af te trekken, verkrijgen we:

$$\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} - \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b - \bar{Z}_b - \bar{Z}_c$$

$$\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_a - \bar{Z}_b \dots \dots \dots (4)$$

Door de vergelijkingen (3) en (4) bij elkaar op te tellen vinden we:

$$\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \bar{Z}_a - \bar{Z}_b + \bar{Z}_a + \bar{Z}_b$$

$$\frac{2\bar{Z}_1 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 2\bar{Z}_a \text{ of:}$$

$$\bar{Z}_a = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \dots \dots \dots (5)$$

Door de vergelijking (5) te substitueren in vergelijking (3) vinden we:

$$\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} + \bar{Z}_b \text{ of:}$$

$$\bar{Z}_b = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Door \bar{Z}_b te substitueren in vergelijking (2) vinden we voor

$$\bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Het bovenstaande kan dus toegepast worden op elke transformatie van driehoekschakeling in sterschakeling.

Bij de indirecte capacatieve koppeling vinden we de driehoekschakeling van drie condensatoren C_1, C_2 en C_3 . Ook hier kunnen we de driehoekschakeling dus omzetten in een gelijkwaardige sterschakeling.

De schakeling die tussen de klemmen $a - b$ en $c - d$ werkzaam is, is nogmaals in fig. 9,16 weergegeven. We zullen deze schakeling vervangen door de sterschakeling, die in fig. 9,17 is weergegeven.

Volgens de uitdrukking die we in het voorgaande onder (5) vonden, is:

R.T.

152 W.T.

Nadruk verboden

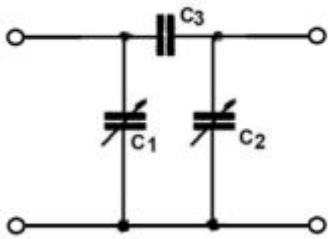


Fig. 9,16. Driehoekschakeling van drie condensatoren.

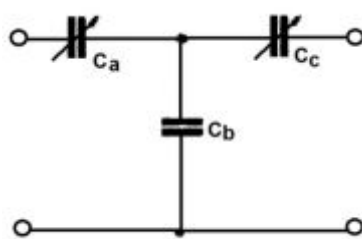


Fig. 9,17. Stersschakeling van drie condensatoren.

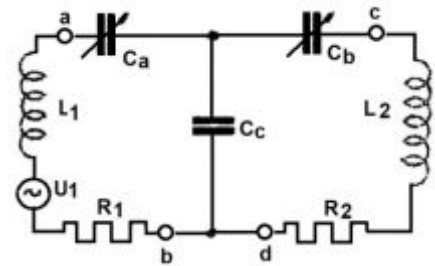


Fig. 9,18. Equivalente directe capacatieve koppeling.

$$\frac{1}{\omega C_a} = \frac{\frac{1}{\omega C_1} \cdot \frac{1}{\omega C_3}}{\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} + \frac{1}{\omega C_3}} \quad \text{of:} \quad \frac{1}{C_a} = \frac{\frac{1}{C_1 C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{C_1 C_3}}{\frac{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_2 C_1}{C_1 C_2 C_3}} \quad \text{en:} \quad C_a = \frac{C_1 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_3}{C_2}.$$

Op overeenkomstige wijze vinden we voor de overige condensatoren:

$$C_b = \frac{C_1 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_3}{C_1} \quad \text{en:} \quad C_c = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_3}.$$

De schakeling van de condensatoren in de indirecte capacatieve koppeling volgens fig. 9,13 kunnen we nu dus vervangen door de stersschakeling van de drie condensatoren C_a , C_b en C_c . We hebben hiermee de indirecte capacatieve koppeling omgetransformeerd in een direct capacatieve koppeling.

Voor deze directe capacatieve koppeling gelden dus ook weer alle conclusies die aan de hand van het onder 9,8 behandelde te trekken zijn. We moeten er echter aan denken dat de condensatoren eerst worden bepaald uit de gegeven condensatoren uit de direct capacatieve koppeling.

We zullen de koppelfactor voor de indirecte koppeling uitdrukken in de geschakelde condensatoren. Hiertoe moeten we de koppelfactor voor de directe koppeling $k = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}}$

als volgt schrijven: $k = \sqrt{\frac{C_a C_b}{(C_a + C_c)(C_b + C_c)}}$.

Hierin moeten C_a , C_b en C_c vervangen worden door de uitdrukkingen die hierboven werden afgeleid. Ter vereenvoudiging vervangen we in betreffende uitdrukkingen C_a , C_b en C_c de teller door de letter a .

Dus wordt $C_a = \frac{a}{c_2}$, $C_b = \frac{a}{c_1}$, $C_c = \frac{a}{c_3}$. Dit in de formule voor k geeft:

$$k = \sqrt{\frac{\frac{a}{c_2} \cdot \frac{a}{c_1}}{\left(\frac{a}{c_2} + \frac{a}{c_3}\right)\left(\frac{a}{c_1} + \frac{a}{c_3}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{c_1 c_2}}{\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{c_1 c_2}}{\frac{c_2 + c_3}{c_2 c_3} \cdot \frac{c_1 + c_3}{c_1 c_3}}} = \frac{c_3}{\sqrt{(c_1 + c_3)(c_2 + c_3)}}.$$

Hiermee is de koppelfactor voor de indirecte capacatieve koppeling in de daarin geschakelde condensatoren uitgedrukt.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 232 t/m 235.



9.10. Het gedrag van een bandfilter bij verandering van de afstemcondensatoren

Bij een bandfilter is het natuurlijk nodig de resonantiebreedte zo af te regelen dat deze geschikt is om de gewenste bandbreedte door te laten. Ter wille van de eenvoud in het hierna volgende, stellen we de bandbreedte evenredig met het verschil der twee faseresonantiefrequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} . Verder gaan we in het volgende uit van de gedachte dat we de afstemcapaciteiten vergroten, dat wil zeggen, door deze verandering van de capaciteiten maken we de afstemfrequenties ω_0 dus kleiner. Verder hangt het van de aard der koppeling af of de verandering van de afstemcondensatoren invloed heeft op de koppeling.

Bij de inductieve koppelingen heeft de verandering van C_1 en C_2 geen invloed op de koppelfactor. De beide faseresonantiefrequenties van het gekoppelde stelsel zijn:

$$\omega_{r_1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - b_2^2}}} \quad \text{en} \quad \omega_{r_2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - b_2^2}}}.$$

Het frequentieverschil is dus $\omega_{r_2} - \omega_{r_1}$. Noemen we de afname van ω_0 , ten gevolge van de vergroting van C_1 en C_2 , $\Delta\omega_0$, dan neemt ω_{r_2} af met het bedrag:

$$\frac{\Delta\omega}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - b_2^2}}} \quad \text{en} \quad \omega_{r_1} \quad \text{met het bedrag} \quad \frac{\Delta\omega}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - b_2^2}}}.$$

De afname van ω_{r_2} is groter dan de afname van ω_{r_1} (noemer is groter).

Beide frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} schuiven, door vergroting van C_1 , C_2 naar beneden, ω_{r_2} iets meer dan ω_{r_1} , dus komen deze beide frequenties iets dichterbij elkaar te liggen. De resonantiekromme wordt dus smaller, ofwel selectiever.

Bij de indirecte capacatieve koppeling zijn de faseresonantiefrequenties respectievelijk:

$$\omega_{r_1} = \omega_0 \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \delta_2^2}} \quad \text{en} \quad \omega_{r_2} = \omega_0 \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \delta_2^2}} \quad \text{en de koppelfactor} \quad k = \frac{C_3}{\sqrt{(C_1 + C_3)(C_2 + C_3)}}.$$

Bij vergroting van C_1 en C_2 wordt de koppelfactor kleiner. Afgezien van de afname van ω_0 wordt hierdoor de wortelvorm in ω_{r_1} groter en die van ω_{r_2} kleiner. Hierdoor komen deze frequenties dichterbij elkaar te liggen. De resonantiekromme wordt dus smaller. Bij de directe capacatieve koppeling zijn de frequenties ω_{r_1} en ω_{r_2} bepaald door:

$$\omega_{r_1} = \omega_0 \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \delta_2^2}} \quad \text{en} \quad \omega_{r_2} = \omega_0 \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \delta_2^2}}.$$

Ten gevolge van de verkleining van C_1 en C_2 wordt de koppelfactor groter. Hierdoor wordt de wortelvorm in ω_{r_1} kleiner en die in ω_{r_2} groter. Hierdoor neemt ω_{r_2} dus niet zoveel af als ω_{r_1} , met als gevolg dat het verschil tussen ω_{r_2} en ω_{r_1} groter wordt. De resonantiekromme wordt dus breder ofwel minder selectief.

We zien dus dat als we een bandfilter gebruiken voor afstemming op de diverse frequenties die in een golfband gelegen zijn, de eigenschappen van het filter zich wijzigen.

Bestrijken we met een bandfilter de golfband van 200 – 600 m (1500 – 500 kHz), dan zullen de inductieve en indirect capacatieve bandfilters bij 200 m een bredere band doorlaten dan bij 600 m afstemming. Bij de directe capacatieve koppeling is dit juist omgekeerd. Om bandfilters te construeren, die een constante bandbreedte behouden in een gehele golfband, moet men verschillende systemen combineren. Bij deze combinaties moet in dergelijke gevallen dus altijd een direct capacatief systeem voorkomen. In fig. 9,19 is een gemengd gekoppeld stelsel weergegeven dat is opgebouwd uit een direct en een indirect gekoppeld stelsel.

Hierin is C_3 de indirecte en C_4 de directe koppelcondensator.

R.T.

154 W.T.

Nadruk verboden

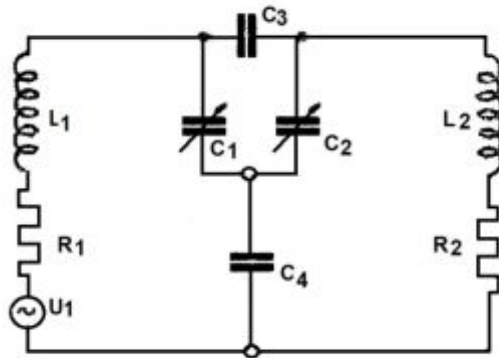


Fig. 9,19. Gemengd gekoppeld stelsel, directe, indirecte capacatieve.

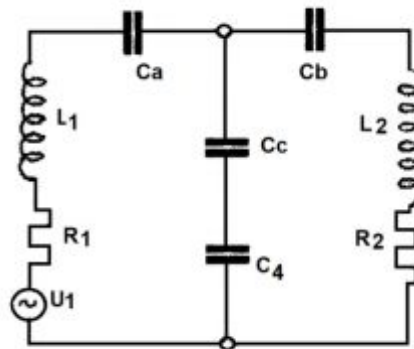


Fig. 9,20. Vervanging van de schakeling volgens fig. 9,19.

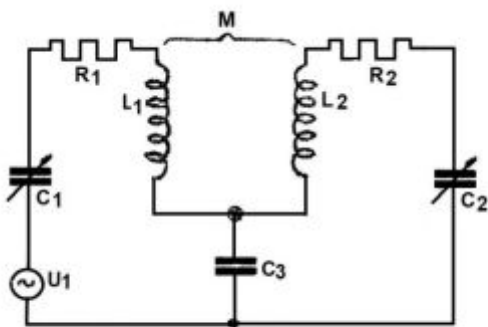


Fig. 9,21. Combinatie van direct capacatief met indirect inductief systeem.

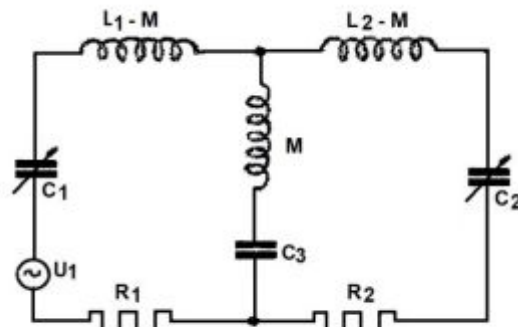


fig. 9,22. Vervanging van de schakeling volgens fig. 9,22.

De drie condensatoren C_1 , C_2 en C_3 , die in driehoek geschakeld zijn, kunnen we weer vervangen door drie condensatoren in sterschakeling en verkrijgen dan de schakeling volgens fig. 9,20. Voor bepaalde waarden van C_1 en C_2 uit fig. 9,19 kunnen C_c en C_4 door een condensator worden vervangen en zijn de uitdrukkingen voor de directe capacatieve koppeling weer te benutten. We moeten wel bedenken dat voor elke andere waarde van C_1 , C_2 en C_3 ook C_a , C_b en C_c andere waarden krijgen.

In fig. 9,21 is een combinatie van direct capacatieve en een indirect inductieve koppeling weergegeven.

Ook deze schakeling is weer tot een eenvoudiger principe terug te brengen. In fig. 9,22 is de vervanging hiervan gegeven. De koppelreactantie wordt nu gevormd door de serieschakeling van M en C_3 (zie fig. 9,22).

Bij dergelijke gemengde systemen moeten de beide methoden van koppeling een zodanige koppelfactor bezitten, dat de invloed van het ene systeem op de resonantiekromme door de invloed van het andere systeem wordt gecompenseerd.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 236 t/m 237.

9.11. Bandfilters waarbij de primaire kring een parallelketen is

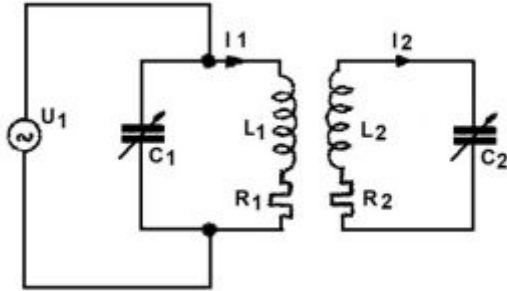


Fig. 9,23. Bandfilter met primair een parallelkring.

belasting die de secundaire kring op de inductieve tak van de primaire kring uitoefent, gelijk aan een ohmse weerstand $\frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}$. Was de impedantie van de primaire kring zonder koppeling $\frac{L_1}{C_1 R_1}$, nu is de impedantie met koppeling $\frac{L_1}{C_1 \left(R_1 + \frac{\omega_0^2 M^2}{R_2} \right)}$.

Zijn de primaire en secundaire kringen weer uit dezelfde onderdelen opgebouwd, ($L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$, $C_1 = C_2$), dan wordt $\frac{\omega_0^2 M^2}{R_2} = \frac{\omega_0^2 k^2 L_1 L_2}{R_2} = \frac{\omega_0^2 k^2 L^2}{R}$.

Bij kritische koppeling is $k = \delta_2 = \frac{R}{\omega L}$. De uitdrukking $\frac{\omega_0^2 M^2}{R_2}$ wordt dan $\frac{\omega_0^2 \frac{R^2}{\omega_0^2 L^2} L_2}{R} = R$.

De impedantie primair gemeten, wordt bij kritische koppeling en frequentie ω_0 $Z_t = \frac{L}{2CR}$.

9.12. De laagfrequent transformator

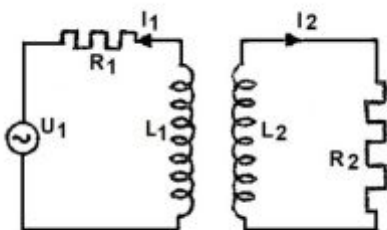


Fig. 9,24. Laagfrequent transformator.

We willen nu ook nog iets dieper ingaan op de theorie betreffende de laagfrequent transformator. In fig. 9,24 hebben we het principe van de transformator weergegeven.

De stroom in de primaire keten is bepaald

$$\begin{aligned} \text{door: } \bar{I}_1 &= \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}} = \frac{U_1}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}} = \\ &= \frac{U_1 (R_2 + j\omega L_2)}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} \cdot \\ \bar{I}_2 &= \frac{-j\omega M \bar{I}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{-j\omega M U_1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \omega^2 M^2} = \\ &= \frac{-j\omega M U_1}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} \cdot \end{aligned}$$

We weten uit de theoretische elektriciteitsleer dat de magnetische veldsterkte evenredig is met het product ampère-windingen.

R.T.

156 W.T.

Nadruk verboden

In algemene formulevorm kunnen we schrijven $H = a n I$, waarin a een evenredigheidsfactor is. Verder is de magnetische inductie in het ijzer van de transformator bepaald door: $B = \mu_r \mu_0 H$ Of $B = \mu_r \mu_0 a n I$. Het aantal windingen van een spoel is evenredig met de wortel uit de zelfinductie $n = b\sqrt{L}$ (waarin b weer een evenredigheidsfactor is).

Hiermee wordt $B = \mu_r \mu_0 a b I \sqrt{L}$. Voor de primaire spoel wordt de magnetische inductie:

$$\bar{B}_1 = \mu_r \mu_0 a b \bar{I}_1 \sqrt{L_1} \text{ en voor de secundaire spoel: } \bar{B}_2 = \mu_r \mu_0 a b \bar{I}_2 \sqrt{L_2} .$$

De totale magnetische inductie is nu:

$$\bar{B}_t = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 = \mu_r \mu_0 a b \bar{I}_1 \sqrt{L_1} + \mu_r \mu_0 a b \bar{I}_2 \sqrt{L_2}$$

of: $\bar{B}_t = \mu_r \mu_0 a b (\bar{I}_1 \sqrt{L_1} + \bar{I}_2 \sqrt{L_2})$. Hierin de uitdrukkingen voor \bar{I}_1 en \bar{I}_2 gesubstitueerd geeft:

$$\bar{B}_t = \mu_r \mu_0 a b \frac{U_1 (R_2 + j\omega L_2) \sqrt{L_1} - j\omega M U_1 \sqrt{L_2}}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}$$

Vervangen we M door $k\sqrt{L_1 L_2}$, dan krijgen we:

$$\bar{B}_t = \mu_r \mu_0 a b U_1 \frac{R_2 \sqrt{L_1} + j\omega L_2 \sqrt{L_1} - j\omega k \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{L_2}}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 k^2 L_1 L_2}$$

Ter vereenvoudiging van de verkregen uitdrukking stellen we $k \approx 1$.

$$\bar{B}_t = \mu_r \mu_0 a b U_1 \frac{R_2 \sqrt{L_1} + j\omega L_2 \sqrt{L_1} - j\omega L_2 \sqrt{L_1}}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 L_1 L_2} =$$

$$= \mu_r \mu_0 a b U_1 \frac{R_2 \sqrt{L_1}}{R_1 R_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_1} . \text{ Delen we teller en noemer van de breuk door } R_2 \text{ dan}$$

geeft dit: $\bar{B}_t = \mu_r \mu_0 a b U_1 \frac{\sqrt{L_1}}{R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 \frac{R_1}{R_2}}$. Uit deze uitdrukking zien we dat de magnetische

inductie afneemt bij toenemende frequentie (ω alleen in de noemer van de breuk). Dit betekent dat we bij hogere frequenties met kleinere kerndoorsnede kunnen volstaan dan bij lage frequenties. Hiervan wordt dankbaar gebruik gemaakt op die plaatsen waar het gewicht van de transformator-kernen een belangrijke rol speelt. In vliegtuigen maakt men gebruik van hogere voedingsfrequenties (300 of 600 Hz) om de kernen licht te kunnen houden. We concluderen verder uit de verkregen uitdrukking dat de magnetische inductie afhankelijk is van de secundaire weerstand; echter wordt de mate van afhankelijkheid mede bepaald door R_1 . Wordt de belastingsweerstand kleiner, dus grotere secundaire belasting, terwijl de primaire spoel gewikkeld is uit dun draad, (grote waarde van R_1) dan zal de magnetische inductie kleiner worden, dus minder ijzerverliezen. Bij vergroting van R_2 , verkleining van de belasting, worden de ijzerverliezen dus groter. Is de primaire spoel gewikkeld uit dik draad, zodat R_1 zeer klein is, dan is de term $j\omega L_2 \frac{R_1}{R_2}$ ten opzichte van de overige termen te verwaarlozen en blijkt dat de magnetische inductie onafhankelijk van de secundaire belasting is. Men kan dit ook op andere wijze concluderen. Daartoe moeten we eerst bedenken dat de magnetische flux evenredig is met het product ampère-windingen ofwel evenredig met de spanning die over de zelfinductie werkzaam is. Heeft de weerstand R_1 in fig. 9,24 een niet te verwaarlozen waarde, dan is de spanning over L_1 afhankelijk van de stroom I_1 . Als door verkleining van R_2 de stroom I_2 toeneemt, zal ook I_1 toenemen en de spanningsval over R_1 eveneens. Ten gevolge hiervan zal de spanning over L_1 afnemen en dus ook de magnetische flux. Bij afname van I_2 , zal I_1 en daarmee de spanningsval over R_1 afnemen en de spanning over L_1 toenemen, dus zal de magnetische flux ook toenemen. Heeft de primaire spoel een weerstand die te verwaarlozen is, dan is onafhankelijk van I_1 en I_2 de spanning over L_1 gelijk aan de emk van de spanningsbron U_1 . In de bovenstaande beschouwing is steeds verondersteld dat de spanningsbron U_1 geen inwendige weerstand heeft.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 238 t/m 241.



9.13. Variometer

a. Seriegeschakelde variometerspoelen

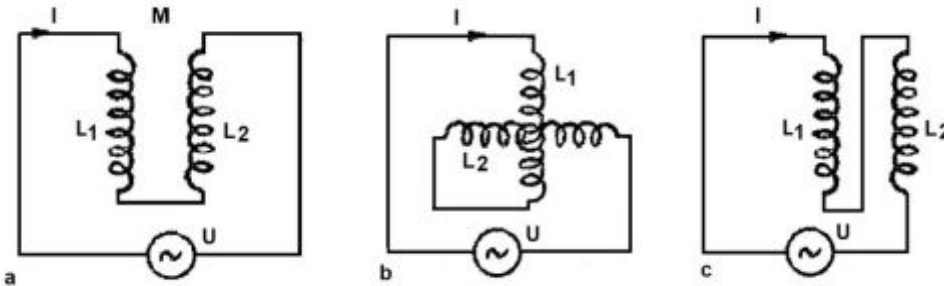


Fig. 9,25. Twee seriegeschakelde variometerspoelen.

Het is ook mogelijk met behulp van twee gekoppelde spoelen een veranderlijke zelfinductie te vormen. We zullen eerst het resultaat van twee seriegeschakelde gekoppelde spoelen nagaan. In het algemeen worden deze variometers zo uitgevoerd door een spoel vast op te stellen en

de andere spoel ten opzichte daarvan te verplaatsen. Ook zijn er wel uitvoeringen waarbij de ene spoel draaibaar is opgesteld binnen de vaste spoel. De draaibare spoel is dan over een hoek van 180° draaibaar.

In fig. 9,25 zijn drie standen in principe weergegeven. In de standen 9,25a en 9,25c is de koppeling van de beide spoelen het vast; de velden lopen evenwijdig. Als we aannemen dat de velden van de beide spoelen elkaar in fig. 9,25 ondersteunen, dan zullen zij in fig. 9,25c elkaar verzwakken. Noemen we M in fig. 9,25a positief, dan zal deze in fig. 9,25b negatief zijn.

In fig. 9,25b staan de beide velden loodrecht op elkaar, d.w.z. zij beïnvloeden elkaar niet, dus is er geen koppeling. Voor fig. 9,25b kan de totale zelfinductie dus direct genoteerd worden, deze is: $L_t = L_1 + L_2$.

In de overige standen zullen we door gebruik te maken van $\pm M$ de zelfinductie bepalen voor alle standen van L_2 van fig. 9,25a en fig. 9,25c. Om de stroom I door L_1 te doen vloeien moet allereerst de spanning $Ij\omega L_1$ beschikbaar zijn en tevens moet de spanning, die door de stroom gaande door L_2 , in L_1 geïnduceerd wordt, opgeheven worden. De totale spanning nodig om de stroom door L_1 te doen vloeien, is dus: $Ij\omega L_1 \pm Ij\omega M$.

Om de stroom door L_2 te zenden, is een spanning $Ij\omega L_2 \pm Ij\omega M$ nodig, waarin het tweede deel weer nodig is om de spanning die door L_1 in L_2 geïnduceerd wordt op te heffen.

De aangelegde spanning U moet gelijk zijn aan de som van de bovenvermelde spanningen $U = Ij\omega L_1 \pm Ij\omega M + Ij\omega L_2 \pm Ij\omega M$.

Geven we de vervangingszelfinductie aan met L_t , dan zal daar ten gevolge van de spanning U eenzelfde stroom I door moeten vloeien, dus:

$$\begin{aligned} U &= Ij\omega L_t \\ Ij\omega L_1 &= Ij\omega L_1 \pm Ij\omega M + Ij\omega L_2 \pm Ij\omega M \\ L_t &= L_1 + L_2 \pm 2M. \end{aligned}$$

Bij draaiing van de spoel over een hoek van 180° verandert de totale zelfinductie, dus $4M$.

b. Parallelgeschakelde variometerspoelen

In fig. 9,26 zijn twee variometerspoelen in drie standen getekend. In de stand volgens fig. 9,26b staan de velden loodrecht op elkaar, dus treedt geen koppeling op. De totale zelfinductie is dan

$L_t = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. Vatten we alle overige standen weer samen, dan kunnen we de volgende vergelijkingen vastleggen. Voor spoel L_1 geldt: $U = Ij\omega L_1 \pm Ij\omega M$.

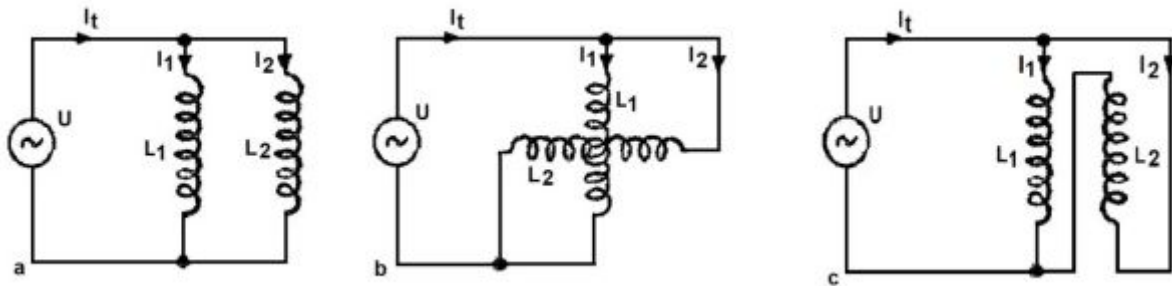


Fig. 9,26. Twee parallelgeschakelde variometerspoelen.

De laatste term ontstaat ten gevolge van de spanning, die, door de stroom I_2 gaande door L_2 , in L_1 wordt geïnduceerd.

Voor spoel L_2 geldt: $U = I_2 j\omega L_2 \pm I_1 j\omega M$.

Daar de stromen I_1 en I_2 in fase zijn, mogen we ook noteren $I_t = I_1 + I_2$.

Verder is $U = I_t j\omega L_t$ als L_t de totale zelfinductie is. We kunnen nu noteren:

$$I_t j\omega L_t = I_1 j\omega L_1 \pm I_2 j\omega M$$

$$I_t j\omega L_t = I_2 j\omega L_2 \pm I_1 j\omega M$$

of: $I_1 j\omega L_t + I_2 j\omega L_t = I_1 j\omega L_1 \pm I_2 j\omega M$

$$I_1 j\omega L_t + I_2 j\omega L_t = I_2 j\omega M L_2 \pm I_1 j\omega M$$

Alles gedeeld door $j\omega$ geeft:

$$I_1 L_t + I_2 L_t = I_1 L_1 \pm I_2 M \dots \dots \dots (1)$$

$$I_1 L_t + I_2 L_t = I_2 L_2 \pm I_1 M \dots \dots \dots (2)$$

Uit (1) volgt:

$$I_1 L_t - I_1 L_1 \pm I_2 M - I_2 L_t$$

$$I_1 = \frac{I_2 (\pm M - L_t)}{L_t - L_1} \dots \dots \dots (3)$$

Uit (2) volgt:

$$I_1 L_t \pm I_1 M = I_2 L_2 - I_2 L_t$$

$$I_1 = \frac{I_2 (L_2 - L_t)}{L_t \pm M} \dots \dots \dots (4)$$

De vergelijking (3) en (4) kunnen we aan elkaar gelijk stellen.

$$\frac{I_2 (\pm M - L_t)}{L_t - L_1} = \frac{I_2 (L_2 - L_t)}{L_t \pm M}$$

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$\begin{aligned} \pm M L_t - M^2 - L_t^2 \pm M L_t &= L_2 L_t - L_t^2 - L_1 L_2 + L_1 L_t \\ \pm 2 M L_t - L_1 L_t - L_2 L_t &= -L_1 L_2 + M^2 \end{aligned}$$

$$L_t = \frac{-L_1 L_2 + M^2}{-L_1 - L_2 \pm 2M} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

In deze uitdrukking is steeds $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ en is dus voor elke mate van koppeling de totale zelfinductie te berekenen.

Hoofdstuk 10

Algemene eigenschappen van elektrische ketens

10.1. Inleiding

Met behulp van de wetten van Ohm en Kirchhoff kan men voor ieder willekeurig netwerk, bestaande uit gegeven impedanties waarin gegeven spanningen werken, de stroom door elke impedantie uitrekenen.

Men stelt daartoe een aantal vergelijkingen op die men verkrijgt uit de voorwaarden dat de som der spanningen in iedere gesloten keten, met het juiste teken in rekening gebracht, nul is en dat de som der stromen, die in een knooppunt samenkomen, ook alle met het juiste teken genomen, nul is.

Indien het netwerk meer ingewikkeld is, wordt het oplossen van de vergelijkingen gewoonlijk vrij omslachtig.

We zullen enige stellingen beschouwen die in vele gevallen tot een veel eenvoudiger oplossing van de wisselstroomproblemen kunnen leiden.

10.2. De superpositiewet

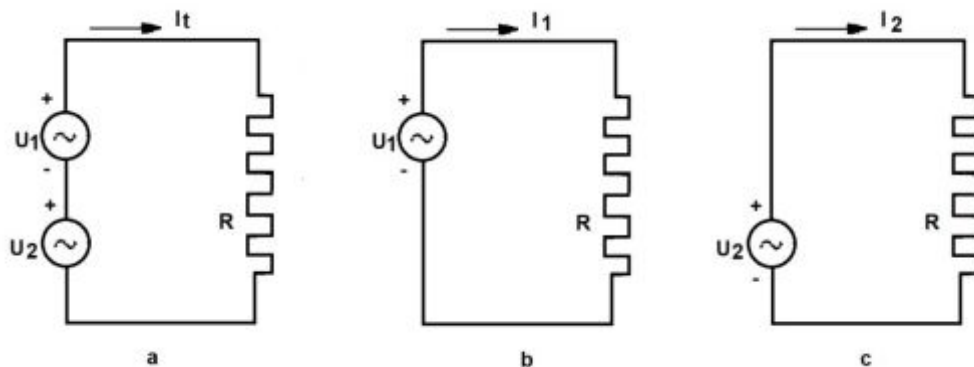


Fig. 10.1. Toepassing superpositiewet.

Zijn in een keten twee spanningen tegelijkertijd werkzaam, dan kan de totale stroom worden bepaald door de stromen te berekenen die elk der spanningsbronnen zou leveren, indien deze alleen werkzaam was en deze bij elkaar op te tellen.

Wordt gevraagd de stroom in de keten te bepalen die in de schakeling volgens fig. 10,1a optreedt, dan berekenen we eerst de stroom I_1 , die ten gevolge van U_1 optreedt (zie fig. 10,1b). Daarna berekenen we de stroom I_2 die ten gevolge van U_2 vloeit (zie fig. 10,1c).

De totaalstroom is ook te berekenen uit $I_t = \frac{U_1 + U_2}{R}$.

Volgens fig. 10,1 is $I_1 = \frac{U_1}{R}$ en $I_2 = \frac{U_2}{R}$, dus $I_t = I_1 + I_2 = \frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R} = \frac{U_1 + U_2}{R}$.

We zien hieruit dat de totaalstroom dus gelijk is aan de som van de stromen die elk der spanningen afzonderlijk zou leveren. Dit wordt de superpositiewet genoemd.

Deze wet geldt echter alleen indien de waarden van de in de keten voorkomende weerstanden of impedanties onafhankelijk zijn van de stroom die er door vloeit of de spanning die er over staat. Het netwerk moet uit lineaire onderdelen bestaan. Een lineaire weerstand is onafhankelijk van de stroom of spanning.

R.T.

160 W.T.

Nadruk verboden

Komt in de schakeling bijvoorbeeld een gloeilamp voor, dan zal de weerstand afhankelijk van de stroom zijn, daar de stroom een warmte-ontwikkeling ten gevolge heeft en hierbij verandert de weerstand van de gloeidraad.

Bij de stroom I_3 is de weerstand van de keten dus anders als bij de stroom I_1 of I_2 . De elektronenbuis is eveneens een niet-lineair element, daar de inwendige weerstand van de buis afhankelijk is van de aangesloten spanning. hetzelfde geldt voor een spoel of transformator met kern. Door aanwezigheid van de kern verandert de zelfinductie bij verandering van de stroom (denk aan de magnetiseringskromme).

Mogen we in het gebied waarbinnen deze gebruikt wordt de karakteristiek van de buis of van de spoel recht veronderstellen, dan kunnen we, zonder een te grote fout te maken, de superpositiewet toepassen.

Komen in de keten alleen gelijkspanningen voor, dan kunnen we de totaalstroom bepalen door de afzonderlijke stromen, afhankelijk van hun onderlinge richtingen, bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.

Zijn enkele wisselspanningen werkzaam, dan geldt voor de momentele waarde van de stromen hetzelfde als voor gelijkstromen. Voor de effectieve waarden geldt dit in het algemeen niet. Heeft men twee wisselspanningen werkzaam met gelijke frequentie en gelijke fase, dan kan men de effectieve waarde van de totaalstroom vinden door de afzonderlijke effectieve waarden bij elkaar op te tellen.

Zijn de frequenties gelijk, doch de fase verschillend, dan vindt men de effectieve waarde van de totale stroom door de effectieve waarde van de afzonderlijke stromen vectorieel bij elkaar op te tellen.

Zijn de frequenties verschillend, dan kan de effectieve waarde van de totale stroom worden gevonden door de wortel uit de som der kwadraten van de effectieve waarden der afzonderlijke stromen te bepalen.

$$\text{Dus: } I_{teff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2}.$$

Bestaan de spanningen uit een gelijkspanning en een wisselspanning, dan kan de effectieve waarde van de totale stroom ook berekend worden uit de wortels uit de som der kwadraten der afzonderlijke stromen.

$$I_{teff} = \sqrt{I_1^2 + I_{2eff}^2}.$$

Voor toepassingen van de superpositiewet mag de impedantie een ingewikkeld netwerk zijn met vele serie- en parallelschakelingen, mits de onderdelen lineair zijn. De spanningbronnen behoeven niet in dezelfde tak voor te komen en mogen over het gehele netwerk verspreid zijn.

Wordt gevraagd de stroom te berekenen die door \bar{Z}_2 vloeit in de schakeling volgens fig. 10,2a, dan bepalen we eerst de stromen $I_{2'}$ en $I_{2''}$ respectievelijk in fig. 10,2b en in fig. 10,2c, om daarna de stroom $\bar{I}_2 = I_{2'} + I_{2''}$ te bepalen.

We geven hier nogmaals de formulering van de superpositiewet.

Werken in een lineair netwerk enige spanningen, dan is op ieder ogenblik de stroom in iedere tak gelijk aan de som der stromen, die zouden vloeien wanneer ieder der spanningen afzonderlijk werkte.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 246 t/m 249.

10.2. De superpositiewet (vervolg)

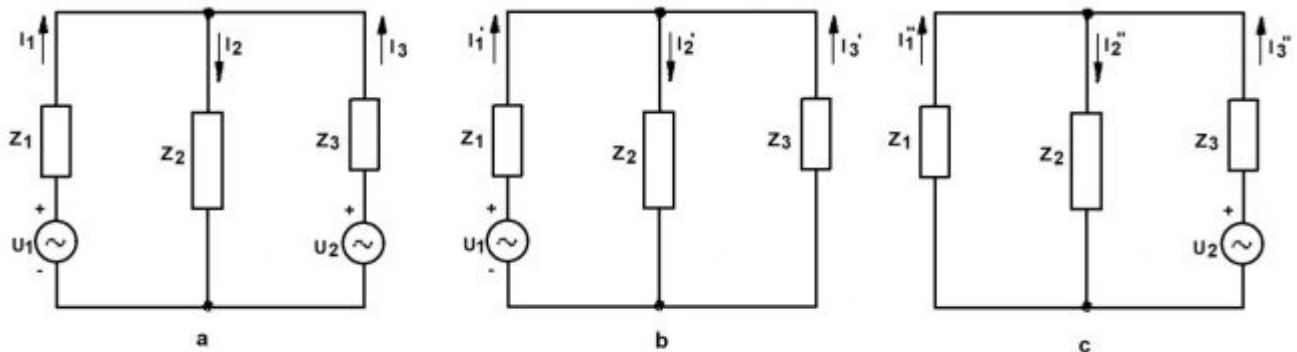


Fig. 10,2. Toepassing superpositiewet.

Voorbeeld: Bereken de stroom I_2 , gaande door Z_2 in de schakeling volgens fig. 10,2.

Oplossing: In iedere tak moet allereerst de positieve richting van de stroom worden aangenomen. Zie de pijlen in de figuren 10,2a, b en c. De stromen, door U_1 veroorzaakt, noemen we achtereenvolgens I_1' , I_2' , en I_3' en de stromen door U_2 veroorzaakt I_1'' , I_2'' , en I_3'' .

In fig. 10,2 is $\bar{I}_1' = \frac{U_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}}$, de spanning over de parallelschakeling van \bar{Z}_2 en \bar{Z}_3 is dan:

$$\bar{I}_1' \times \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{U_1 \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}}{\bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}} = U_1 \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

De stroom door \bar{Z}_2 wordt dan bepaald door de berekende spanning gedeeld door \bar{Z}_2 , dit geeft:

$$\bar{I}_2' = U_1 \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

Op soortgelijke wijze bepalen we de stroom \bar{I}_2'' die door U_2 wordt veroorzaakt:

$$\bar{I}_2'' = \frac{U_2}{\bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}}.$$

De spanning over de parallelschakeling van \bar{Z}_1 en \bar{Z}_2 is nu:

$$\bar{I}_3'' \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = U_2 \frac{\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}}{\bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}} = U_2 \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

De stroom door \bar{Z}_2 , geleverd door U_2 wordt nu:

$$\bar{I}_2'' = U_2 \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

De gehele stroom, gaande door \bar{Z}_2 is nu:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' = U_1 \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} + U_2 \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}$$

of:
$$\bar{I}_2 = \frac{U_1 \bar{Z}_3 + U_2 \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

R.T.

162 W.T.

Nadruk verboden

Zijn de frequenties van U_1 en U_2 gelijk, dan vindt met \bar{I}_2 met behulp van de complexe rekenwijze of met behulp van vectoren. Zijn de spanningen niet in fase, dan moet daar natuurlijk rekening mee worden gehouden.

10.3. De reciprociteitswet

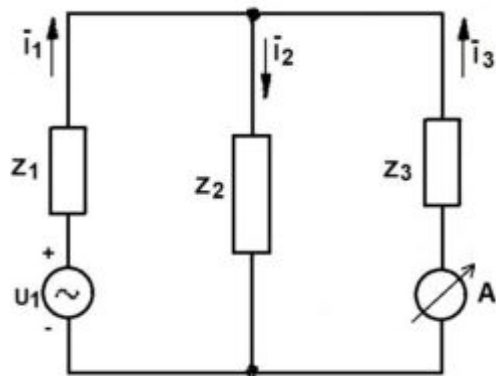


Fig. 10,3a. Toepassing van de reciprociteitswet.

In fig. 10,3a is een netwerkje weergegeven waarin behalve de spanningsbron ook een stroommeter A is opgenomen.

De stroom I_3 door de meter zullen we, met behulp van enkele vergelijkingen, bepalen.

$$\bar{U} - \bar{I}_2 \bar{Z}_2 - \bar{I}_1 \bar{Z}_1 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{I}_2 \bar{Z}_2 + \bar{I}_3 \bar{Z}_3 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_3 \dots\dots\dots (3)$$

Vergelijking (3) gesubstitueerd in (1) geeft:

$$\bar{U} - \bar{I}_1 \bar{Z}_2 - \bar{I}_3 \bar{Z}_2 - \bar{I}_1 \bar{Z}_1 = 0$$

$$\bar{U} = \bar{I}_1 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) + \bar{I}_3 \bar{Z}_2 \dots\dots\dots (4)$$

Substitueren van (3) in (2) geeft:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 \bar{Z}_2 + \bar{I}_3 \bar{Z}_2 + \bar{I}_3 \bar{Z}_3 &= 0 \\ \bar{I}_1 \bar{Z}_2 &= -\bar{I}_3 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \\ \bar{I}_1 &= \frac{\bar{I}_3 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}{\bar{Z}_2} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

Vergelijking (5) in (4) gesubstitueerd geeft:

$$\bar{U} = -\frac{\bar{I}_3 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{\bar{Z}_2} + \bar{I}_3 \bar{Z}_2$$

Hieruit volgt:
$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}}{\frac{-\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2} + \bar{Z}_2}$$

of:
$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U} \bar{Z}_2}{-(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3)}$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 250 t/m 252.

10.3. De reciprociteitswet (vervolg)

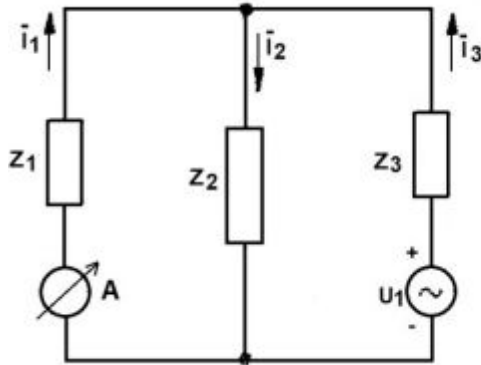


Fig. 10,3b. De reciproke schakeling van fig. 10,3a.

In fig. 10,3b is dezelfde schakeling weergegeven als in fig. 10,3a is weergegeven, behalve dat de spanningsbron en de stroommeter van plaats zijn verwisseld. We berekenen wederom de stroom die de stroommeter aanwijst, dus \bar{I}_1 .

$$\bar{U} - \bar{I}_2 \bar{Z}_2 - \bar{I}_3 \bar{Z}_3 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \bar{I}_2 \bar{Z}_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_3 \dots \dots \dots (3)$$

De vergelijking (3) in (1) gesubstitueerd, geeft:

$$\bar{U} - \bar{I}_1 \bar{Z}_2 - \bar{I}_3 \bar{Z}_2 - \bar{I}_3 \bar{Z}_3$$

$$\bar{U} = \bar{I}_1 \bar{Z}_2 + \bar{I}_3 (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) \dots \dots \dots (4)$$

De substitutie van (3) in (2) geeft:

$$\bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \bar{I}_1 \bar{Z}_2 + \bar{I}_3 \bar{Z}_3 = 0$$

$$\bar{I}_3 = - \frac{\bar{I}_1 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}{\bar{Z}_3} \dots \dots \dots (5)$$

De vergelijking (5) in (4) ingevuld voor \bar{I}_3 geeft:

$$\bar{U} = \bar{I}_1 \bar{Z}_2 - \frac{\bar{I}_1 (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)}{\bar{Z}_3} \rightarrow \bar{U} = \bar{I}_1 \frac{\bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2^2 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U} \bar{Z}_3}{-(\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3)}$$

Uit de verkregen uitdrukkingen voor \bar{I}_1 en \bar{I}_3 blijkt dat de berekende stromen gelijk zijn, hetgeen de reciprociteit van het netwerk aantoont.

We kunnen de reciprociteitswet nu als volgt onder woorden brengen:

Werkt op een punt x in een netwerk een spanning U die op een punt y een stroom I veroorzaakt, dan zal deze spanning U, werkende op het punt y, dezelfde stroom in punt x ten gevolge hebben.

We moeten wel bedenken dat de reciprociteitswet alleen toegepast mag worden in lineaire netwerken. Indien we een transformator veronderstellen, waarvan de magnetiseringskromme als een rechte lijn kan worden opgevat, kunnen we hierop ook de reciprociteitswet toepassen. Op de transformator volgens fig. 10,4a wordt aan primaire zijde een spanning $U = 10 \text{ V}$ aangesloten. De weerstand in de secundaire keten is 100Ω en de transformatieverhouding is $10 : 1$. De spanning aan de klemmen van de secundaire weerstand is dan 1 V en de secundaire stroom is dan $0,01 \text{ Amp}$.

Verwisselt men de spanningsbron en de stroommeter van plaats, dan verkrijgen we fig. 10,4b.

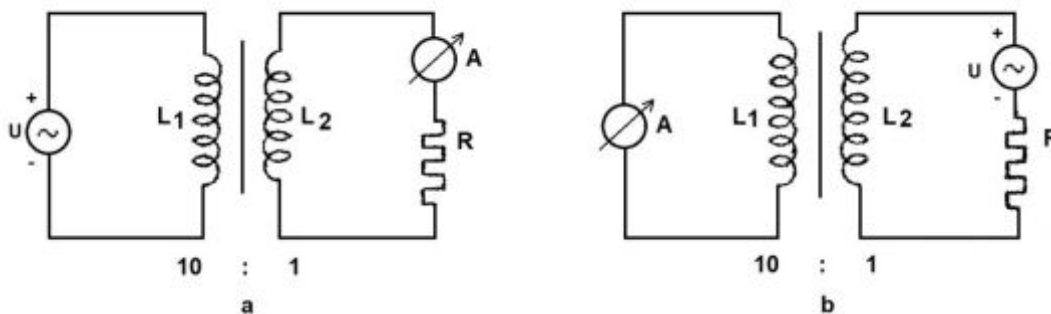


Fig. 10,4. Toepassing reciprociteitswet.

R.T.

164 W.T.

Nadruk verboden

10.3 Reciprociteitswet, toegepast op een transformator waarbij de magnetiseringskromme recht is ondersteld (vervolg)

Daar de stroommeter weerstandloos werd ondersteld, kunnen we de primaire keten van de transformator die nu als secundaire wikkeling fungeert, kortgesloten voorstellen. Hierdoor is de impedantie, gemeten aan de rechter klemmen van de transformator, dus aan de klemmen ab , eveneens nul. De stroom in de rechter keten van de transformator is dan bepaald door de weerstand en is 0,1 A. Daar de stromen in de wikkelingen omgekeerd evenredig zijn met het aantal windingen is de stroom door de ampèremeter 0,01 A, dus inderdaad gelijk aan de stroom die in het eerste geval door de stroommeter wordt aangewezen.

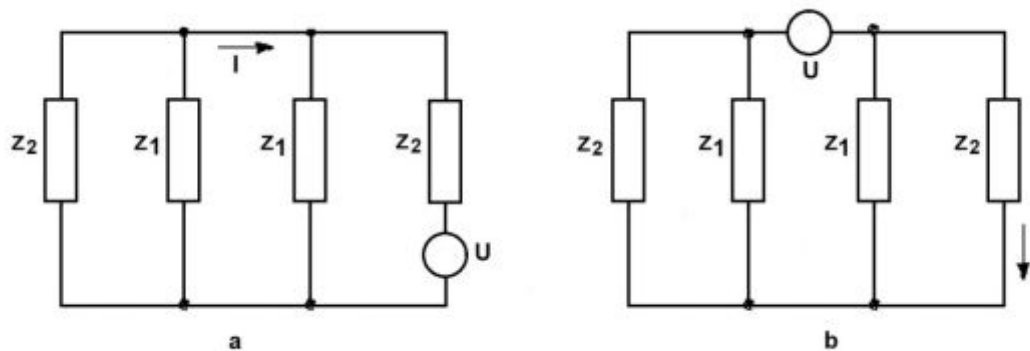


Fig. 10,5. Voorbeeld.

Voorbeeld:

Toon aan dat de stroom I in fig. 10,5a onafhankelijk is van de impedantie Z_1 .

Oplossing:

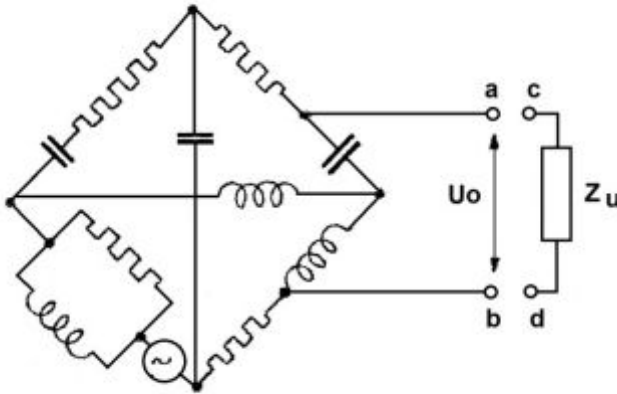
Om dit probleem te bezien, verwisselen we de spanningsbron en de stroompijl van plaats. We krijgen dan fig. 10,5b.

Als we dus kunnen aantonen dat de stroom I in fig. 10,5b onafhankelijk is van Z_1 , dan geldt dit ook voor de stroom in fig. 5a.

Daar in fig. 10,5b de impedanties links en rechts van U bij elke waarde van Z_1 gelijk blijven, zal bij elke waarde van Z_1 over elk gedeelte de helft van de spanning U staan. Dientengevolge is de stroom door Z_2 ongeacht de waarde van Z_1 steeds gelijk aan $I = \frac{U}{2Z_2}$.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 253 t/m 257.

10.4. De stelling van Thevenin

Fig. 10.6. Gevraagd de stroom door Z_u .

We veronderstellen een willekeurig lineair netwerk waarin een of meer spanningsbronnen werkzaam zijn, zoals bijvoorbeeld fig. 10,6 weergeeft. Gevraagd is nu de stroom te bepalen die in de impedantie Z_u optreedt. De stelling van Thevenin geeft een eenvoudige methode aan om de gevraagde stroom te bepalen.

De stelling van Thevenin zegt: dat men een netwerk vervangen kan denken door een spanning U in serie met een impedantie Z_i , waar de impedantie Z_u , op is aangesloten, zoals fig. 10,7 dat weergeeft.

We vatten het gegeven netwerk dus op als een inwendige weerstand.

De klemmen van deze spanningsbron zijn met a en b aangegeven.

Als we de klemmen a en b in fig. 10,6 niet verbonden hebben, dan is de spanning aan deze klemmen, de open klemspanning genaamd, gelijk aan de emk van een denkbeeldige spanningsbron U .

Deze open klemspanning $U_0 = U$ kunnen we meten aan de klemmen $a - b$, bij niet aangesloten Z_u van fig. 10,7. Hiermee is dus de emk van de vervangingsspanningsbron in fig. 10,7 bekend.

De inwendige impedantie Z_i kunnen we eveneens meten in fig. 10,6, terwijl Z_u nog niet is aangesloten en alle spanningen in het netwerk nul zijn, door aan deze klemmen een spanning aan te sluiten en de toegevoerde stroom te meten. Het quotiënt van de aangesloten spanning en de stroom geeft de inwendige impedantie Z_i .

Indien de elementen van het netwerk het toelaten, kunnen we de inwendige impedantie ook bepalen door de open klemspanning te delen door de kortsluitstroom.

Indien de inwendige impedantie en de spanning U_0 bekend zijn, is de stroom die door Z_u , na aansluiting van de klemmen $a - c$ en $b - d$, optreedt, bepaald door: $I = \frac{U_0}{Z_i + Z_u}$.

Ter verduidelijking zullen we, met behulp van de stelling van Thevenin, aantonen dat de stroom I in fig. 10,5a onafhankelijk is van de impedantie Z_1 . Om de stelling van Thevenin toe te passen, knippen we het netwerk op de plaats waar de stroom bepaald moet worden open (zie fig. 10,8). We bepalen nu eerst de open klemspanning - dat is de spanning U_0 - die tussen de klemmen $b - c$ door U wordt veroorzaakt. Deze spanning is:

$$\bar{U}_0 = \bar{U} \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}.$$

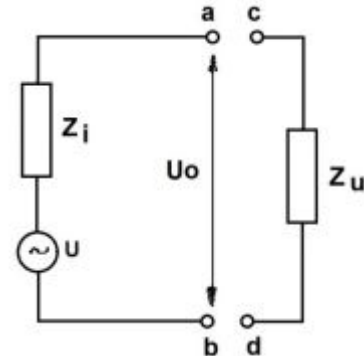


Fig. 10,7. Vereenvoudiging van fig. 10,6.

R.T.

166 W.T.

Nadruk verboden

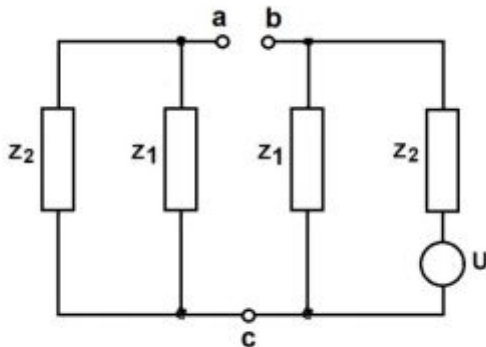


Fig. 10,8. Wijziging van fig. 10,5a voor toepassing van de stelling van Thevenin.

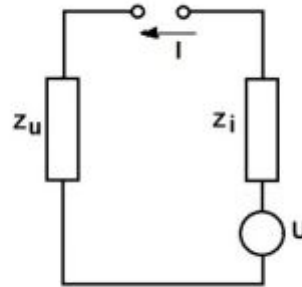


Fig. 10,9. Vervanging van fig. 10,8.

De inwendige weerstand van de vervangingsgenerator, dit is de weerstand die we zien als we vanaf de klemmen $b - c$ naar rechts kijken, dus:

$$\bar{Z}_i = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}.$$

De aan te sluiten uitwendige impedantie wordt gevormd door de impedantie die we zien als we vanaf de klemmen $a - c$ naar links kijken, dus:

$$\bar{Z}_u = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}.$$

We kunnen nu het vervangschema tekenen zoals dit in fig. 10,9 is weergegeven. De te beschouwen stroom, dat is de stroom die op de plaats van de klemmen $a - b$ vloeit, is nu:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{U_0}{\bar{Z}_i + \bar{Z}_u} \\ \bar{I} &= \frac{U \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}}{\frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}} \\ \bar{I} &= U \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_1 \bar{Z}_2} = U \frac{1}{2\bar{Z}_2}. \end{aligned}$$

Hieruit zien we dus weer dat de stroom I in fig. 10,5a onafhankelijk is van Z_1 .

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 258 t/m 262.

Hoofdstuk 11

Fase- en frequentiemodulatie

11.1. Fasemodulatie

Bij het in amplitude moduleren van een hoogfrequent draaggolf $U = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi)$, werd de amplitude \hat{U} in laagfrequent tempo gevarieerd, waarbij de fase $(\omega t + \varphi)$ onveranderd blijft.

We zullen ons in het volgende bezighouden met het veranderen van de fase waarbij de amplitude constant moet blijven, fasemodulatie genaamd.

We zullen de fasehoek φ nu als een grootte opvatten die in laagfrequent tempo verandert en deze voorstellen door $\varphi = m_1 \sin pt$, waarmee het in fase gemoduleerd signaal nu is voor te stellen door:

$$U = \hat{U} \sin(\omega_0 t + m_1 \sin pt).$$

Hierin is m_1 de maximale fase-afwijking van de gemoduleerde trilling ten opzichte van de ongemoduleerde trilling.

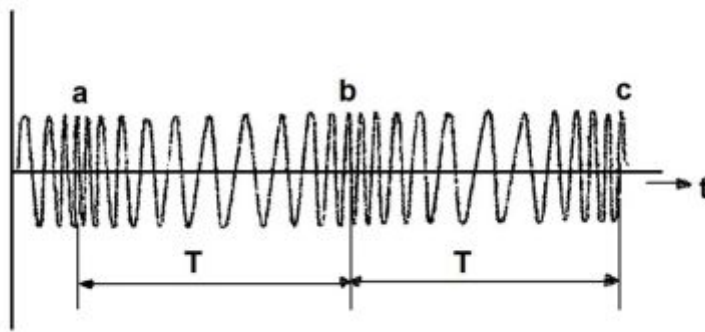


Fig. 11,1. In fase gemoduleerd signaal.

De fase-gemoduleerde trilling kunnen we voorstellen zoals in fig. 11,1 is weergegeven. Daar de fase in laagfrequent tempo verandert, zien we de afstand van de nuldoorgangen ook in laagfrequent tempo veranderen.

Bij $a, b,$ en c zijn de bijdragen $m_1 \sin pt$ het grootst. De tijd tussen a en b of b en c is dus de trillingstijd van de modulerende trillingen.

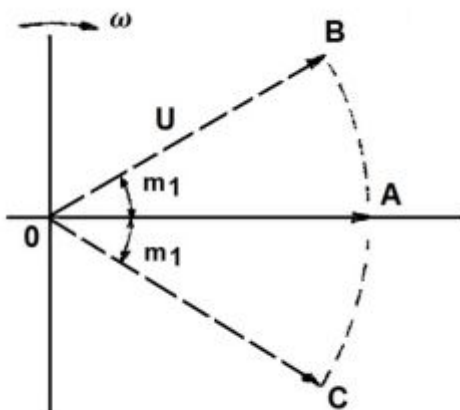


Fig. 11,2. Vectordiagram van een in fase gemoduleerde trilling.

We kunnen de in fase gemoduleerde trilling ook met behulp van een vectordiagram voorstellen. We kunnen dit het beste doen door de vector \hat{U} die de draaggolf voorstelt stil te laten staan en de tijdlijn te laten roteren met de snelheid ω_0 (zie fig. 11,2). De frequentie van de draaggolf wordt ook wel centrale frequentie genoemd.

De in fase gemoduleerde spanning wordt nu voorgesteld door de vector U die in laagfrequent tempo in fase verandert tussen de standen OB en OC . De vector zal dus periodiek een hoek gaan voorrijlen (OB) en een hoek gaan na-rijlen (OC) op de ongemoduleerde spanning OA .

R.T.

168 W.T.

Nadruk verboden

Daar de fase van voorijlend overgaat naar na-ijlend en omgekeerd, kunnen we de vector over een hoek $2m_1$ laten zwaaien. Bedenken we verder dat de tijdlijn met een constante snelheid ω_0 roteert, zal de snelheid van de vector die de gemoduleerde spanning voorstelt, variëren; dit wil zeggen: dat de frequentie periodiek zal veranderen. De momentele frequentie is het grootst als de fasehoek van na-ijlend overgaat naar voorijlen, dus van OC naar OB , op het moment dat de vector de ongemoduleerde vector passeert. Gaat de fasehoek over van voor- in na-ijlend, dus van OB naar OC dan is de momentele frequentie het laagst op het moment dat de vector OB de vector OA passeert. De frequentie van de gemoduleerde spanning is in de standen OB en OC gelijk aan de centrale frequentie.

Wordt de hoogfrequent trilling gemoduleerd met een sinusvormige laagfrequent trilling, dan zal niet alleen de fase, maar ook de momentele frequentie, die de vector OB en OC ten opzichte van de tijdlijn heeft, sinusvormig of cosinusvormig veranderen. De maximale momentele frequentie-afwijking stellen we voor door $\Delta\omega$, frequentiezwaai genaamd. Naast de fasemodulatie is dus ook sprake van frequentiemodulatie.

In de standen OB en OC staat de vector U een moment stil en is de fase-afwijking maximaal en gelijk aan m_1 , terwijl de frequentie-afwijking gelijk is aan nul.

Als de vector U de vector \hat{U} passeert, tegen de rotatierichting van de tijdlijn in, is de momentele frequentie maximaal en gelijk aan $\omega_0 + \Delta\omega$; bij beweging in dezelfde richting als de rotatierichting van de tijdlijn is de momentele frequentie minimaal, dus $\omega_0 - \Delta\omega$.

We zien dat de periodieke verandering van de momentele frequentie een kwartperiode, dus 90° voorijlt op de periodieke verandering van de fase. Is de fase-verandering voorgesteld door $m_1 \sin pt$, dan kunnen we de frequentieverandering voorstellen door $\Delta\omega \cos pt$.

De gemiddelde frequentieverandering over een halve periode van de lf-trilling is nu $\frac{2}{\pi} \Delta\omega$. De trillingstijd van de trilling is gelijk aan: $T = \frac{1}{\frac{p}{2\pi}} = \frac{2\pi}{p}$. Gedurende een halve periode wordt door de vector een hoek in radialen van $2m_1$ afgelegd, dus $2m_1 = \frac{2}{\pi} \Delta\omega \times \frac{\pi}{p} = \frac{2}{p} \Delta\omega$ en m_1 , de modulatie-index, is dan $m_1 = \frac{\Delta\omega}{p}$.

De fase gemoduleerde trilling kan men dus als volgt voorstellen:
$$U = \hat{U} \sin(\omega_0 t + m_1 \sin pt) = \hat{U} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{p} \sin pt\right).$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 263 t/m 268.



11.2. Fasemodulatie of frequentiemodulatie

Op verschillende manieren kan men de laagfrequent trilling op de hoogfrequent trilling moduleren.

De lage frequentie wordt in de modulatie weergegeven door p in de modulatie-index $m_1 = \frac{\Delta\omega}{p}$, dit wil zeggen, met p wordt dus aangegeven hoeveel maal de frequentiezwaai of fasezwaai per seconde wordt doorlopen.

Is de fasezwaai m_1 evenredig met de amplitude van de lf-trilling, dan spreekt men van fasemodulatie in engere zin. Hierbij is dus de modulatie-index m onafhankelijk van p .

Is de frequentiezwaai $\Delta\omega$ onafhankelijk van p en evenredig met de amplitude van de modulerende trilling, dan spreekt men van frequentiemodulatie.

We moeten hierbij wel bedenken dat indien er sprake is van eenzelfde modulatiefrequentie p , er geen verschil op te merken tussen fasemodulatie in engere zin en frequentiemodulatie. Men constateert verschil in frequentie- en fasemodulatie als men dit bij verschillende modulatiefrequenties gaat beschouwen.

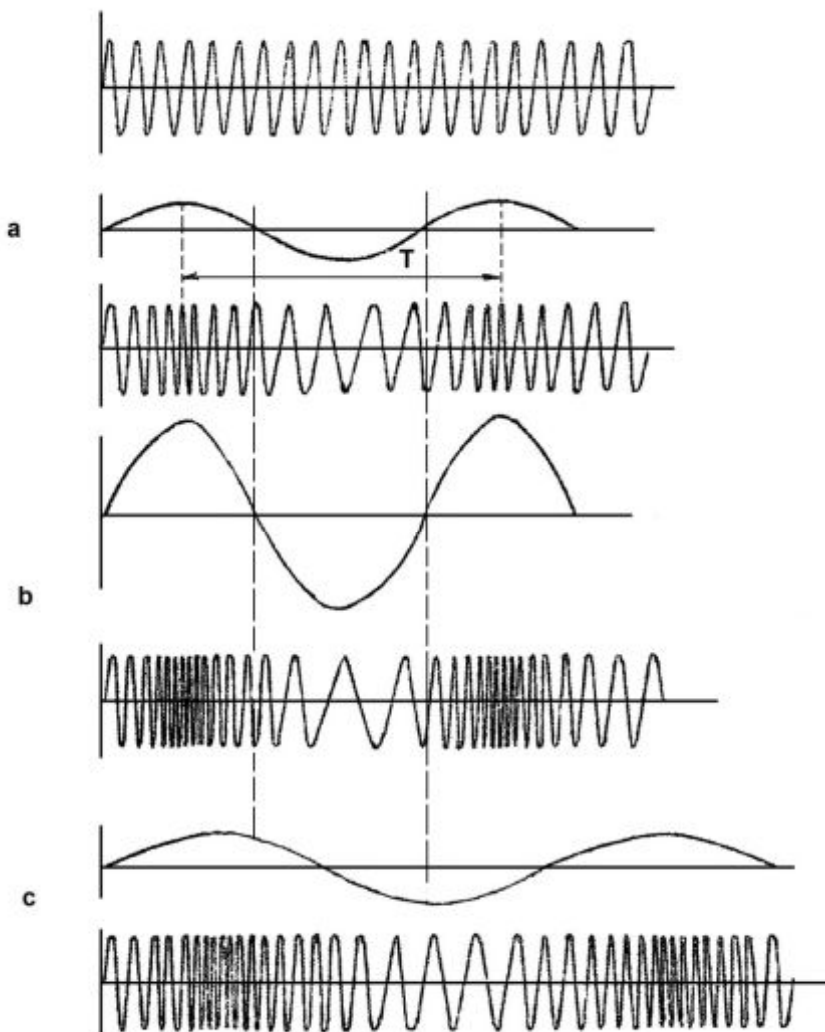


Fig. 11,3. Enkele in frequentie gemoduleerde trillingen.

In fig. 11,3 zijn enkele trillingen, die in frequentie gemoduleerd zijn, weergegeven.

In fig. 11,3a zijn de ongemoduleerde, de laagfrequent modulerende trilling en de gemoduleerde trilling weergegeven.

In fig. 11,3b wordt dezelfde draaggolf gemoduleerd met een laagfrequent trilling die dezelfde frequentie, doch een grotere amplitude heeft dan de lf-trilling in fig. 11,3a. we zien dat bij de positieve waarden van de lf-trilling de verdichtingen dichter zijn dan in fig. 11,3a en bij de negatieve waarden van de lf-trilling de nuldoorgangen wijder uit elkaar liggen dan in fig. 11,3a.

in fig. 11,3c is een laagfrequent trilling en de daardoor ontstane gemoduleerde trilling weergegeven, terwijl de lf-trilling dezelfde amplitude doch lagere frequentie heeft dan in fig. 11,3a.

R.T.

170 W.T.

Nadruk verboden

11.3. De analyse van de frequentie gemoduleerde trilling

De in frequentie- of fase gemoduleerde trilling is een niet sinusvormige of een niet harmonische trilling. We kunnen nagaan uit welke enkelvoudige componenten deze gemoduleerde trilling opgebouwd gedacht kan worden.

Met behulp van hogere wiskunde komt men tot de volgende resultaten:

$$U = \widehat{U} \cos(\omega_0 t + \sin pt) = a_0 \widehat{U} \cos \omega_0 t + a_1 \widehat{U} \cos(\omega_0 - p)t - a_1 \widehat{U} \cos(\omega_0 + p)t + a_2 \widehat{U} \cos(\omega_0 - 2p)t + a_2 \widehat{U} \cos(\omega_0 + 2p)t - a_3 \widehat{U} \cos(\omega_0 - 3p)t - a_3 \widehat{U} \cos(\omega_0 + 3p)t + a_4 \widehat{U} \cos(\omega_0 - 4p)t + a_4 \widehat{U} \cos(\omega_0 + 4p)t \dots \dots \dots \text{enz.}$$

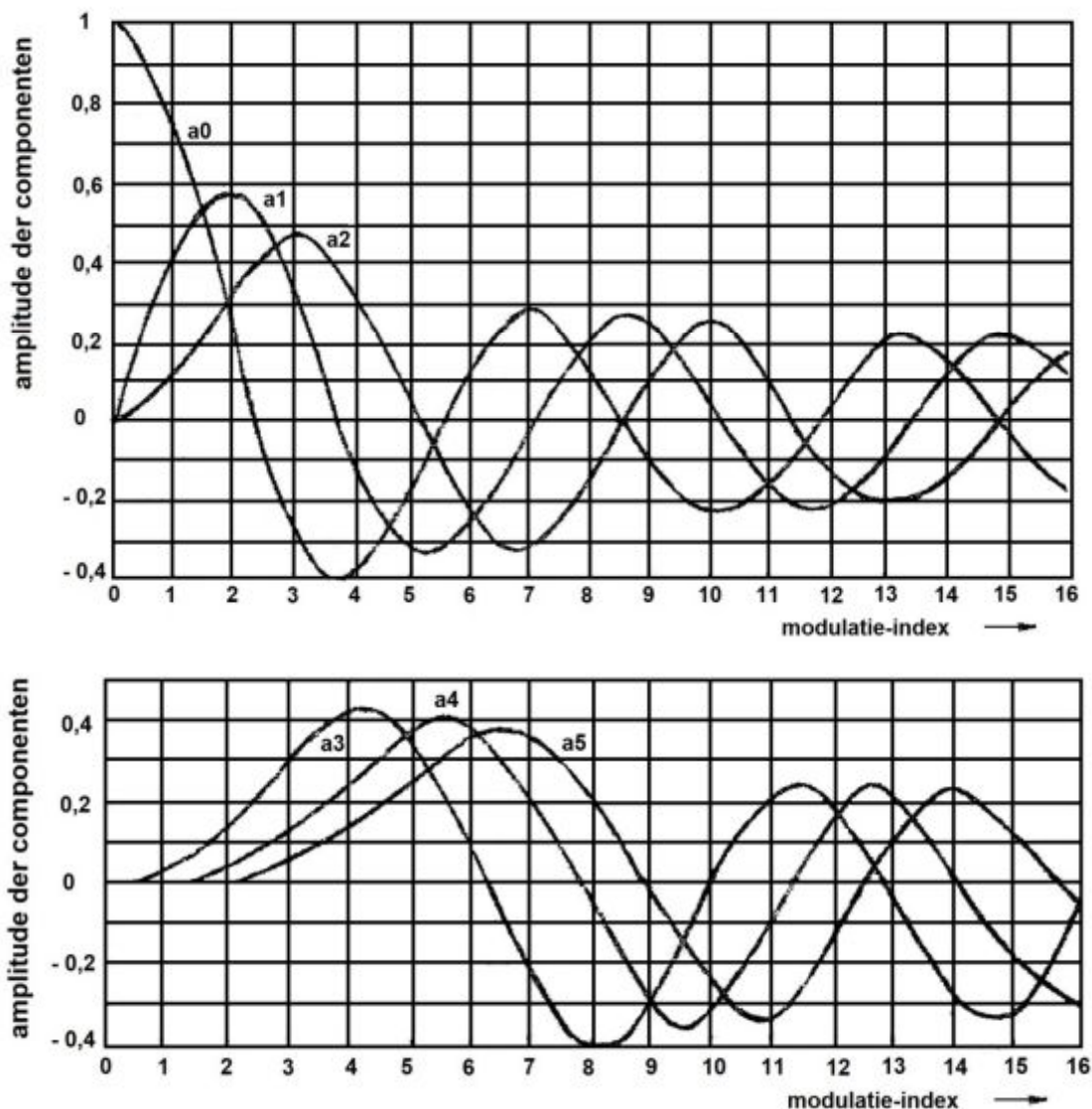


Fig. 11,4. Het verloop van de constanten a_0, a_1, a_2 enz. als functie van de modulatie-index. De amplitude van de centrale component is 1.

Deze reeks componenten kan zeer veel componenten bevatten.

We merken op dat alle componenten een onderling verschil in frequentie hebben dat gelijk is aan de



frequentie van de modulerende trilling. Aan weerszijden van de centrale frequentie wordt dus een groot frequentiegebied door de zijcomponenten in beslag genomen.

De constanten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ zijn afhankelijk van de grootte van m_1 , dus veranderen zij bij verandering van de amplitude of frequentie der modulerende trilling.

In fig. 11,4 is het verloop van a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 bij aangroeiende waarden van m weergegeven. We zien dat bij $m = 2,4$ de waarde van a_0 nul is, dus bij deze waarde van m is de centrale component niet in het frequentiespectrum aanwezig. Hetzelfde geldt voor $m = 5,6, m = 8,7$ enz.

Is $m = 3,9$ of $7,2$ of $10,2$ dan is $a_1 = 0$, dus komen de componenten met frequentie $\omega_0 + p$ en $\omega_0 - p$ niet in het frequentiespectrum voor. We zien dat bij bepaalde waarden van m dus een of meer componenten in het frequentiespectrum kunnen ontbreken.

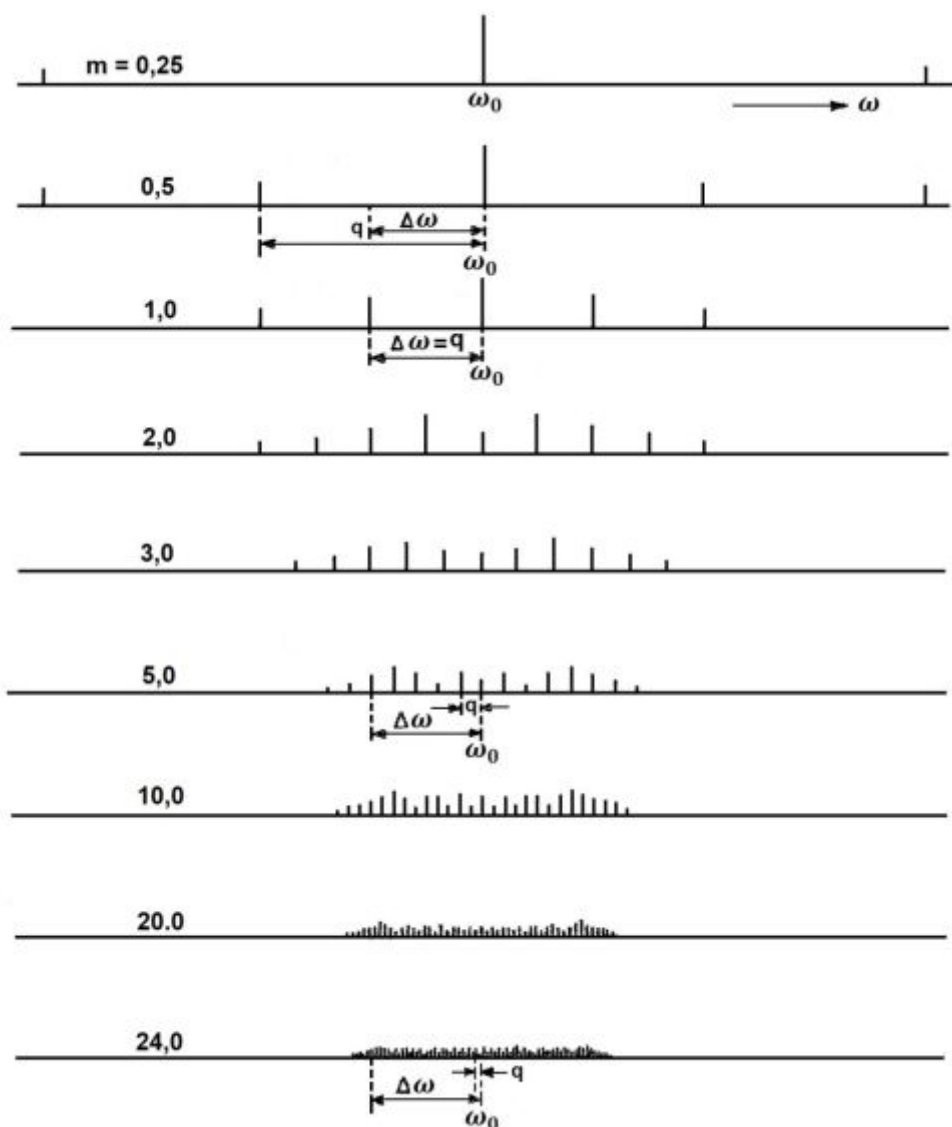


Fig. 11,5. Het frequentiespectrum, ofwel het amplitude-frequentiediagram van het in frequentie gemoduleerde signaal voor verschillende waarden van m_1 , doch constante waarden van de frequentiezwaai.

zodanige sterkte zijn dat zij niet verwaarloosd mogen worden. De overige componenten buiten de

In fig. 11,5 zijn enige frequentiespectra van trillingen met frequentie modulatorie weergegeven, terwijl de frequentiezwaai constant gehouden werd en dus: $m = \frac{\Delta\omega}{p}$ als functie van p werd veranderd. We zien, dat indien m veel kleiner is dan 1, op grote afstand van ω_0 enige zwakke componenten voorkomen die nagenoeg verwaarloosbaar zijn. Naarmate m groter is, dus bij constante frequentiezwaai bij lagere modulerende frequenties, komen de zijcomponenten dicht bij ω_0 te liggen, terwijl de amplituden (in de fig. de hoogste der lijntjes) ook groter zijn. We zien verder dat in de fig. ook de frequentiezwaai, het frequentiegebied, dat ten gevolge van het moduleren door de momentele frequentie wordt doorlopen is aangegeven. Buiten die zwaai komen ook nog enkele zijcomponenten voor die van

R.T.

172 W.T.

Nadruk verboden

zwaai kunnen worden verwaarloosd en zijn in de figuur ook niet aangegeven. We merken op dat bij $m = 5$, in het frequentiegebied dat door de zwaai wordt doorlopen, 5 zijcomponenten voorkomen en bij $m = 24$ komen 24 componenten binnen de zwaai voor.

De centrale component heeft bij de verschillende waarden van m verschillende amplituden; dit in tegenstelling tot het gedrag van de draaggolfcomponent bij amplitudemodulatie, waar de amplitude daarvan onafhankelijk is van de modulatieindex. Het frequentiegebied dat door het fm-sigitaal in beslag wordt genomen heeft voor alle waarden van m groter dan 5 nagenoeg dezelfde breedte.

Voor deze waarden van m is de bandbreedte van het in frequentie gemoduleerde signaal bij benadering onafhankelijk van de modulatie-index, dus ook onafhankelijk van amplitude en frequentie van de modulerende trilling. Voor het overbrengen van geluidstrillingen, zoals dat bij omroepzenders het geval is, moet men dus een modulatie-index van minstens 5 gebruiken. Daar ook nog componenten in het frequentiespectrum buiten de frequentiezwaai voorkomen, is het gewenst de bandbreedte van het in frequentie gemoduleerde signaal groter te kiezen dan $2 \times$ de frequentiezwaai. Praktisch heeft men als norm hiervoor dat de bandbreedte ongeveer $3 \times$ de frequentiezwaai is. Bij de heden in gebruik zijnde omroepzenders met frequentiemodulatie wordt gewerkt met een frequentiezwaai van $\Delta f = 75$ kHz en een bandbreedte van 200 kHz. Bij de modulatie van 15000 Hz is de modulatie-index dus 5.

11.4. Het vectordiagram van een in frequentie gemoduleerd signaal

We zullen het vectordiagram voor een in frequentie gemoduleerd signaal construeren voor het geval dat $m \ll 1$ is. We gaan uit van de uitdrukking:

$U = \hat{U} \cos(\omega_0 t + m \sin pt)$ met toepassing van de formule voor de cosinus van de som van twee hoeken $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ verkrijgen we:

$U = \hat{U} \cos \omega_0 t \cos m \sin pt - \hat{U} \sin \omega_0 t \sin m \sin pt$. Voor kleine waarden van m nadert de term $\cos \omega_0 t \cos m \sin pt$ tot $\cos \omega_0 t$, daar $\cos m \sin pt$ tot 1 nadert wegens de kleine waarde van de hoek $m \sin pt$. De term $\sin \omega_0 t \sin m \sin pt$ nadert tot $m \sin \omega_0 t \sin pt$, daar de term $\sin m \sin pt$ wegens de kleine waarde van de hoek $m \sin pt$ tot de hoek nadert. Hiermee is de uitdrukking voor het FM-sigitaal geworden: $U = \hat{U} \cos \omega_0 t - m \hat{U} \sin \omega_0 t \sin pt$ en na enige herleiding:

$U = \hat{U} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m \hat{U} \cos(\omega_0 + p)t - \frac{1}{2} m \hat{U} \cos(\omega_0 - p)t$. Dank zij de kleine waarde die we aan

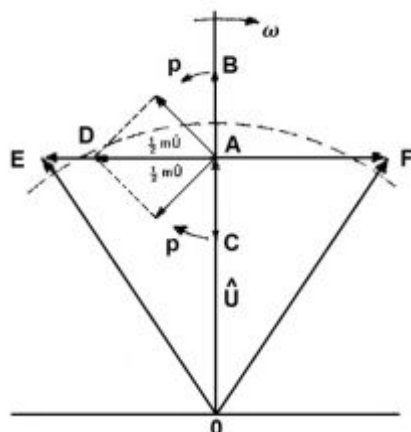


Fig. 11,6. Vectordiagram van een in frequentie gemoduleerd signaal.

m hebben toegekend zijn slechts drie componenten van het fm-sigitaal overgebleven. Het vectordiagram is nu op bekende wijze te construeren (zie fig. 11,6). De component $\hat{U} \cos \omega_0 t$ is voorgesteld door de vector OA , die op het tijdstip $t = 0$ samenvalt met de tijdlijn. De twee zijcomponenten worden voorgesteld door resp. een vector AB die in het verlengde van OA ligt en een vector AC , in negatieve richting uitgezet en die samenvalt met OA . Deze twee laatste vectoren draaien met een snelheid p om het punt A . De som OD van OA , AB en AC stelt het fm-sigitaal voor. We zien dat de somvector als functie van de tijd zich beweegt tussen de standen OE en OF . Zwaait deze vector van OE naar OF , dus in dezelfde richting als de tijdlijn, dan is de frequentie lager dan die van de draagtrilling ω_0 . We zien dat in het door ons verkregen vectordiagram de amplitude van de FM-trilling niet constant is en in de standen OE en OF groter is dan in OA . Dit is een fout die is ontstaan

doordat we de overige componenten die ook in het signaal voorkomen, $(\omega_0 + 2p)$, $(\omega_0 - 2p)$ enz., hebben verwaarloosd. Zouden we deze ook in het vectordiagram opnemen, dan zou het einde van de somvector zich langs een cirkelboog bewegen die zijn middelpunt in de oorsprong van het assenstelsel heeft. De amplitudeveranderingen zouden dan geheel verdwenen zijn.

Hoofdstuk 12Lange leidingen en Lechersysteem12.1. Lange leidingen

In de natuurkunde hebben we reeds kennis gemaakt met de lopende- en staande golfbewegingen die zich kunnen voordoen op een koord dat in trillende beweging wordt gebracht, al naar gelang het einde van het koord of het los of vast zit.

Is dit einde los, dan zal een lopende golf die zich langs het koord verplaatst, kunnen worden waargenomen.

Is het einde van het koord vastgemaakt, dan zullen zich staande golven op het koord ontwikkelen, daar aan het vaste einde reflecties van de golf optreden waardoor interferentie van de heengaande (lopende) golf en de gereflecteerde (teruggaande lopende) golf ontstaat, waarvan het resultaat een staande golf is.

De maximum uitwijking van het koord, dus de amplitude van de golfbeweging hangt natuurlijk af van de sterkte van de trilling waarmee het koord in beweging wordt gebracht en de stijfheid van het koord.

Wordt het begin van het koord zodanig in beweging gebracht dat een volledige trilling in T seconden wordt doorlopen, dan zal de golflengte λ (lambda*) van de golfbeweging zijn: $\lambda = CT$ meter, als c de voortplantingssnelheid van de golfbeweging langs het koord is.

Daar een volledige trilling in T seconden wordt doorlopen, kunnen we ook zeggen: De frequentie van de trilling $f = \frac{1}{T}$ perioden per seconde. Hieruit volgt dat golflengte $\lambda = \frac{c}{f}$ meter is. Indien een wisselspanning op een lange leiding wordt aangesloten zal de aard van de golfbeweging waarmee de spanning of de stroom zich langs de leiding voortplanten, afhangen van de situatie die zich aan het einde van de leiding voordoet. Met andere woorden: welke impedantie zich bevindt aan het einde van de lange leiding of kabel.

We vinden bij de lange leiding, dienende voor het transport van elektrische energie veel punten van overeenkomst in de gedragingen met die van het koord, waarop een golfbeweging wordt ontwikkeld.

(We spreken van een lange leiding als de lengte veel groter is dan de golflengte van de aangesloten spanning).

We moeten dan het koord met een vast einde vergelijken met een lange leiding waarbij aan het einde geen spanning of geen stroom kan optreden.

Het koord met een los einde kunnen we ook vervangen denken door een lange leiding van oneindige lengte. Op een dergelijke leiding kunnen zich alleen maar lopende golven voordoen, daar bij oneindige lengte natuurlijk geen spraken kan zijn van reflectie (zie fig. 12,1).

Is de frequentie van de aangelegde spanning f Hz, dan zal de golflengte van de spanning en stroom langs de leiding zijn: $\lambda = \frac{c}{f}$. Hierin is c de voortplantingssnelheid van de elektromagnetische golfbeweging, dus $3 \cdot 10^8$ m/sec.

¹. In Westerse landen wordt ook de op het Oudgrieks gebaseerde spelling en uitspraak **labda** (Grieks: $\lambda\acute{\alpha}\beta\delta\alpha$) gebruikt.
(Bron: Wikipedia) FV

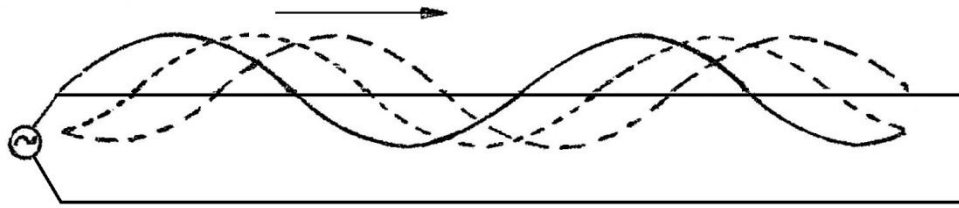


Fig. 12,1 Lopende golven langs een oneindig lange lijn.

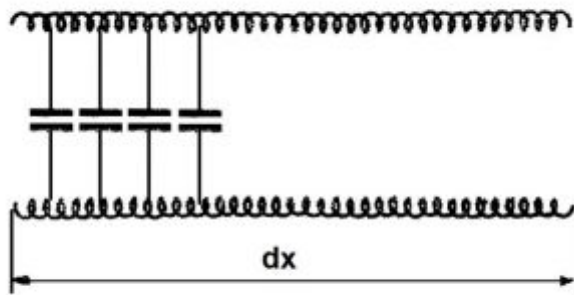


Fig. 12,2. De verdeelde zelfinductie en capaciteit van een stukje kabel (de verliezen zijn verwaarloosd).

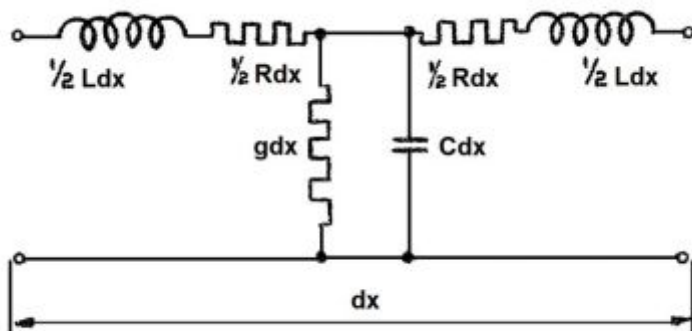


Fig. 12,3. Het vervangingschema van een klein stukje kabel door een T-sectie.

Vervangingschema van kabel-element

Voor een nadere beschouwing van de eigenschappen van de lange leiding, hebben we in fig. 12,2 een klein stukje van een leiding weergegeven. Over de gehele lengte van dit stukje dat we een lengte dx gegeven hebben, doen zich een zelfinductie en capaciteiten gevoelen. De verdeelde zelfinductie hebben we te danken aan de geleiders zelf. De capaciteitjes vormen zich tussen de geleiders met de isolatie daartussen als diëlektricum.

Indien we die heel klein nemen mogen we de verdeelde capaciteit vervangen denken door een in het midden geconcentreerde capaciteit C_{dx} (zie fig. 12,3).

Hierin is C de capaciteit van de leiding per eenheid van lengte (bijv. 1 meter of 1 Km lengte).

Eveneens treffen we in elk punt zelfinductie aan. We kunnen ook deze geconcentreerd denken in twee gelijke zelfinducties $\frac{1}{2} L dx$; waarin L de zelfinductie per eenheid van lengte is.

De verliezen die langs de kabel optreden, kunnen we vervangen denken door twee seriële weerstanden $\frac{1}{2} R_{dx}$, die de ohmse verliezen en de stralingsverliezen verdisconteren, met daarbij een geleiding $g dx$ parallel aan de condensator $C dx$, die de diëlektrische verliezen vertegenwoordigt die in het isolatiemateriaal optreden.

We hebben op deze wijze een kabelelementje vervangen door de zogenaamde T-sectie.

Het vervangingsschema van een stukje kabel kan ook voorgesteld worden door een π -sectie (zie fig. 12,4).

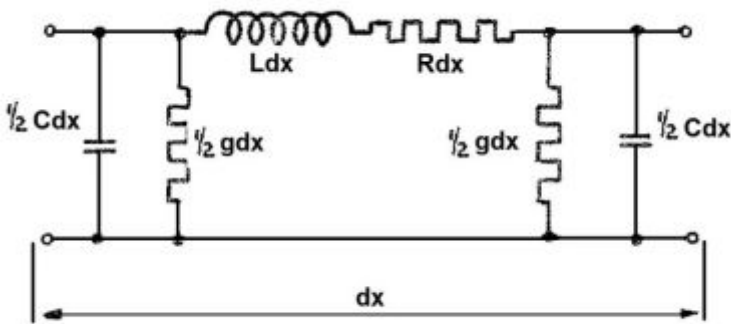


Fig. 12,4. Het vervangingsschema van een klein stukje kabel door een π -sectie.

De weerstanden R en de geleiding g vertegenwoordigen de energieverliezen langs de leiding. Het resultaat hiervan zal zijn dat de golf die zich langs de kabel voortplant aan het einde van de kabel zwakker zal zijn dan die aan het begin.

12.2. Kabelimpedantie

De spanning die op de ingangsklemmen van de kabel is aangesloten, heeft een bepaalde stroom in de kabel tot gevolg.

De verhouding van de spanning tot de stroom aan het begin van een oneindig lange kabel geeft de ingangsimpedantie daarvan.

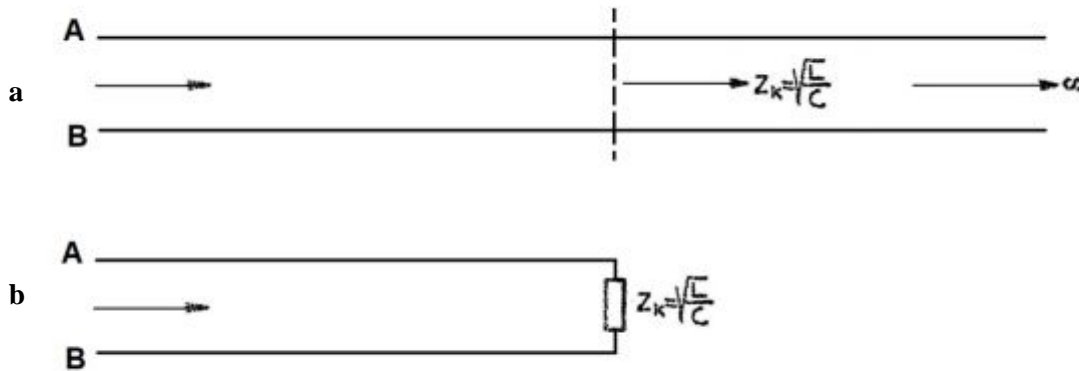


Fig. 12,5. a. lopende golven op oneindig lange kabel.
b. lopende golven op een kabel van eindige lengte.

Deze impedantie is te berekenen uit:

$$Z_K = \frac{R + j\omega L}{g + j\omega C} \text{ ohm, waarin } R, L, g \text{ en } C \text{ per eenheid van lengte gelden en } \omega \text{ de frequentie van de aangelegde spanning is.}$$

Deze impedantie wordt ook wel de karakteristieke impedantie of golfimpedantie van de kabel genoemd. Deze impedantie treedt dus alleen op bij een oneindig lange kabel waarop alleen lopende golven kunnen optreden.

R.T.

176 W.T.

Nadruk verboden

De golfimpedantie is, zoals uit de formule daarvoor blijkt, onafhankelijk van de lengte van de kabel en alleen afhankelijk van de doorsnede, de afstand en de materiaalsoort van de geleiders en van de gebezigde isolatiematerialen tussen de geleiders in verband met de diëlektrische eigenschappen.

De zelfinductie en capaciteit die een kabel per eenheid van lengte heeft, zijn ook te berekenen. Daar de afleiding van de benodigde uitdrukking buiten de strekking van deze cursus valt, zullen we hier volstaan met het vermelden van de formules waarmee men de capaciteit en zelfinductie kan berekenen.

Bij een kabel bestaande uit twee evenwijdige geleiders (de parallellijn) is de zelfinductie in microhenry's per meter lengte.

$$L = 0,921 \log \frac{d}{r} \mu H/m$$

Hierin is d de afstand en r de straal van de geleiders in meters uitgedrukt.

De capaciteit van de parallellijn per meter lengte is in picofarads per meter.

$$c = \frac{12,06 \varepsilon_r}{\log \frac{d}{r}} pF/m.$$

De karakteristieke impedantie wordt dus ($\varepsilon_r = 1$)

$$Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,921 \log \frac{d}{r} 10^{-6}}{\frac{12,6}{\log \frac{d}{r}} \times 10^{-12}}} = 276 \cdot \log \frac{d}{r} \Omega.$$

Bij een coaxiale transmissielijn is de zelfinductie in μH per meter lengte:

$L = 0,64 \log \frac{R}{r} \mu H/m$, waarin R de binnendiameter van de buitengeleiders en r de buitendiameter van de binnengeleiders is.

De capaciteit in pF per meter lengte is:

$$C = \frac{24,1 \varepsilon_r}{\log \frac{R}{r}} pF/m.$$

De karakteristieke impedantie wordt:

$$Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,46 \log \frac{R}{r} 10^{-6}}{\frac{24,1}{\log \frac{R}{r}} \varepsilon_r 10^{-12}}} = \frac{138}{\sqrt{\varepsilon_r}} \log \frac{R}{r} \Omega.$$

en met $\varepsilon_r = 1$ wordt de karakteristieke impedantie $Z_K = 138 \log \frac{R}{r} \Omega$.

Indien we de verliezen van een oneindig lange kabel verwaarlozen dan nadert de

golfimpedantie tot: $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Nu is de kabelimpedantie onafhankelijk van de frequentie en zijn de amplituden van de stroom- en spanningsgolf aan het einde der kabel even groot als aan het begin.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 275 t/m 285.



Wensen we op een kabel van eindige lengte alleen lopende golven toe te laten, dan moet deze zich identiek aan de oneindig lange kabel gedragen. We kunnen dit als volgt verwezenlijken.

De oneindig lange kabel volgens fig. 12,5a heeft bij verwaarlozing der verliezen een impedantie gelijk aan $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Knippen we een stuk met lengte AC van de oneindig lange kabel af,

dan blijft het stuk rechts van CD oneindig lang en heeft dus ook een ingangsimpedantie $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Sluiten we het stuk AC af met een weerstand die gelijk is aan $Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (zie fig. 12,5b), dan is voor het stuk kabel AC niets veranderd door het oneindig lange stuk weg te nemen, daar de weerstand de ingangsimpedantie daarvan vertegenwoordigt. Op het stuk kabel AC treden nu alleen lopende golven op en aan de ingang van de kabel volgens fig. 12,5b meten we $Z_{ingang} = Z_K = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

12.3. De formule voor de lopende golf

We stellen ons voor dat de spanning in punt A van fig. 12,6 op het tijdstip $t = 0$ voor te stellen is door $U = \hat{U} \sin \omega t$ en dat de golf een tijd Δt nodig heeft op de afstand van A naar B , Δx te doorlopen.

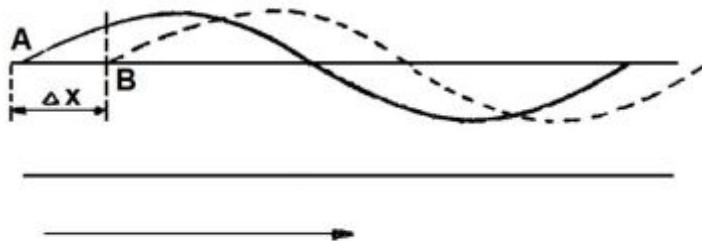


Fig. 12,6. Een lopende golf.

gehouden worden met de relatieve diëlektrische constante ϵ_r en de relatieve permeabiliteit μ_r van het isolatiemateriaal. De voortplantingssnelheid is dan $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ m/sec.

De voortplantingssnelheid kan dus kleiner zijn dan die zich in lucht voordoet. Daar de voortplantingssnelheid, frequentie en golflengte onderling verband houden door de formule $\lambda = \frac{c}{f}$ blijkt door de kleinere voortplantingssnelheid de golflengte ook kleiner te zijn, dan deze in lucht zou zijn.

Het zal ook zonder meer duidelijk zijn dat als de golf zich in de trillingstijd van de trilling zich minder snel voortplant, de afgelegde weg, dus de golflengte kleiner zal worden.

Is de voortplantingssnelheid op de kabel $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$, dan is de golflengte $\lambda_1 = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$.

De spanning in punt B ijlt een zekere hoek φ na op de spanning in punt A .

De voortplantingssnelheid van de golven langs de lijn is praktisch gelijk aan de snelheid van de lichtgolven, dus $C = 3 \cdot 10^8$ m/sec.

Zijn de beide geleiders van de kabel niet door lucht van elkaar geïsoleerd, dan moet bij het bepalen van de voortplantingssnelheid C rekening

R.T.

178 W.T.

Nadruk verboden

De verhouding tussen de golflengte in lucht (vacuüm) en die op de kabel, de verkortingsfactor, genaamd is:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}}{\frac{c}{f}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

De tijd die de golf in punt B na-ijlt op de golf in punt A is dus $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ sec. Daar de aangelegde spanning een hoek ω per seconde doorloopt, heeft deze in de tijd Δt een hoek $\omega \cdot \Delta t$ doorlopen. De spanning in punt B is dus voor te stellen door:

$$U = \hat{U} \sin(\omega t - \omega \cdot \Delta t) \text{ of met } \Delta t = \frac{\Delta x}{c}$$
$$U = \hat{U} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \Delta x\right)$$

In de laatste uitdrukking hebben we de spanning uitgedrukt in de afgelegde afstand Δx langs de kabel. De lopende golf die optreedt is in fig. 12,7 voor enkele tijdstippen weergegeven.

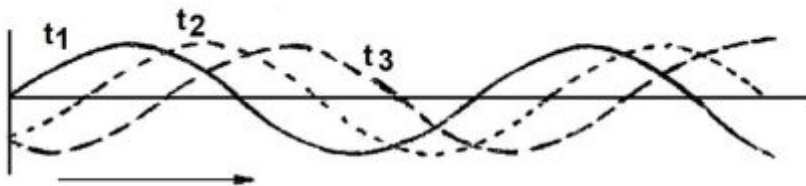


Fig. 12,7. Een lopende golf als functie van de tijd.

Onder de golflengte verstaan we de kortste afstand tussen twee punten waarin de golf dezelfde waarde in dezelfde zin doorloopt.

Laten we de golf een gehele golflengte afleggen dus $\Delta x = \lambda$, dan wordt de doorlopen hoek:
 $\omega \cdot \Delta t = \frac{\omega}{c} \Delta x = \frac{\omega}{c} \lambda = 2\pi$.

De verhouding $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \beta$ duidt men gewoonlijk aan als faseconstante β . Hiermee wordt de uitdrukking voor de spanning aan het einde van de kabel:

$$= \hat{U} \sin(\omega t - \beta l)$$

In de voorafgaande beschouwingen werden de verliezen verwaarloosd, d.w.z. de spanning is onafhankelijk van de lengte van de kabel. Worden de verliezen in rekening gebracht, dan gaat dit niet meer op en zal de amplitude van de spanning en stroom langs de lijn steeds kleiner worden. Met inachtnaam van de verliezen is de spanning voor te stellen door:

$$\hat{U} = U \epsilon^{-\alpha l} \sin(\omega t - \beta l).$$

Waarin ϵ het grondtal is van de natuurlijke logaritmen ($\epsilon = 2,71828\dots$) en α de dempingsconstante, een maatgevende factor die de spanningsafname of stroomafname langs de kabel per eenheid van lengte aangeeft. We zeggen nu dat de lopende golf langs de kabel wordt gedempt. In fig. 12,8 is de lopende golf inclusief demping weergegeven.

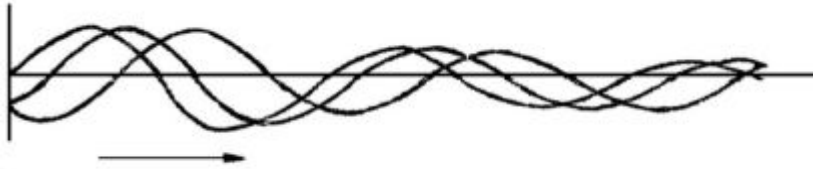


Fig. 12,8. Gedempte lopende golf.

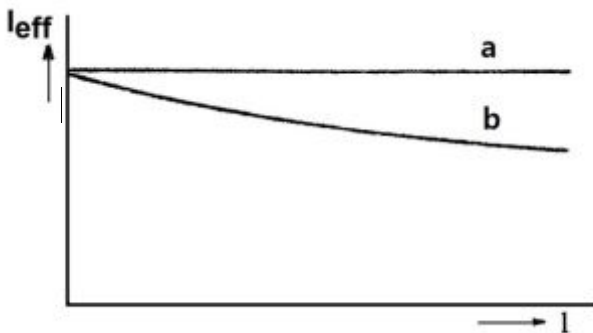


Fig. 12,9. De effectieve waarde van de lopende golven:
 a. zonder verliezen.
 b. met verliezen.

12.4. Staande golven bij kortgesloten einde

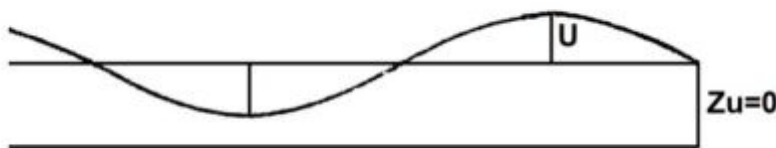


Fig. 12,10. Staande golf bij kortgesloten einde.

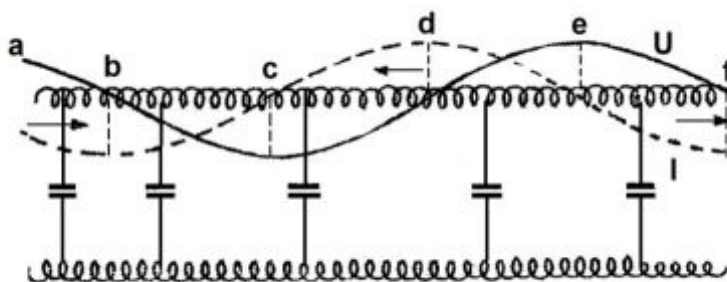


Fig. 12,11. Staande golf en verdeelde capaciteit en zelfinductie.

Bij verliesvrij veronderstelde kabel, waarop lopende golven optreden, meten we in elk punt dezelfde effectieve waarde van stroom of spanning.

worden de verliezen wel in rekening gebracht, dan wordt de effectieve waarde van stroom en spanning naar het einde toe steeds kleiner.

In fig. 12,9 is het verloop van de effectieve waarde van een lopende golf langs een leiding weergegeven voor het geval zonder verliezen (a) en met verliezen (b).

De karakteristieke impedantie van een kabel kan worden bepaald met behulp van de ingangsimpedantie bij open einde (open impedantie Z_{open}) en de ingangsimpedantie bij kortgesloten einde (kortsluitimpedantie Z_{kort}). Het verband tussen deze grootheden is: $Z_k = \sqrt{Z_{open} \times Z_{kort}}$.

Wordt de kabel aan het einde kortgesloten, of de einden niet verbonden, dan treden alleen staande golven op. Als de einden van de kabel worden kortgesloten, dan is het niet mogelijk dat aan dit einde een spanning ontstaat, aangezien de weerstand daar ter plaatse nul is. Aan dit einde moet dus een spanningswaarde nul of spanningsknoop optreden (zie fig. 12,10). Denken we nog even aan de verdeelde capaciteit en zelfinduc-

R.T.

180 W.T.

Nadruk verboden

tie van de leiding zoals fig. 12,11 dit weergeeft, dan kunnen we zeggen dat de capaciteiten die in de omgeving van punt c en e tot de grootste spanning worden opgeladen, terwijl de capaciteiten ter plaatse b , d , en f in het geheel geen spanning krijgen. Daar waar de capaciteiten de maximum spanning hebben, moet de stroom nul zijn en daar waar de capaciteiten een spanning nul hebben, moet de stroom maximum zijn. Dit wil zeggen dat de stroomgolf over een afstand van $\frac{1}{4} \lambda$ verschoven is ten opzichte van de spanningsgolf. We moeten bedenken dat als de stroom tussen a en c en tussen e en f naar rechts vloeit, dan zal deze tussen c en e naar links vloeien.

We kunnen ons dit voorstellen als we bedenken dat de condensatoren tussen a en b en tussen e en f naar rechts worden ontladen, terwijl de condensatoren tussen d en e naar links worden ontladen. De condensatoren tussen b en c en tussen c en d worden dan opgeladen.

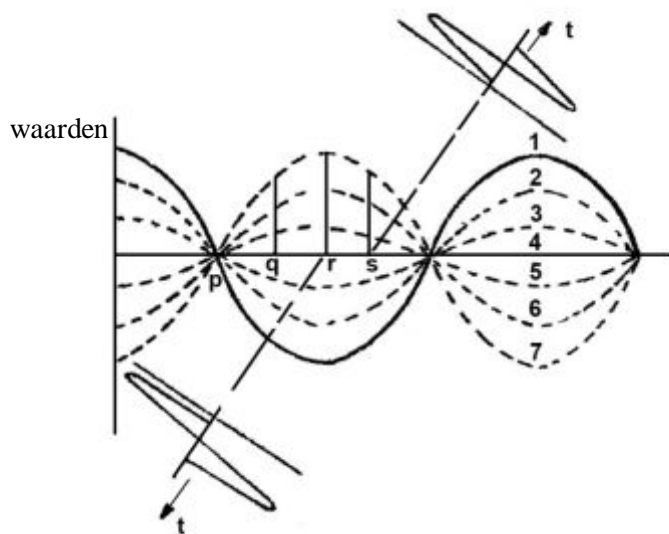


Fig. 12,12. De stroom bij staande golven als functie van de tijd.

12.5. Staande golven bij open einde

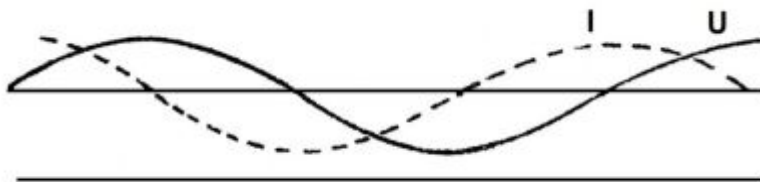


Fig. 12,13. Stroom- en spanningsgolf bij open einde van de kabel.

bij een open- of kortgesloten kabel meten, hangt af van de plaats van de ingangsklemmen ten opzichte van de staande golf langs de kabel.

Als functie van de tijd verandert de staande golf zoals fig. 12,12 dit weergeeft, waarin de momentele

achtereenvolgens met 1 t/m 7 zijn weergegeven als de aangelegde spanning aan de ingangsklemmen van maximum positief naar maximum negatief verandert.

In punt p treedt bij gekozen frequentie van de aangelegde spanning geen stroom op. Hier bevindt zich dus een stroomknoop. De amplitude van de wisselstroom als functie van de tijd is in r groter dan in punt q of s .

Wordt de kabel aan het einde open gelaten, dit wil zeggen dat de uitgangsimpedantie oneindig groot is, dan kan aan het einde geen stroom vloeien, dus moet daar een stroomknoop zijn (zie fig. 12,13) en tevens een spanningsmaximum of spanningsbuik.

De ingangsimpedantie die we

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 286 t/m 294.

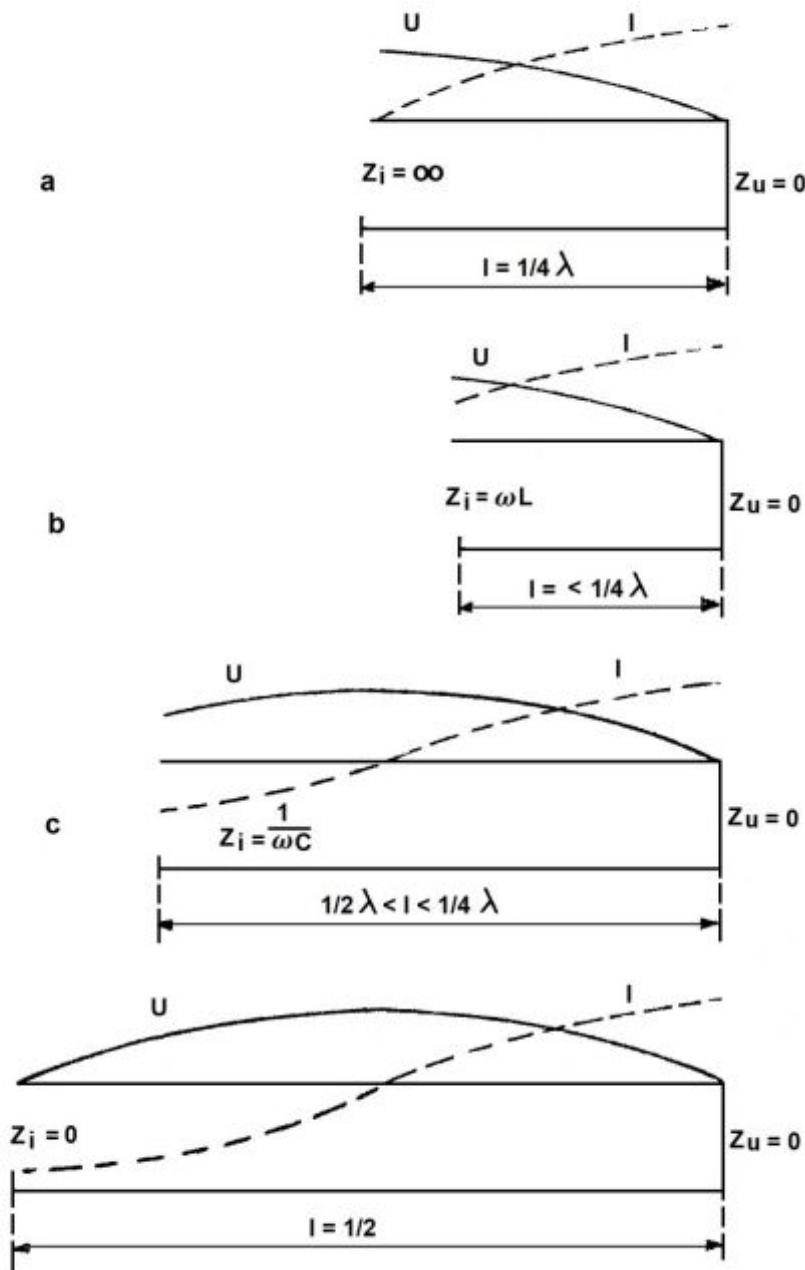


Fig. 12,14. De kortgesloten kabelsectie.

Bezien we allereerst de kortgesloten kabel en nemen daarvan een kort stuk. (als de lengte van het stuk kabel niet meer groot is ten opzichte van de golflengte spreken we van een Lechersysteem dat gelijk is $1/4 \lambda$). (zie fig. 12.4a).

Aan de uitgang van deze $1/4 \lambda$ -sectie heersen een spanningsknoop en een stroombuik. Aan de ingang doen zich dus een spanningsbuik en een stroombuik voor.

De ingangsimpedantie is dus bepaald door het quotiënt van dit spanningsmaximum en de nulwaarde van de stroom en is dus oneindig groot.

De ingangsimpedantie van een stukje kabel dat kleiner is dan $1/4 \lambda$ heeft een eindige waarde, want dan is naast de spanning ook een stroom aanwezig.

We moeten voortdurend bedenken dat de gedragingen van stroom en spanning langs de leiding uitsluitend bepaald worden door de afsluiting van de kabel.

Aan te tonen is dat de ingangsimpedantie van een stukje kabel, korter dan $1/4 \lambda$, bij verwaarlozing van de verliezen door een reactantie van een zelfinductie kan worden voorgesteld (zie fig. 12,14b).

R.T.

182 W.T.

Nadruk verboden

Naarmate de lengte korter wordt dan $\frac{1}{4} \lambda$, wordt de reactantie kleiner.

Maken we het stukje kabel korter dan $\frac{1}{2} \lambda$ doch langer dan $\frac{1}{4} \lambda$, dan is de ingangsimpedantie capacitief (fig. 12,14c). Naarmate de kabel korter wordt dan $\frac{1}{2} \lambda$ en meer de lengte van $\frac{1}{4} \lambda$ gaat benaderen wordt de capacitieve reactantie groter dus de capaciteit kleiner.

De ingangsimpedantie van $\frac{1}{2} \lambda$ kortgesloten sectie is nul, daar hier, bij een spanning nul, een maximale stroom optreedt (zie fig. 12.14d).

Zo voortgaande is de ingangsimpedantie van een $\frac{3}{4} \lambda$ kortgesloten kabel oneindig en is de ingangsimpedantie van een kortgesloten kabel met een lengte groter dan $\frac{1}{2} \lambda$ en kleiner dan $\frac{3}{4} \lambda$ weer inductief. In fig. 12,15 is een overzicht gegeven van de impedanties die zich bij verschillende lengten van een kortgesloten kabel voordoen.

Bezien we nogmaals een kabelelement van $\frac{1}{4} \lambda$ lengte dat aan het einde is kortgesloten, dan blijkt ook dat dit dezelfde eigenschappen vertoont als een parallelschakeling van een spoel en een condensator zonder verliezen.

Voor de frequentie van de aangelegde spanning waarvoor de Lecher juist $\frac{1}{4} \lambda$ lang is, is de ingangsimpedantie oneindig groot (zonder verliezen). We zouden de betreffende frequentie de resonantiefrequentie kunnen noemen. Heeft de aangelegde spanning een hogere frequentie dan de resonantiefrequentie, dan wordt de golflengte van de aangelegde spanning kleiner, het stukje kabel is dan langer dan $\frac{1}{4} \lambda$, dus gedraagt dit zich capacitief.

Heeft de aangelegde spanning een frequentie lager dan de resonantiefrequentie, dan is de golflengte daarvan groter dan die waarop het stukje kabel is afgestemd, dus gedraagt het stukje kabel zich inductief.

We zien dus dat het kortgesloten stukje kabel zich overeenkomstig gedraagt aan een afgestemde kring waarvan de afgestemde golflengte gelijk is aan de $4 \times$ de lengte. Is de lengte van het stukje kabel l , dan is de afgestemde golflengte $\lambda_0 = 4 l$ en de afgestemde frequentie $f_0 = \frac{v}{4 l}$ (zie fig. 12,15).

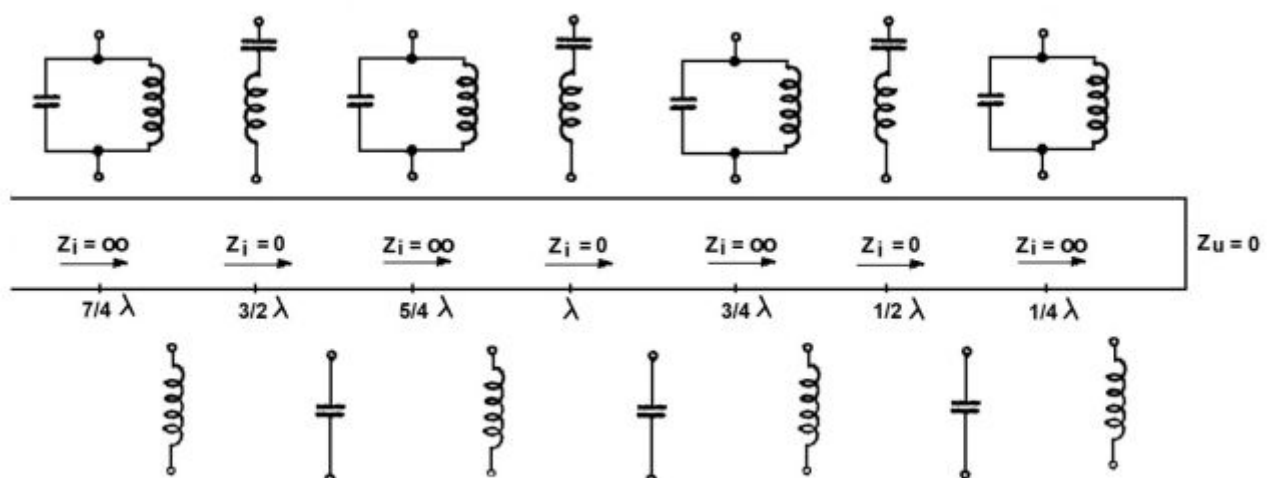


Fig. 12,15. Het gedrag van een kortgesloten kabel.



Zo blijkt dat een stukje kabel dat aan het einde open is en een lengte heeft Van $\frac{1}{4} \lambda$ zich gedraagt als een afgestemde kring, die bestaat uit een serieschakeling van een spoel en een capaciteit. Zie hiertoe fig. 12,16.

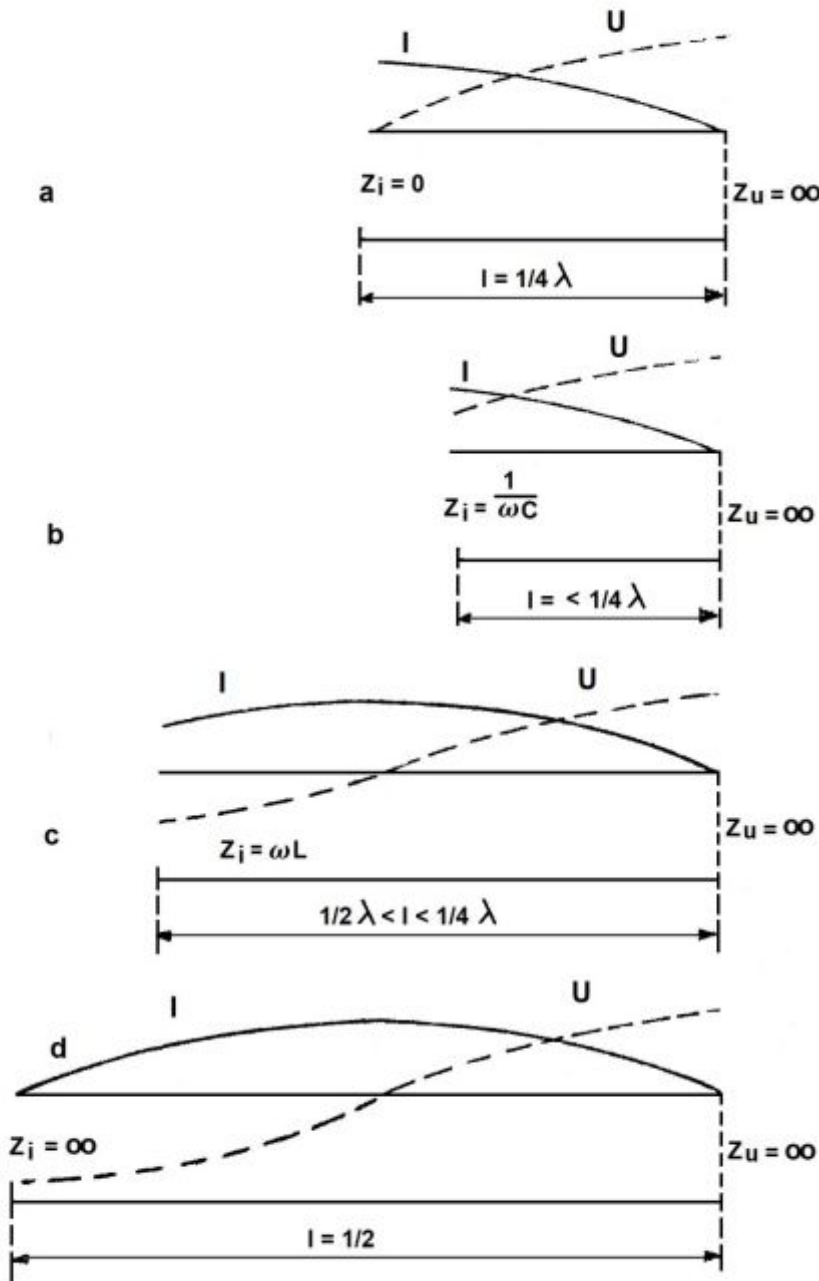


Fig. 12.16. Korte stukjes kabel met een open einde.

heeft van $R_0 = \sqrt{R_k R_u}$. Is de Lecher een oneven aantal kwart-golf lengten lang, dan zal de ingangsimpedantie nul zijn indien de uitgangsimpedantie oneindig groot is, terwijl de ingangsimpedantie oneindig groot zal zijn als de uitgangsimpedantie nul is.

De cursist gaat dit zelf na. De afgestemde frequentie is weer gelijk aan $f_0 = \frac{v}{4l}$, indien de lengte l is.

Is het stukje kabel $\frac{1}{2} \lambda$ lang en aan het einde kortgesloten, dan is dat te vergelijken met een serieschakeling van een zelfinductie en capaciteit, terwijl het bij een open einde overeenkomt met een parallelschakeling van zelfinductie en capaciteit. Een en ander is in fig. 12,17 weergegeven.

Uit het bovenstaande kunnen we opmaken dat de Lecher heel goed te gebruiken is als impedantietransformator.

Is de Lecher een geheel aantal halve golf lengten lang, dan is de ingangsimpedantie gelijk aan de uitgangsimpedantie.

Veel gebruik wordt gemaakt van de impedantietransformator van $\frac{1}{4} \lambda$. Het is te bewijzen dat het verband tussen de ingangsweerstand R_i en de uitgangsweerstand R_0 van een $\frac{1}{4} \lambda$ sectie gelijk is aan $R_0 = \sqrt{R_i R_u}$. Men noemt dit de $\frac{1}{4} \lambda$ transformator.

Wenst men een kabel met een karakteristieke weerstand af te sluiten met een weerstand $R_u \neq R_k$, dan kan men deze weerstand aanpassen op de kabel met behulp van een $\frac{1}{4} \lambda$ transformator die een karakteristieke weerstand

R.T.

184 W.T.

Nadruk verboden

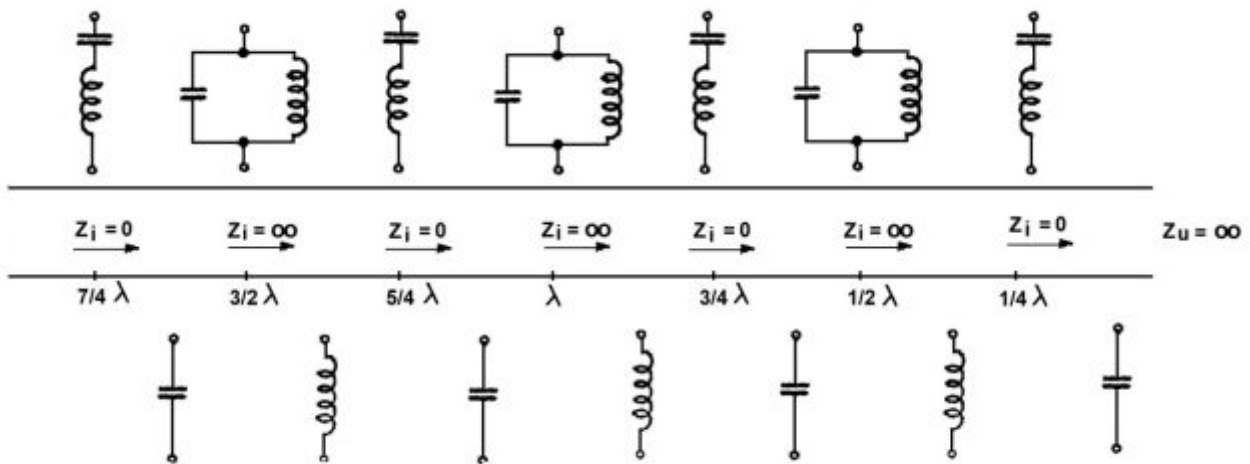


Fig. 12,17. Het gedrag van een open kabel.

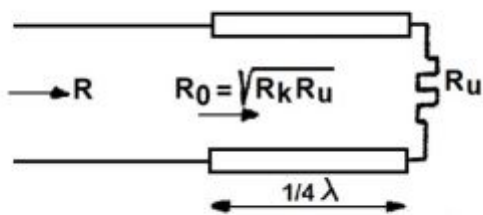


Fig. 12,18. De $\frac{1}{4} \lambda$ -transformator.

De ingangsweerstand van de $\frac{1}{4} \lambda$ -transformator is dus gelijk aan de golfweerstand van de kabel en treden alleen lopende golven op (zie fig. 12,18).

Met voordeel kunnen we gebruik maken van een $\frac{1}{4} \lambda$ -transformator bij een kabel die voor energietransport moet dienen, terwijl de inwendige weerstand van de energiebron en van de verbruiker niet gelijk is aan de karakteristieke impedantie van de te bezigen kabel.

Om het optreden van staande golven te voorkomen moet men de kabel met kwartgolf transformatoren aanpassen.

12.7. Praktische toepassingen van kabels waarop zich staande golven voordoen.

Uit het voorgaande blijkt dus dat korte stukjes kabel heel goed te gebruiken zijn voor het vormen van een reactantie of afgestemde kring voor zeer korte golven. Voor lange golven zou de lengte onpraktische afmetingen krijgen.

We zullen enkele praktische toepassingsmogelijkheden nagaan.

Men wenst een leiding van enkele golflengten lang horizontaal boven een tafel aan te brengen ten einde daarvan metingen te verrichten. Een zeer eenvoudige methode om de leiding van de tafel te isoleren, is gebruik te maken van steunen die gevormd worden door $\frac{1}{4} \lambda$ kortgesloten Lechers. Immers die hebben een ingangsimpedantie die oneindig groot is (zie fig. 12,19). Natuurlijk is dit slechts mogelijk voor één golflengte.

De ondersteunende stukken behoeven nu niet isolerend materiaal te zijn, daar de isolering bewerkstelligd wordt door de elektrische eigenschappen van het $\frac{1}{4} \lambda$ kabelelement.

Ook kan men een kort stukje kabel, ook wel stub genaamd, gebruiken om een anodekring op een bepaalde hoge frequentie af te stemmen, daar de aanwezige bedradings- en buiscapaciteiten een



zodanige waarde hebben dat alleen nog een kleine zelfinductie moet worden aangebracht om op de gewenste frequentie af te stemmen (zie fig. 12,20).

De kortsluiting aan het einde van de stub is nu vervangen door een verplaatsbare kortsluitbrug. De gewenste waarde van de zelfinductie kan nu worden ingesteld.

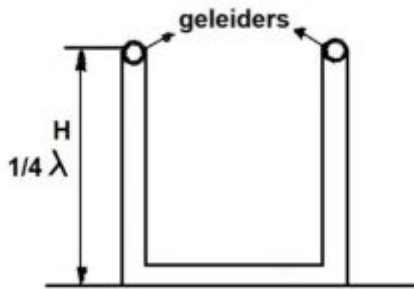


Fig. 12,19. Ondersteuning van twee geleiders.

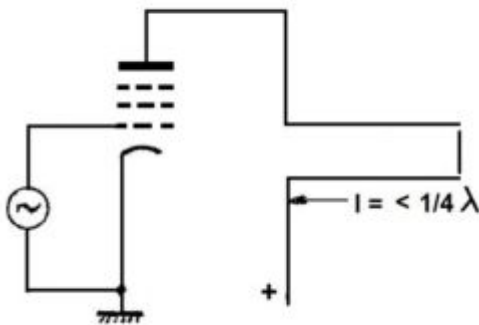


Fig. 12,20. Afstemming van anodekring door middel van kortgesloten stub.

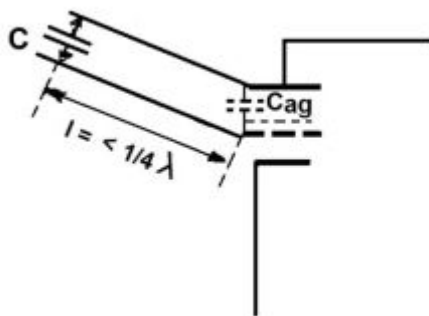


Fig. 12,21. Het plaatsen van een stub om de invloed van C_{ag} op te heffen.

Heeft de capaciteit tussen anode en kathode een te kleine reactantie, zodat ongewenste terugkoppeling of een te kleine ingangsimpedantie van de buis optreedt, dan kan dit bij korte golven ook enigszins verholpen worden met behulp van een stub, die korter is dan $\frac{1}{4} \lambda$; met een verplaatsbare kortsluitbrug die zo kan worden ingesteld dat de zelfinductie met de capaciteit C_{ag} een parallelkring vormt die is afgestemd op de frequentie van de wisselspanning (fig. 12,21).

Op deze wijze vormt zich tussen anode en stuurrooster een zeer grote impedantie in plaats van de kleine reactantie van C_{ag} . De capaciteit C in de kortsluitbrug moet voorkomen dat de gelijkspanning tussen anode en stuurrooster niet wordt kortgesloten. Deze capaciteit moet zo groot zijn dat de brug voor de wisselspanning een kortsluiting blijft.

Men kan op een kabel, waarop staande golven voorkomen, dus bijvoorbeeld de kabel aan het einde open laten of kortsluiten, op verschillende manieren de golflengte van de aangesloten spanning met een duimstok meten.

De beide geleiders kunnen bijvoorbeeld uitgevoerd zijn van wolframdraad. Op die plaatsen waar de stroom het grootst is (stroombuiken) zal de draad het sterkst gaan gloeien, terwijl de draad op de plaatsen van de stroomknopen donker blijft. Door enkele afstanden van de stroombuiken te meten en hiervan de gemiddelde waarde te nemen, kan men vrij nauwkeurig resultaat bereiken. De beide geleiders kunnen ook geplaatst worden in een glazen pijp, gevuld met neogas.

R.T.

186 W.T.

Nadruk verboden

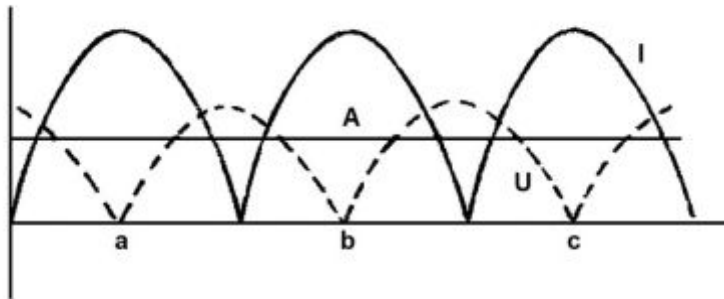


Fig. 12,22. Effectieve waarde van stroom en spanning bij lopende golven.

De plaatsen waarop de elektrische veldsterkte het grootst is, zal een grote oplichting plaatsvinden en zijn de afstanden hiervan en daarmee de golflengte te meten.

Indien een kabel gebruikt moet worden om energie van het ene punt naar een ander punt te transporteren, zal men zorgen dat zich op de kabel alleen lopende golven voordoen.

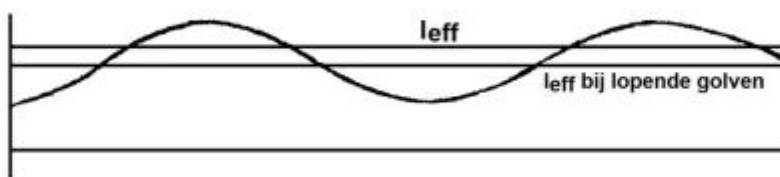
Het voordeel dat het optreden van lopende golven t.o.v. staande golven langs de kabel heeft, is dat bij lopende golven minder energieverliezen optreden.

Bij volledig staande golven langs de kabel ziet het verloop van de effectieve waarde van de stroom er uit zoals fig. 12,22 weergeeft.

We zien dat de effectieve waarde van stroom en spanning langs de kabel varieert.

In de punten a , b en c is de amplitude en dus ook de effectieve waarde van de staande golf groter dan die, die zouden optreden bij lopende golven. De effectieven waarde van de stroom bij lopende golven is door de lijn A in fig. 12,22 weergegeven. De amplitude van de aangelegde spanning is in beide gevallen gelijk verondersteld. De gemiddelde effectieve waarde van de stroom bij staande golven is groter dan de effectieve waarde bij lopende golven. Het energieverlies langs de lijn is dus bij staande golven groter dan bij lopende golven.

Is de kabel afgesloten met een weerstand die niet gelijk is aan de karakteristieke weerstand, dan treedt langs de kabel een combinatie op van staande en lopende golven.



In fig. 12.23 is het verloop van de effectieve waarde van de stroom weergegeven als de afsluitweerstand niet gelijk is aan de karakteristieke weerstand.

Fig. 12,23. De effectieve waarde van de stroom bij combinatie van lopende en staande golven.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 303 t/m 307.

12.8. Reflectiefactor

Het verloop van de effectieve waarde van de spanning is door de gestippelde kromme in fig. 12,24 weergegeven. Indien de lijn afgesloten is met een andere weerstand dan de karakteristieke impedantie, zal in het algemeen de spanning aan het einde niet gelijk zijn aan de spanning die op zou treden als de afsluitweerstand wel gelijk is aan de karakteristieke weerstand.

De nu optredende spanning aan het einde van de kabel kan men nu gesplitst denken in een spanning die op zou treden als de kabel met de karakteristieke impedantie afgesloten zou zijn en een restspanning. Het eerste deel van de spanning zou gepaard gaan met een lopende golf langs de kabel. De restspanning kan men nu beschouwen als ontstaan ten gevolge van een wisselspanningsbron die eveneens een lopende golf doet ontstaan, die echter van het einde naar de ingang van de kabel vloeit. Men zegt nu dat aan het einde van de kabel reflectie optreedt. De beide lopende golven geeft men aan met een heengaande- en gereflecteerde golf.

In fig. 12,24 is de momentele waarde van de heengaande en gereflecteerde golf voor een bepaald ogenblik als functie van de lengte der kabel gegeven.

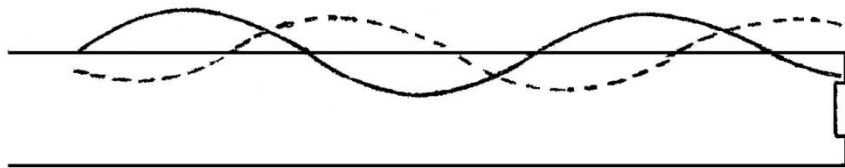


Fig. 12,24. Heengaande en gereflecteerde golf.

In het algemeen is de gereflecteerde golf minder sterk dan de heengaande golf. De verhouding van de amplitude van de gereflecteerde golf en die van de heengaande golf noemt men de reflectiefactor.

Is de leiding afgesloten met de golfweerstand, dan is de reflectiefactor nul. Bij een belastingsimpedantie Z , die niet gelijk is aan de karakteristieke impedantie Z_k , wordt de verhouding tussen de amplitude der heengaande golf U_h en de gereflecteerde golf U_r :

$$f = \frac{U_r}{U_h} = \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k}.$$

Of indien we een verliesvrijekabel met een ohmse weerstand R belasten, dan wordt de reflectiefactor:

$$f = \frac{U_r}{U_h} = \frac{R - R_k}{R + R_k}.$$

We zien dat de reflectiefactor zowel positief als negatief kan zijn en wel afhankelijk van het feit of de afsluitweerstand groter of kleiner is dan de karakteristieke weerstand. Is de reflectiefactor positief dan zal de gereflecteerde golf de heengaande golf ondersteunen, dit wil zeggen dat de spanningsmaxima groter zullen zijn dan die bij het optreden van lopende golven voorkomen. Is de reflectiefactor negatief, dan zal de gereflecteerde golf de heengaande tegenwerken, dus worden spanningsmaxima kleiner dan bij de aanwezigheid van lopende golven.

Geldt voor de reflectiefactor, voor wat betreft de spanningsgolven, een positieve waarde, dan zal voor de stroom golven een reflectiefactor van negatieve waarde gelden.

R.T.

188 W.T.

Nadruk verboden

We moeten hierbij bedenken dat de stroomgolven $\frac{1}{4} \lambda$ verschoven zijn ten opzichte van de spanningsgolven. We kunnen de reflectiefactor dus schrijven:

$$f = \frac{U_r}{U_h} = \frac{R - R_k}{R + R_k} \quad \text{of:} \quad f = \frac{I_r}{I_h} = - \frac{R - R_k}{R + R_k} = \frac{R_k - R}{R + R_k}.$$

Is de reflectiefactor negatief voor de stromen, dus $R > R_k$, dan zullen de heen- en teruggaande stroomgolven elkaar verzwakken, terwijl bij positieve waarde van deze reflectiefactor de stroomgolven elkaar ondersteunen.

Is de belastingsweerstand $R > R_k$, dan zullen we op de kabel onderlinge tegenwerking der stroomgolven zien (f is negatief), hetgeen aan het einde een stroomminimum oplevert. Tevens zullen we dan op de kabel ondersteuning van de spanningsgolven zien, dit wil zeggen, een spanningsmaximum aan het einde der kabel.

Op dezelfde wijze is te concluderen dat bij $R < R_k$ op de belasting een spanningsminimum en een stroommaximum optreedt.,

Een waarvan veelvuldig gebruik gemaakt wordt bij de berekeningen de kabel betreffende, is de staande golfverhouding. Dit is een getal dat aangeeft de verhouding tussen de maximum en minimum optredende golfwaarde langs de lijn.

$$S = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}}.$$

Als we bedenken dat de maximum waarde van de spanning of stroom bepaald wordt door de som van de amplituden der heengaande en gereflecteerde golven; de minimum waarde wordt bepaald door het verschil van de beide golven. we kunnen de staande golfverhouding ook als volgt schrijven:

$$S = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|}$$

Hieruit volgt:

$$S = \frac{1 + \frac{|U_r|}{|U_h|}}{1 - \frac{|U_r|}{|U_h|}} = \frac{1 + \frac{|I_r|}{|I_h|}}{1 - \frac{|I_r|}{|I_h|}}$$

De verhouding $\frac{U_r}{U_h}$ of $\frac{I_r}{I_h}$ werd in het voorgaande reeds gedefinieerd als reflectiefactor.

De staande golfverhouding wordt hiermee voor de spanning:

$$S = \frac{1 + |f|}{1 - |f|} \quad \text{of:}$$

$$S = \frac{1 + \left| \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k} \right|}{1 - \left| \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k} \right|} = \frac{\left| \frac{Z + Z_k}{Z + Z_k} \right| + \left| \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k} \right|}{\left| \frac{Z + Z_k}{Z + Z_k} \right| - \left| \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k} \right|}$$

En voor de stroom:

$$S = \frac{1 + \left| \frac{Z_k - Z}{Z_k + Z} \right|}{1 - \left| \frac{Z_k - Z}{Z_k + Z} \right|} = \frac{\left| \frac{Z_k + Z}{Z_k + Z} \right| + \left| \frac{Z_k - Z}{Z_k + Z} \right|}{\left| \frac{Z_k + Z}{Z_k + Z} \right| - \left| \frac{Z_k - Z}{Z_k + Z} \right|}$$

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 308 t/m 315.

12.9. Dubbeldraads en coaxiale geleiders

Het energieverlies in een Lechersysteem wordt niet uitsluitend veroorzaakt doordat de geleiders een zekere weerstand hebben. Deze weerstand moet uit de aard der zaak zo klein mogelijk worden gehouden door een juiste keuze van het materiaal en de doorsnede van de geleiders.

Dikwijls gaat de belangrijkste hoeveelheid energie verloren door straling. Om dit verlies aan energie zo klein mogelijk te doen zijn, wordt een dubbeldraads Lechersysteem wel van een afscherming voorzien, zodat geen energie-uitstraling naar andere onderdelen van de apparatuur plaatsvindt (zie fig. 12,15).

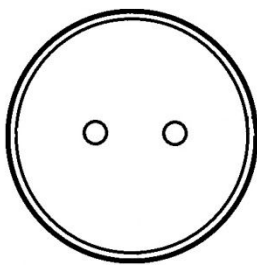


Fig. 12,25. Dubbeldraadskabel.

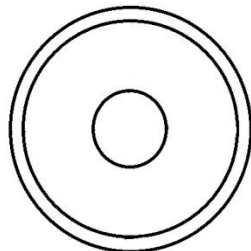


Fig. 12,26. Coaxiale kabel.

Nu wordt dus energie geleverd aan de afscherming zodat voor de Lecher de stralingsverliezen nagenoeg gelijk zijn gebleven.

Bij een andere, veel toegepaste constructie speelt de uitstraling van energie een veel minder belangrijke rol. Deze constructie bestaat uit twee coaxiale geleiders (fig. 12,26). Doordat de stroom hier uitsluitend aan de buitenzijde van de binnengeleiders en aan de binnenzijde van de buitengeleider vloeit, kan zeer weinig energie worden uitgestraald. Alleen kan nog energie-uitstraling plaatsvinden aan de einden van de kabel.

Dank zij de kleinere energieverliezen is de kwaliteit van een coaxiale kabel groter dan die van een dubbeldraads kabel.

De coaxiale kabel heeft in het algemeen geen grote karakteristieke impedantie; deze kan bij de dubbeldraads kabel groter gemaakt worden. Bij een coaxiale kabel is de capaciteit veel groter dan bij een dubbeldraads systeem, hetgeen

$$Z_k = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ kleiner maakt.}$$

12.10. Het afsluiten van de kabel

Indien we de antenne (een dipool bijvoorbeeld) met de zender of ontvanger verbinden, vindt dat in het algemeen plaats met behulp van een kabel.

De energie-overdracht van zender naar antenne of van antenne naar ontvanger geschiedt met het grootste

rendement als de kabel aan beide zijden met zijn karakteristieke impedantie is afgesloten.

We kunnen dit als volgt verduidelijken. De ontvangstantenne kunnen we beschouwen als een spanningsbron met inwendige weerstand R_s (zie later de stralingsweerstand). Deze spanningsbron zal maximaal vermogen afgeven als de uitwendige weerstand $R_s = R_u$. Deze weerstand R_u is de weerstand die we meten aan het antenne-einde van de kabel.

Op de kabel moeten de energieverliezen tot een minimum beperkt blijven, dus mogen we daar alleen maar lopende golven toelaten. Aan ontvangerzijde moet de kabel dus afgesloten worden met de karakteristieke impedantie en wordt derhalve aan de antennezijde ook de karakteristieke impedantie gemeten. Is dus de antenneweerstand $R_s = 70 \Omega$, dan moeten we een kabel met karakteristieke weerstand van 70Ω gebruiken en deze aan ontvangerzijde afsluiten met een weerstand van 70Ω .

Voor een kabel tussen zendantenne en zender geldt hetzelfde.

R.T.

190 W.T.

Nadruk verboden

Gebruiken we een leiding waarvan de karakteristieke weerstand niet gelijk is aan de antenneweerstand, dan kan de juiste aanpassing verkregen worden door gebruik te maken van een aanpassingstransformator. Hiervoor kan men een Lecher gebruiken die $\frac{1}{4} \lambda$ lang is en een karakteristieke impedantie bezit die middelevenredig is tussen de karakteristieke weerstand van de kabel en de belastingsweerstand.

Een lange transmissieleiding tussen antenne en zender of ontvanger geeft altijd enig energieverlies. Dit verlies wordt veroorzaakt door de weerstand van de leidingen, de diëlektrische verliezen in de isolatiematerialen waarmee de geleiders zijn gescheiden en gesteund worden en de straling van de leidingen. Om de uitstraling van energie te voorkomen worden de geleiders in gearde metalen schermen gelegd of wordt een coaxiale kabel gebruikt. De geleiders moeten niet te dun gekozen worden en de isolatiematerialen moeten van goede kwaliteit zijn, dit wil zeggen, bij de in aanmerking komende hoge frequenties moeten de diëlektrische verliezen minimaal zijn.

Om een dipool antenne te voeden, moeten we beschikken over twee gebalanceerde spanningen, want de beide helften van de dipool hebben gelijke impedantie, (capaciteit) ten opzichte van aarde. Een coaxiale voedingskabel kan deze spanningen zonder meer niet leveren en moeten speciale voorzorgen worden genomen. Tussen coaxiale kabel en dipool moet de asymmetrische spanning omgetransformeerd worden tot een symmetrische spanning (in het Engels 'balanced to unbalanced transformation'). Deze inrichting wordt verkort ook wel balun genoemd.

Ter wille van het overzicht is in fig. 12,27 de dipool antenne zonder bijzondere maatregelen aan de coaxiale voedingslijn aangesloten.

In de coaxiale leiding vloeit de stroom langs het buitenoppervlak van de binnengeleider en langs het binnenoppervlak van de buitengeleider. Ten gevolge van het skin-effect vloeit de stroom bij hoge frequenties alleen in een zeer dun laagje aan het oppervlak van de geleiders en wel aan dat oppervlak waar de veldsterkte het grootst is.

De stroom langs de binnenwand van de buitengeleider B vloeit niet geheel naar het gedeelte A' van de antenne maar gedeeltelijk langs de buitenwand van de buitengeleider B terug.

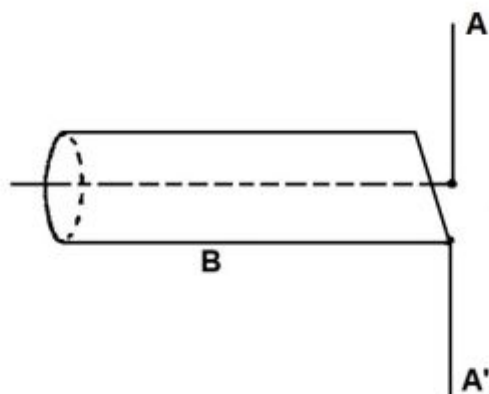


Fig. 12,27. Dipool antenne aan coaxiale kabel aangesloten zonder balun.

Hierdoor zijn de stromen in de beide helften A en A' van de antenne niet gelijk en ontstaat een afwijking in het stralingsdiagram en is het uitgestraalde vermogen niet maximaal. Ook de verbindingkabel zal nu vermogen uitstralen daar deze niet reflectievrij is afgesloten en dus staande golven zal ontwikkelen.

Om een goede afscherming te bewerkstelligen is de buitenmantel van de coaxiale kabel aan aarde gelegd waardoor deze mantel geen capaciteit ten opzichte van aarde bezit. De beide helften van de dipool hebben gelijke capaciteiten ten opzichte van aarde. Voor de symmetrie moet aan het antenne-einde van de kabel de buitenmantel vrij van aarde gemaakt worden.

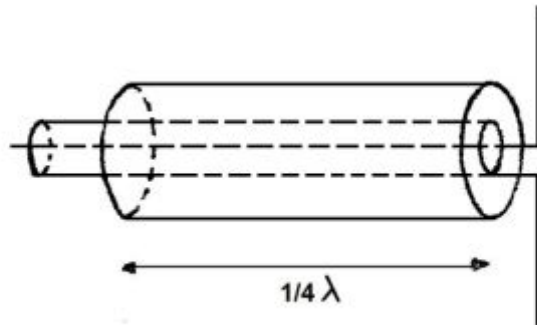


Fig. 12,28. Dipoolantenne met dipool en balun.

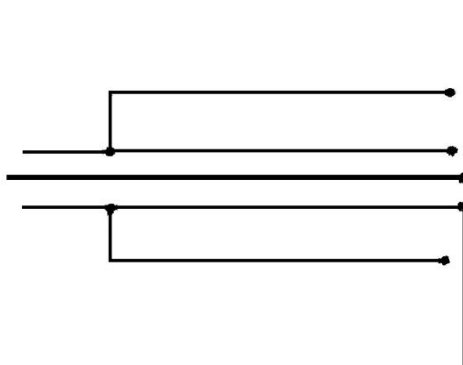


Fig. 12,29. Vervangingsschema van fig. 12,28.

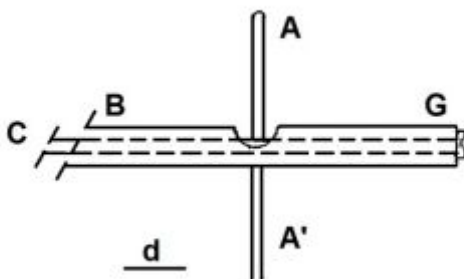


Fig. 12,30 Bevestiging van antenne aan dipool met grotere mechanische sterkte.

In fig. 12,28 is een eenvoudige methode aangegeven om het vloeien van h.f.-stromen langs de buitenwand van de buitengeleider te voorkomen. Om de buitengeleider B in de nabijheid van de antenne een geleider P aangebracht die aan het van de antenne afgekeerde einde geleidende contact maakt met de buitengeleider B , doch verder hiervan is geïsoleerd. Een dergelijke constructie wordt manchet genoemd. De lengte van P wordt $\frac{1}{4} \lambda$ genomen. De geleiders P en B vormen een coaxiale geleider van $\frac{1}{4} \lambda$. De impedantie aan het open einde is oneindig groot en zorgt er voor dat de gehele stroom langs de binnenzijde van de geleider B naar het antennedeel A' vloeit. Door de hoge ingangsimpedantie van de $\frac{1}{4} \lambda$ Lecher die is opgenomen is de buitengeleider B (in de $\frac{1}{4} \lambda$ sectie de binnengeleider) vrij gekomen van aarde. Nu ligt de mantel P aan aarde. Het elektrisch vervangingsschema is in fig. 12,29 weergegeven. De voorgaande constructie van de koppeling tussen dipoolantenne en de kabel bezat geen grote mechanische sterkte.

In fig. 12,30 is een constructie weergegeven die een grotere mechanische sterkte bezit. Hierin loopt de coaxiale kabel nog een kwart golflengte door en is aan het einde kortgesloten. De ingang van dit $\frac{1}{4} \lambda$ verlengstuk heeft vanuit de antenne gezien een oneindig grote ingangsweerstand, zodat de stroom die toegevoerd wordt aan de antenne hierdoor niet wordt beïnvloed. Het vloeien van de stroom langs de buitenkant van de buitengeleider is hiermee nog niet verhinderd. Om deze stroom tegen te gaan, moet ook hier een manchet, zoals in fig. 12,28 worden aangebracht.

In fig. 12,31 is een methode aangegeven voor de aansluiting van een coaxiale leiding aan een dipoolantenne, die "antenne van Pawsey" wordt genoemd. Hierbij is de binnengeleider C omgebogen en buiten langs de buitengeleider B teruggevoerd.

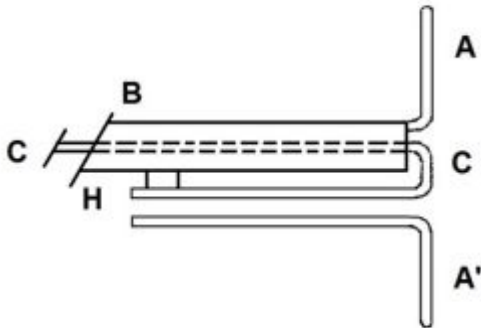


Fig. 12,31 Antenne van Pawsey.

Bij *H* is een verbinding tussen de omgebogen geleider en de buitenmantel *B* aangebracht. Het gedeelte *A'* van de antenne is ook verlengd en omgebogen en loopt over een bepaalde afstand parallel met het omgebogen gedeelte van *C*, doch is hiervan geïsoleerd. Het gedeelte *A* van de antenne is verbonden met de buitengeleider *B*. Door een geschikte keuze van de lengte der omgebogen gedeelten van *C* en *A'* en van de plaats van de kortsluiting *H* kan worden bereikt dat de stromen in de beide antennegedeelten *A* en *A'* gelijk zijn en in tegenfase, dus in balans.

Plaatsen we de kortsluiting op $\frac{1}{4} \lambda$ van het

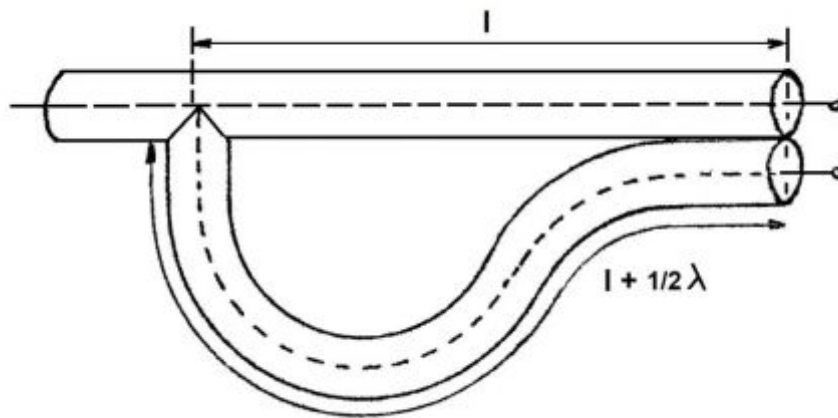
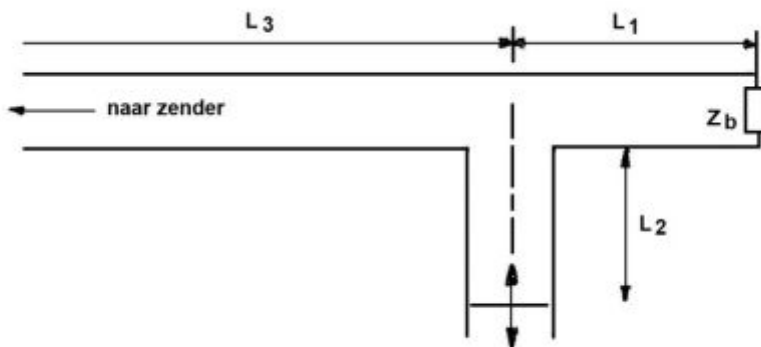


Fig. 12,32. Balun.

einde van de buitengeleider *C*, dan is de Ingangsimpedantie tussen de buitengeleider en de geleider *C* oneindig groot en kan er geen stroom langs de buitenkant van de buitengeleider en in de geleider *C* aan de zijde van de geleider *B* vloeien. Door de koppeling van de



beide omgebogen geleiders *C* en *A'* wordt energie overgedragen aan *A'* en die geleider kan dit uitstralen.

Fig. 12,33. Seriestub voor aanpassing.

In fig. 12,32 is nog een methode aangegeven waarop men van asymmetrische coaxiale kabel overgaat naar een symmetrische uitgang. Op de kabel wordt een stub Lecher geplaatst die een lengte heeft die een halve golflengte groter is dan de afstand van de plaats van deze stub tot het einde van de kabel.

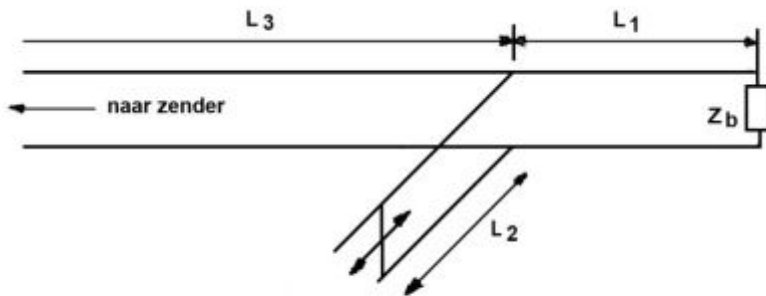


Fig. 12,34. Parallelstub voor aanpassing.

In fig. 12,32 is de lengte van de stub, die gedeeltelijk met de kabel is meegebogen $l + \frac{1}{2} \lambda$. De stroom en spanning aan het einde van de stub is nu dus een halve golflengte verschoven ten opzichte van de stroom de spanning aan het einde van de kabel. De uitgangsspanningen van de twee einden zijn dus in tegenfase en geschikt om aan een symmetrische belasting te worden aangesloten. De buitenmantel kan zonder meer geaard blijven.

12.11. Aanpassing met behulp van stubs

Moet een transmissielijn gebruikt worden voor het overdragen van hoogfrequent energie, dan gebeurt dat meestal over een afstand van enige golflengten. Het is dan wel zaak te zorgen dat er geen reflecties en dus geen staande golven optreden. Is de afsluitweerstand niet gelijk aan de karakteristieke impedantie van de kabel, dan kan men met korte stukken kabel, stubs genaamd, de staande golven voorkomen. Deze stubs kunnen in serie op de lijn ofwel parallel op de lijn geplaatst worden.

Als op de lijn staande golven voorkomen, zal de ingangsimpedantie van de lijn niet gelijk zijn aan de karakteristieke impedantie, doch een complex karakter hebben. Dat geldt ook voor de impedantie die we meten als we op willekeurige punten de ingangsimpedantie (naar het einde toe gezien) meten. Het imaginaire deel van een dergelijke impedantie kunnen we opheffen door plaatselijk een reactantie van gelijke grootte, doch met tegengesteld teken op te nemen. Het imaginaire deel van de impedantie en de bij te schakelen reactantie zal serieresonantie veroorzaken als deze in serie met de lijn wordt opgenomen en zodoende, bij verwaarlozen der verliezen, een waarde nul opleveren, zodat alleen het reële deel van die impedantie overblijft. Dit reële deel moet natuurlijk gelijk zijn aan de karakteristieke impedantie van de kabel. Dit wil dus zeggen dat de plaats van de aan te brengen reactantie aan de voorwaarde moet voldoen dat de impedantie een reël deel heeft dat gelijk is aan de karakteristieke weerstand.

De reactantie vormen we nu met behulp van een seriestub (fig. 12,33) of met een parallelstub (fig. 12,34). De stubs zijn dus zo geplaatst dat de impedantie, gemeten aan zendereinde gelijk aan Z_k is. Op l_3 kunnen nu dus geen staande golven optreden.

Op de stukken l_1 en l_2 treden natuurlijk wel staande golven op. Het verdient dus aanbeveling de stubs zo direct mogelijk bij de belasting te plaatsen.

Bij het plaatsen van een parallelstub vormt deze met de ingangsimpedantie van de lijn een parallelresonantie. De hierbij optredende reële impedantie moet gelijk zijn aan de karakteristieke weerstand. Voor de stub kan men natuurlijk ook een open stub bezigen; echter een stub met verplaatsbare kortsluitbrug is gemakkelijker in te stellen, zodat men in het algemeen deze gebruikt.

Daar de plaats waar de stub moet komen door meting bepaald moet worden, zouden we in de coaxiale kabel lange sleuven moeten maken en bij evenwijdige geleiders over een zekere lengte de isolatie moeten wegnemen.

Een eenvoudige methode om de stub op de juiste plaats te stellen, is door gebruik te maken van grafieken.

R.T.

194 W.T.

Nadruk verboden

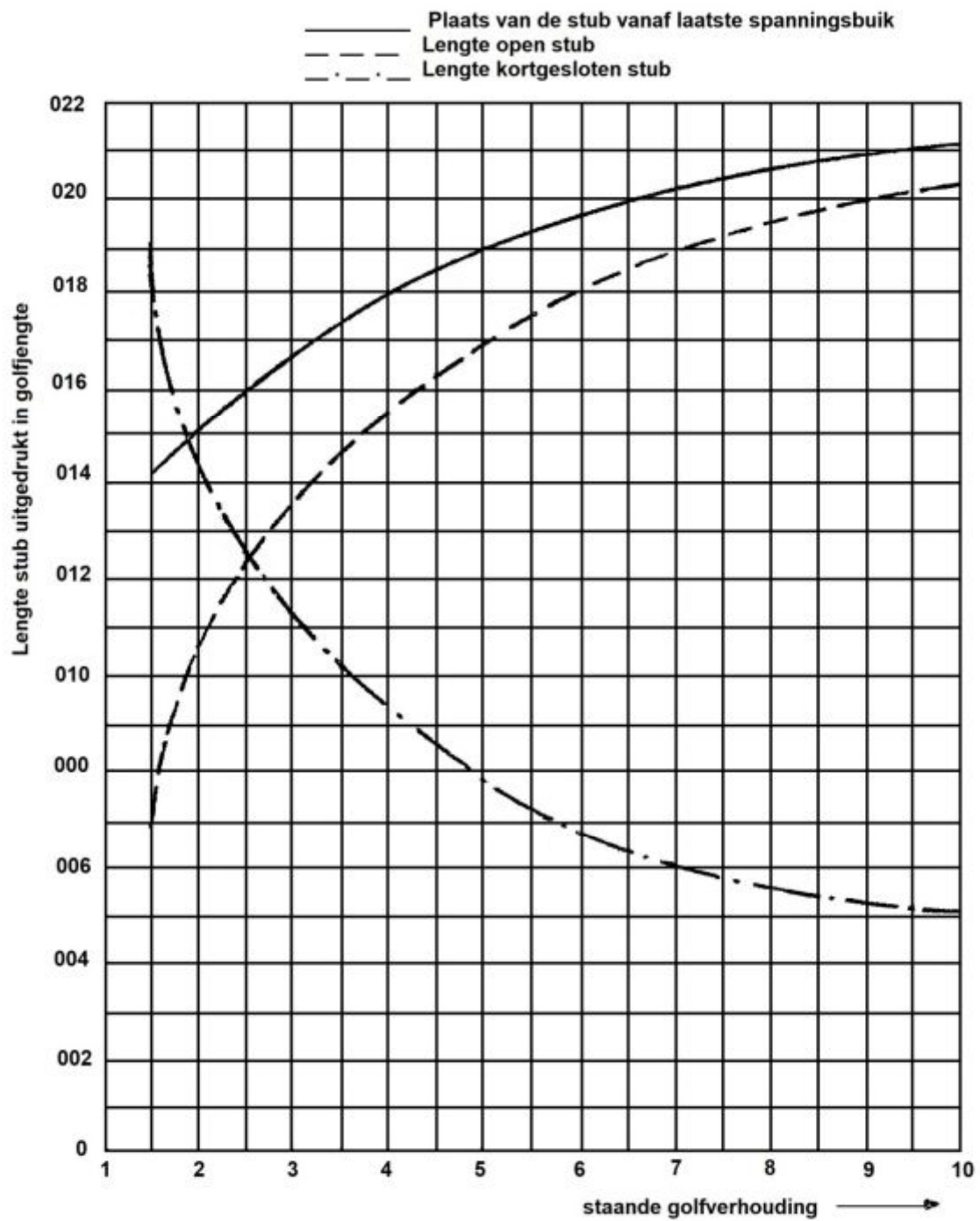


Fig. 12,35. Grafiek voor bepaling stubs voor aanpassing van de kabel.

Met behulp van een h.f.-spanningsindicator wordt de plaats bepaald waar het dichtst bij de belasting de spanning maximaal is en wordt dit spanningsmaximum gemeten. Op een afstand van $\frac{1}{4} \lambda$ daarvan verwijderd, kan dan het spanningsminimum worden gemeten. De staande golfverhouding is nu bekend:

$$S = \frac{U_{max}}{U_{min}}$$

Met behulp van de grafieken uit fig. 12,35 kan men nu de plaats en de lengte van de stub, uitgedrukt in golflengten worden gevonden. Natuurlijk kan deze methode niet zonder een ruime tolerantie werken; door controlemetingen zullen correcties moeten worden aangebracht.

Uit de grafiek lezen we nu de afstand af die de stub verwijderd moet zijn van het punt waar maximum spanning heerst. Wordt een open stub gebruikt, dan moet de gevonden afstand gemeten worden in de richting van de belasting. Voor een gesloten stub moet de gevonden afstand gemeten worden in de richting van het zendeinde. Alles vanaf het maximum spanningspunt dat het dichtst bij de belasting is gelegen.

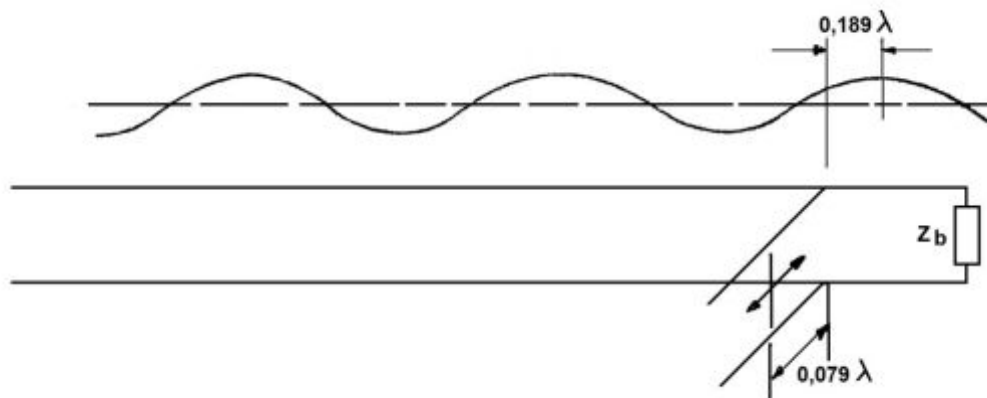


Fig. 12,36. Aanpassing met kortgesloten stub.

Voor het geval dat de staande golfverhouding $S = 5$, is in fig. 12,36 de plaatsing van de stub weergegeven als gebruik wordt gemaakt van een kortgesloten stub. We lezen uit de grafiek volgens fig. 12,35 af dat de stub geplaatst moet worden op $0,189 \lambda$ vanaf het maximum spanningspunt in de richting van de zender. De lengte van de stub moet zijn $0,08 \lambda$.

In fig. 12,37 is de aanpassing gegeven met een open stub.

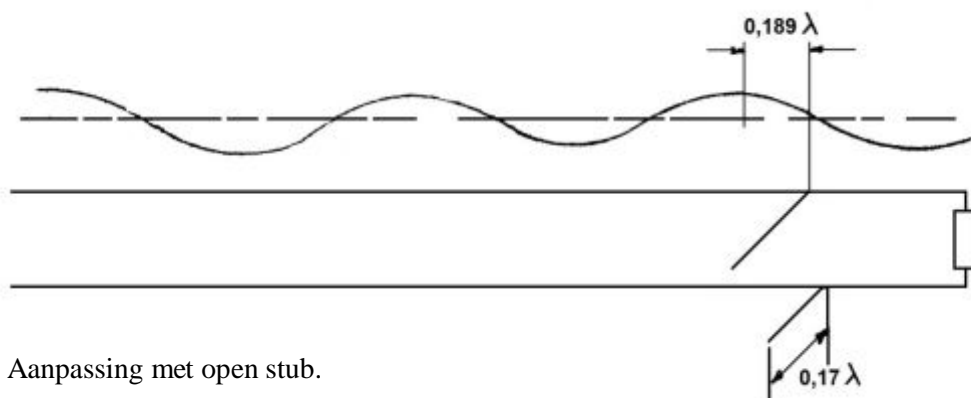


Fig. 12,37. Aanpassing met open stub.

R.T.

196 W.T.

Nadruk verboden

De plaats is nu $0,189 \lambda$ vanaf het maximum spanningspunt in de richting van de belasting. De lengte van de stub is $0,17\lambda$.

Door het plaatsen van de stub bereiken we dat in beide gevallen, bij open zowel als gesloten stub, links van de stub alleen maar lopende golven voorkomen.

Een dergelijke aanpassing met behulp van stubs is in principe ook mogelijk bij coaxiale geleidingen.

Om te voorkomen dat stubs verschoven zouden moeten worden langs de kabel, hetgeen een gleuf in de buitenmantel vereist en straling veroorzaakt, gebruikt men twee stubs die op een vaste plaats worden aangebracht. De stub die het dichtst bij de belasting staat, levert een spoel of condensator aan de lijn van zodanige waarde dat met de tweede stub een reële impedantie gevormd kan worden die gelijk is aan de karakteristieke weerstand.

Het wijzigen van de eerste stub heeft voor de tweede stub hetzelfde resultaat, alsof deze langs de lijn verschoven wordt. Om de stubs gemakkelijk instelbaar te doen zijn, voert men ze uit met een kortsluitzuiger die in de buitengeleider past en daarmee verschoven kan worden (zie fig. 12,38). Om zoveel mogelijk verschillende aanpassingen tot stand te kunnen brengen is het gewenst dat de twee stubs ongeveer $\frac{3}{8} \lambda$ van elkaar verwijderd zijn. De stubs moeten zo dicht mogelijk bij de belasting geplaatst worden, ook weer om over een zo groot mogelijk deel van de kabel lopende golven te verkrijgen.

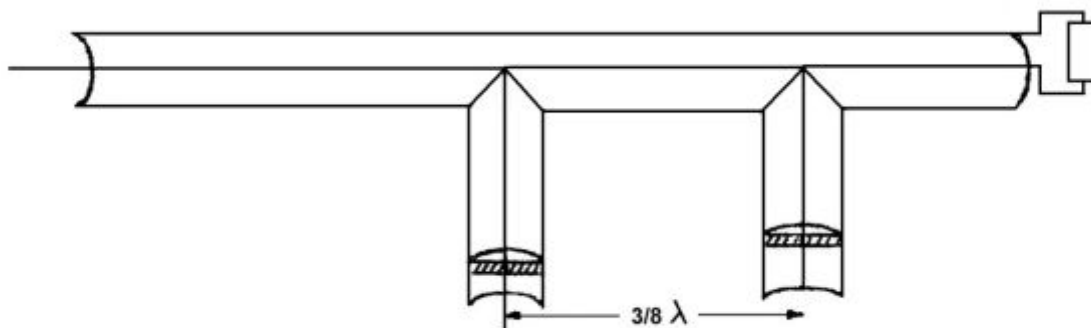


Fig. 12,38. Aanpassing van een coaxiale kabel met behulp van twee stubs.

Oplossingen inzenden van de opgaven Wt, nr. 321 t/m 327.